Η ΘΕΩΡΙΑ ΤΩΝ ΑΝΑΛΥΤΙΚΩΝ ΣΥΝΑΡΤΗΣΕΩΝ ΤΟΥ LAGRANGE ΚΑΙ Ο HEGEL

I. Εἰσαγωγή. Μὲ τὴ Σχολὴ τοῦ Κρότωνος ἐγκαινιάζεται ἡ στενὴ σχέση Φιλοσοφίας καὶ Μαθηματικῶν, ὅπως προβάλλεται ἀπὸ τὸν Ἀριστοτέλη: «Φαίνονται δὴ καὶ οὗτοι τὸν ἀριθμὸν νομίζοντες τὴν ἀρχὴν εἶναι καὶ ὡς ὕλην τοῖς οὖσι καὶ ὡς πάθη τε καὶ ἕξεις»[1]. Παράλληλα ἡ παντοδυναμία τοῦ ἀριθμοῦ ἐπεκτείνεται καὶ στὴ φύση: «ἔνιοι γὰρ τὴν φύσιν ἐξ ἀριθμῶν συνιστᾶσιν, ὥσπερ τῶν Πυθαγορείων τινές»[2].

Ἐνῶ λοιπὸν μὲ τοὺς Πυθαγορείους τὰ πράγματα μιμοῦνται τοὺς ἀριθμοὺς ὁ Πλάτων, ὁ ὁποῖος συνεχίζει αὐτὴ τὴν φιλοσοφία μαθηματικοῦ τύπου, προχωρεῖ ἀκόμα περισσότερο, καθὼς τὰ πράγματα μετέχουν τῶν ἀριθμῶν[3].

Ἀργότερα ὁ Leibniz ὑπογραμμίζει πῶς ὁ ἀπειροστικὸς λογισμὸς προκύπτει ἀπὸ μιὰ ἐσώτερη φιλοσοφία: «Fortasse non inutile erit, ut non nihil... attingas de nostra hac analysi infiniti, ex intimo philosophiae fonte derivata, qua mathesis ipsa ultra hactenus consuetas notiones, id est ultra imaginabilia, sese attolit, quibus pene solis hactenus geometria et analysis immergebantur. Et haec nova inventa mathematica partim lucem accipient a nostris philosophematibus, partim rursus ipsis auctoritatem dabunt».[4] Ἐνῶ ἀπὸ τὴν *Συμβολικὴ* ἢ τὴ *Χαρακτηριστικὴ*[5,6], θὰ ἐξαρτηθεῖ ἡ μελλοντικὴ ἀνάπτυξη τῶν διαφόρων κλάδων τῶν Μαθηματικῶν, καθὼς ὁ μεγάλος γερμανὸς διανοητής, στοχεύει σὲ μιὰ παγκόσμια μαθηματικὴ[7] (mathématique universelle).

Ὅμως στὰ τέλη τοῦ 17ου αἰώνα ἡ δημιουργία τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ ἀπὸ τοὺς Newton καὶ Leibniz ὡς ἀλγορίθμου μὲ πάμπολλες ἐφαρμογὲς θὰ σημάνει καὶ τὴν ἀρχὴ τοῦ τέλους αὐτῆς τῆς μακραίωνης σχέσης. Κατὰ τὸν 18ο αἰώνα ἐμφανίζεται ἡ ἐπιστημολογικὴ διάσταση ὅπου οὐσιαστικὰ διακόπτονται οἱ σχέσεις Μαθηματικῶν καὶ Φιλοσοφίας. Τὰ Μαθηματικὰ καὶ οἱ μαθηματικοὶ θὰ ἀκολουθήσουν τὸ δικό τους δρόμο, ὅπως ἀντίστοιχα ἡ Φιλοσοφία μὲ τοὺς φιλοσόφους. Μάλιστα ἡ ἀνά-

---

1. Ἀριστοτελους, *Μ.τ.φ.*, I. 5, 986 a 15.

2. Ἀριστοτελους, *Περὶ Οὐρανοῦ*, III. 300 a 16.

3. Ἀριστοτελους, *Μ.τ.φ.*, A. 6, 987 b 11, «οἱ μὲν Πυθαγόρειοι μιμήσει τὰ ὄντα φασὶν εἶναι τῶν ἀριθμῶν, Πλάτων δὲ μεθέξει, τοὔνομα μεταβαλών».

4. Lettre du 3-13 Septembre 1696 à Fardella. *Nouvelles lettres et opuscules*, éd. Foucher de Careil, 1857, σ. 327.

5. «J'ai insinué ailleurs qu'il y a un calcul plus important que ceux de l'Arithmétique et de la Géométrie, et qui dépend de l'Analyse des idées. Ce serait une Caractéristique universelle dont la formation me paraît une des plus importantes choses qu'on pourrait entreprendre». Lettre de Leibniz à Bayle, κατὰ τὸ 1698, G.IV., σ. 571.

6. Πβ. καὶ L. Couturat, éd. Opuscules et fragments inédits de Leibniz, Paris, 1903.

7. G.W. Leibniz, *Sämtliche Schriften und Briefe*, VI, 6 σ. 487.

πτυξη τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ χωρὶς ἐπίκληση τῆς μεταφυσικῆς[8] κάνει ἀκόμα πιὸ ἰσχυρὴ αὐτὴ τὴ διάσταση.

Ἂν καὶ τὸ παλαιὸ αὐτὸ εἰδύλλιο φαίνεται νὰ ἔχει ὁριστικὰ τελειώσει, οἱ σχέσεις τῶν Μαθηματικῶν καὶ τῆς Φιλοσοφίας γίνονται περισσότερο πολύπλοκες. Ἡ ἄμεση ἐπίδραση τῆς φιλοσοφίας στὴν ἀνάπτυξη τῶν Μαθηματικῶν μειώνεται παρ' ὅλο ποὺ ὑπάρχουν μαθηματικοὶ οἱ ὁποῖοι ἐνδιαφέρονται πολὺ γιὰ τὴ φιλοσοφία[9] καθὼς καὶ μαθηματικοὶ οἱ ὁποῖοι εἶναι σημαντικοὶ φιλόσοφοι ὅπως ὁ B. Bolzano, ὁ H. Poincaré, ὁ B. Russel.

Ἀντίστροφα ἡ ἐπίδραση τῶν Μαθηματικῶν στὴ φιλοσοφία ἦταν ἔμμεση, ἂν καὶ ὑπῆρχαν περιπτώσεις ὅπου αὐτὴ ἡ ἐπίδραση ὑπῆρξε ἀποτελεσματική, ὅπως π.χ. στὴ μὴ-εὐκλείδεια γεωμετρία ἢ στὸ θεώρημα τῆς μὴ πληρότητας τοῦ Gödel. Ἀρκετοὶ φιλόσοφοι ἔδιναν μεγάλη σημασία στὰ Μαθηματικὰ καὶ συνέβαλαν στὴν ἀνάπτυξή τους. Μεταξὺ αὐτῶν οἱ ἐκπρόσωποι τῆς κλασικῆς γερμανικῆς φιλοσοφίας: Kant[10], Hegel, Marx.

Εἶναι γνωστὸ πὼς ἡ θεώρηση τῆς εὐκλείδειας γεωμετρίας ὁδήγησε τὸν Kant στὴν *Ὑπερβατικὴ Αἰσθητική*, ἐνῶ ἡ δημιουργία τῆς μὴ-εὐκλείδειας γεωμετρίας διέλυσε τὴν καντιανὴ θεώρηση περὶ διαισθητικῶν καὶ λογικῶν σχημάτων. Ἡ σχέση τοῦ Marx μὲ τὰ Μαθηματικά[11] ἔχει ἀρχίσει νὰ ἐρευνᾶται ἐδῶ καὶ ἀρκετὰ χρόνια, κάποιες δὲ μελέτες τῶν μαθηματικῶν θεμάτων στὸ ἔργο τοῦ Hegel ἔχουν ἤδη δημοσιευθεῖ[12].

Ἡ ὑψηλὴ μαθηματική του παιδεία καθὼς καὶ τὸ μεγάλο ἐνδιαφέρον του γιὰ τὰ προβλήματα τῆς ἐποχῆς του, συμβαδίζουν. Ἡ θεμελίωση τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ ἔντονα ἀπασχολεῖ τὸν μεγάλο γερμανὸ φιλόσοφο. Ἐμεῖς θὰ θέλαμε νὰ μελετήσουμε τὴ σχέση τοῦ Hegel μὲ τὸ ἔργο τοῦ Lagrange, *Θεωρία τῶν Ἀναλυτικῶν Συναρτήσεων*, ἡ ὁποία ἔχει ἐλάχιστα παρουσιαστεῖ στὴ σύγχρονη βιβλιογραφία. Τὸ θέμα αὐτό, κατὰ τὴ γνώμη μας, ἔχει μεγάλη σημασία i) σὲ σχέση μὲ τὴν κατανόηση τῆς φιλοσοφικῆς σκέψης τοῦ Hegel, ii) σὲ σχέση μὲ τὴ βαθειά διείσδυσή του στὸ πρόβλημα θεμελίωσης τῆς ἀνάλυσης, στὸ πρόβλημα τοῦ ἀπείρου.

---

8. Ὅπως π.χ. ἡ θεωρία τῶν ὁρίων τοῦ Jean le Rond d'Alembert, ἢ ἡ θεωρία τῶν ἐξαφανιζομένων ποσοτήτων τοῦ L. Euler.

9. Ἡ περίπτωση τοῦ Bernhard Riemann (1826-1866) καὶ τοῦ Johann Friedrich Herbart (1776-1841) δὲν εἶναι ἡ μοναδική. Ἡ ἐπίδραση τοῦ Herbart στὸν Riemann ἀποτελεῖ ἕνα μεγάλο ἀνοιχτὸ θέμα γιὰ ἔρευνα, καθὼς οἱ φιλοσοφικογεωμετρικὲς ἰδέες τοῦ Riemann στὴν Habilitationvortrag του ἀπηχοῦν τὶς ἰδέες τοῦ Herbart. Πβ. B. RIEMANN, *Ueber die Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen, Abh. der K. Ges. der Wiss. zu Göttingen* 13 (1868) σσ. 133-152 καὶ J.F. HERBART, *Psychologie als Wissenschaft neu gergründet auf Erfahrung, Metaphysik und Mathematik.* Erster, synthetischer Theil. Königsberg 1824, zweter analytischer Teil. Königsberg 1825. Καθὼς καὶ *Allgemeine Metaphysik, nebst den Anfangen der philosophischen Naturlehre.* Erster, synthetischer Theil. Königsberg 1828, zwyeter analytischer Theil. Königsberg 1829.

10. Ὁ L. Brunschvicg, στὸ κλασικὸ βιβλίο του, *Les Étapes de la Philosophie Mathématique*, Paris, 1972², θεωρεῖ πὼς τὸ ἔργο τοῦ Kant, *Versuch den Begriff der negativen Grössen in die Weltweisheit einzführen* (1763), σημαίνει τὴν ὁριστικὴ διακοπὴ τοῦ Kant μὲ τὴ μαθηματικὴ λογικὴ τοῦ Leibniz. L. BRUNSCHVICG, σ. 258.

11. Πβ. Χ. ΦΙΛΗ, *Τὸ μαθηματικὸ ἔργο τοῦ Marx* (ὑπὸ δημοσίευση).

12. C.A. YANOVSKAYA, Ἡ κατηγορία τῆς ποσότητας στὸν Hegel καὶ ἡ οὐσία τῆς μαθηματικῆς, *Ὑπὸ τὴ σημαία τοῦ μαρξισμοῦ*, 1928, N.3, σσ. 30-71 (στὰ ρωσικά). Ὁ νόμος τῆς μοναδικότητας τῶν ἀντιθέτων στὰ μαθηματικά, *Ἐπιστήμη καὶ μαρξισμός*, 1929, N.1, σσ. 17-32 (στὰ ρωσικά).

II. Ἡ θεμελίωση τῆς ἀνάλυσης κατὰ τὸν 18ο αἰώνα καὶ ἡ προσέγγιση τοῦ Lagrange. Στὶς ἀρχὲς τοῦ 18ου αἰώνα ἡ γλῶσσα τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ εἶναι κυρίως ἡ γλῶσσα τῆς γεωμετρίας καὶ τῆς μηχανικῆς, ἐνῶ ὁ ὁρισμὸς τῆς συνάρτησης, ὁ ὁποῖος δὲν εἶναι οὔτε τόσο βαθὺς οὔτε τόσο γενικός, ἐπιτείνει τὴ δυσκολία στὰ πρῶτα βήματα τοῦ καινούριου αὐτοῦ κλάδου. Ἡ φύση τῶν ἀπειροστῶν μικρῶν καὶ κυρίως τῶν ἀπειροστῶν μικρῶν μεγαλύτερης τάξης[13] δὲν ἔχει ἀκόμα διευκρινισθεῖ οὔτε ὡς πρὸς τὴν ἔννοιά της οὔτε ὡς πρὸς τὴ λειτουργία της (ὁ Newton προσεκτικὰ τὰ ἀποφεύγει, ἐνῶ ὁ Leibniz θεωρεῖ τὰ διαφορικὰ σχηματικὰ ἀντικείμενα). Αὐτὴ ἡ καινούρια ἐπιστήμη, ἡ ὁποία ἐπεκτείνεται πέρα ἀπὸ τὸ ἄπειρο, αὐξάνει τὴν ἀβεβαιότητα στοὺς ἐπιστήμονες τῆς ἐποχῆς.

Ὁ Colin Maclaurin (1698-1746), συνεχιστὴς τῆς νευτώνειας θεωρίας τῶν ροῶν, ὅπου τὰ μεγέθη σχηματίζονται ἀπὸ τὴ ροὴ καὶ τὴν κίνηση, προσπαθεῖ νὰ θεμελιώσει τὸν ἀπειροστικὸ λογισμό[14] χωρὶς τὰ ἀπειροστὰ μικρά. Ἡ γεωμετρία, οἱ ἀποδεικτικές της μέθοδοι, καὶ ἡ αὐστηρὴ θεμελίωσή της ἀπὸ τὸν Εὐκλείδη, ἀποτελοῦν γιὰ τόν σκῶτο μαθηματικὸ τὸ ἰδεῶδες πλαίσιο, ἀπὸ τὸ ὁποῖο μπορεῖ νὰ ἐξάγει τὶς πρῶτες ἀρχὲς τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ. Ἀποφεύγει τὰ ἀκατανόητα ἀπειροστὰ μικρὰ «ὡς ἀκατανόητα καὶ ὡς μιὰ αὐθάδη ἀπαίτηση γιὰ μιὰ τόσο ὡραία ἐπιστήμη ὅπως ἡ Γεωμετρία»[15].

Ἡ πραγματεία τοῦ Maclaurin δὲν εἶναι μιὰ ἀπάντηση στὶς ἐπιθέσεις τοῦ Berkeley, ἀλλὰ ἀποτελεῖ ἕνα αὐτόνομο ἔργο, μιὰ πλήρη παρουσίαση τοῦ συστήματος τῶν ροῶν, μὲ γλῶσσα βασιζόμενη στὴ γεωμετρία ἢ στὴ μηχανική, καθὼς στὴ θεωρία τῶν ροῶν δεσπόζει ἡ ἔννοια τῆς ταχύτητας[16]. Μάλιστα στὴν εἰσαγωγὴ τοῦ ἔργου του *Θεωρία τῶν Ἀναλυτικῶν Συναρτήσεων...* ὁ Lagrange ἀναφέρει τὴ δυσκολία τῆς αὐστηρῆς ἀπόδειξης στὴ μέθοδο τῶν ροῶν[17].

Ὁ Leonhard Euler (1707-1783) προικισμένος μὲ ἕνα φορμαλιστικὸ πνεῦμα, θὰ ἀπελευθερώσει τὸν λογισμὸ ἀπὸ τὴ δεσποτεία τῆς γεωμετρίας[18]. Μὲ τὸν Euler ἡ καινούρια θεώρηση τῆς συνάρτησης, ὡς ἀναλυτικῆς ἔκφρασης, γίνεται πρωταρχική. Τὰ ἀπειροστὰ μικρὰ δὲν εἶναι γι' αὐτὸν παρὰ μηδενικά, ἀλλὰ δέχεται ὅτι δύο ποσότητες ποὺ ἡ κάθε μία εἶναι μηδὲν μποροῦν νὰ ἔχουν ἕνα σαφῆ καθορισμένο λόγο, ὁ ὁποῖος στὴν πραγματικότητα ἀποτελεῖ τὸν ἀκρογωνιαῖο λίθο στὸ οἰκοδόμημα τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ[19]. Ἀπὸ αὐτὴ τὴ θεώρηση τοῦ λόγου $(\Delta x)^2 : \Delta x$, γιὰ $\Delta x = \omega$[20], ὁ Euler δὲν

---

13. Μάλιστα ἀπὸ αὐτὰ ξεκίνησε μιὰ μεγάλη ἐπιστημονικὴ διαμάχη στὴν ὁποία πρωτοστάτησε ὁ G. Berkeley μὲ τὸ ἔργο του *The Analyst, or, A discourse addressed to an infidel Mathematician* (1734). Γιὰ περισσότερες λεπτομέρειες πβ. F. Cajori, *A History of the conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain from Newton to Woodhouse,* Chicago and London, 1919.

14. Colin Maclaurin, *A Treatise of Fluxions,* 2 Vols, Edinburgh, 1742.

15. C. Maclaurin *ἐνθ. ἀν.* Vol. I., σ. iv.

16. Ὁ Maclaurin ξεπερνᾶ αὐτὴ τὴ δυσκολία δηλώνοντας πὼς ἡ μεταβλητὴ ταχύτητα εἶναι ἕνα φυσικὸ φαινόμενο.

17. J.L. Lagrange, *Théorie des fonctions analytiques...,* 1ère éd., 1797, art. 5.

18. C.B. Boyer, *The History of the Calculus and its conceptual development.* Dover, New York, 1959, σ. 243.

19. «... methodus determinandi rationem incrementorum evanescentium, quae functiones quaecunque accipiunt, dum quantitati variabili, cuius sunt functiones, incrementum evanenscens tribuitur». L. Euler, Opera Omnia Petropolitanae, *Academiae Imperialis Scientiarum,* 1755, Vol. X, σ. 5.

20. «Interium tamen perspicitur, quo minus illud incrementum accipiatur, propius ad hanc

εἶχε παρὰ νὰ διανύσει ἕνα βῆμα γιὰ νὰ θεμελιώσει τὸν ἀπειροστικὸ λογισμὸ πάνω στὴν ἔννοια τοῦ ὁρίου, ἀφοῦ διατυπώνει πὼς τὸ ὅριο, ὁ ὕστατος λόγος τῶν αὐξήσεων, ἀποτελεῖ τὸ ἀληθὲς ἀντικείμενο τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ[21,22]. Ὅμως παρ' ὅλες τὶς μελέτες τὶς σχετικὲς μὲ τὸν ἀπειροστικὸ λογισμό, οἱ βασικές του ἔννοιες παραμένουν ἀσαφεῖς καὶ ἀδιευκρίνιστες.

Ὁ Jean le Rond d'Alembert (1717-1783) ὁ πρῶτος δημόσιος πολέμιος τῶν ἐννοιῶν τοῦ ἀπείρου καὶ τοῦ ἀπειροστοῦ μικροῦ[23,24] πίστευε πὼς μὲ τὴ θεωρία τῶν ὁρίων μπορεῖ νὰ θεμελιωθεῖ αὐστηρὰ ἡ Ἀνάλυση. Οἱ προσπάθειές του ἀπεικονίζονται σὲ διάφορα ἄρθρα του στὴν *Ἐγκυκλοπαίδεια*[25] τοῦ Diderot, στὴν ὁποία ἦταν ἐπίσης συντάκτης. Ἐπηρεασμένος ἀπὸ τὰ βιβλία τοῦ Newton, *Quadratura Curvarum* (1704) καὶ τοῦ ἀββᾶ de la Chapelle[26], *Institutions de Géométrie* (1746), ἑρμηνεύει ἀπὸ τὸ πρῶτο βιβλίο «τὸν πρῶτο καὶ τὸν ὕστατο λόγο» ὡς ὅρια, ἐνῶ ἀπὸ τὸ δεύτερο, τὸ ὁποῖο ἦταν ἀρκετὰ διαδεδομένο γιὰ τὴν ἐποχή του, μπόρεσε νὰ συνδυάσει προγενέστερες θεωρίες ὁρίων (Stévin[27], Grégoire St. Vincent[28], κ.ἄ.).

Γιὰ τὸν d'Alembert ὅλος ὁ διαφορικὸς λογισμὸς μπορεῖ νὰ συνοψισθεῖ σὲ τρεῖς κανόνες σχετικοὺς μὲ τύπους ποὺ ἀφοροῦν: 1) τὸ ἄθροισμα τῶν διαφορικῶν, 2) τὸ

---

rationem accedi; unde non solum licet, sed etiam naturae rei convenit haec incrementa primum et finita considerate atque etiam in figuris, si quibus opus est ad rem illustrandam, finite repraesentare; deinde vero haec incrementa cogitatione continuo minora fieri concipiantur sicque eorum ratio continuo mogis ad certum quendam limitem appropinquare reperietur, que antem tum attingant, cum plane in nihilum abierint», L. Euler *ἐνθ' ἀν.*, σ. 7.

21. «Hic antem limes, qui quasi rationem ultimum incrementorum illorum constituit, verum est obictum Calculi differentialis», idem.

22. Γιὰ μιὰ ἐμπεριστατωμένη μελέτη Πβ. L. Euler, *Introductio in analysin infinitorum.* Lausanne (1748). *Institutiones calculi differentialis* (1755), Saint Pétersburg. *Institutiones calculi integralis* (1768-1770). Saint Pétersburg. Ἐπίσης Πβ. L.Euler, *Foundations of Differential Calculus* transl. by J.D. Blanton from *The latin Institutiones calculi differentialis* by Leonhard Euler, 1755, New York, Springer, 2000.

23. «La guerre aux concepts d'infini et d'infinimement petit, en soutenant que ce ne sont vraiement que des manières abrégées de s'exprimer, et qui le calcul infinitésimal n'a à faire en réalité qu'à des grandeurs finies». G. Vivanti, Note sur l'histoire de l'infinimement petit. *Bibl. Math. nouv.*-série 8, 1894, σ. 3.

24. Πβ. ἀκόμα «une quantité est quelque chose ou rien; si elle est quelque chose elle n'est pas encore évanouie, si elle n'est rien elle est évanouie tout à fait. C'est une chimère la supposition d'un état moyen entre ces deux-là», *Mélanges de Littérature, d'Histoire, et de Philosophie,* Tom. V., Amsterdam, 1767, σ. 249.

25. *Encyclopédie ou Dictionnaire Raisonné des Sciences, des Arts, et des Métiers.* Paris, Briasson David, Le Breton, Durand, 1754. Πβ. κυρίως τὰ ἄρθρα *Différentiel, Fluxion, Infiniment petit* et *Limite* ποὺ δημοσιεύθηκαν μεταξὺ 1754 καὶ 1765.

26. Abée de la Chapelle (ca. 1710-1792). v. Poggenndorff I. 1338.

27. G. Sarton, Simon Stevin of Bruges (1548-1620) *Isis* XXI 1934 p. 241-303; H. Bosmans, Le calcul infinitésimal chez Simon Stevin, *Mathésis* 37 (1923) pp. 12-18, 55-62, 105-9; Sur quelques exemples de la méthode des limites chez Simon Stevin, *Annales de la Société Scientifique de Bruxelles* 37 (1913) σσ. 171-99.

28. H. Bosmans, Grégoire de Saint Vincent, *Mathésis* 38 (1924) pp. 250-6; J.E. Hofmann, *Das Opus Geometricum des Gregorius a.s. Vincentio und seine Einwirkung auf Leibniz.* Abh. der Preus. Ak. der Wissenschaftern 1941. Math. naturwissen. Kl. 13 Berlin 1941.

γινόμενό τους, 3) τὸν ἐκθέτη[29].

Ἔτσι γιὰ τὸν γάλλο μαθηματικὸ ὁ ὁρισμὸς τῶν ὁρίων εἶναι ἡ πραγματικὴ μεταφυσικὴ τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ. Ἡ θεμελίωση τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ πάνω στὴν ἔννοια τοῦ ὁρίου, σηματοδοτεῖ τὴν μετάβαση τῶν Μαθηματικῶν ἀπὸ τὶς φιλοσοφικὲς θεωρήσεις στὶς αὐστηρὲς διατυπώσεις.

Ο J.L. Lagrange (1736-1813) ὅταν καλεῖται νὰ διδάξει[30] ἀπειροστικὸ λογισμὸ στὴν νεοϊδρυθεῖσα École Polytechnique[31], ἀνατρέχει στὶς παλαιότερες ἐργασίες του σχετικὰ μὲ τὸν λογισμό, ἔχοντας τὴν πεποίθηση πὼς ἡ μοναδικὴ αὐστηρὴ βάση γιὰ τὴ θεμελίωση τῆς ἀνάλυσης εἶναι ἡ ἄλγεβρα.

Μὲ τὴν πρώτη του δημοσίευση[32] ὁ ἡλικίας 18 ἐτῶν Lagrange θεωρεῖ ὅτι μὲ τὴ βοήθεια τῆς δυναμοσειρᾶς ἀνακάλυψε τὴ γέφυρα μεταξὺ ἀνάλυσης καὶ ἄλγεβρας, πεποίθηση τὴν ὁποία διατήρησε σ' ὅλη του τὴ ζωή.

Ἔξι χρόνια ἀργότερα ἐπανέρχεται στὸ θέμα τῆς θεμελίωσης του ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ[33] γιὰ νὰ καταλήξει τὸ 1772 στὴ μελέτη του γιὰ ἕνα καινούριο εἶδος λογισμοῦ σχετικὸ μὲ τὴ διαφόριση καὶ τὴν ὁλοκλήρωση μεταβλητῶν ποσοτήτων[34], μελέτη ἡ ὁποία ἀποτελεῖ τὸν πυρήνα τῆς θεωρίας του.

Ἐρευνώντας τὰ διαφορικὰ καὶ τὰ ὁλοκληρώματα τοῦ γινομένου τάξεως μεγαλύτερης τοῦ 2 μὲ ἄλγεβρα καὶ συνδυαστικὴ καὶ χρησιμοποιώντας τὸ ἀνάπτυγμα συναρτήσεως κατὰ Taylor, ὁδηγεῖται ὅπως ἀποκαλύπτει ἀπὸ τὴν ἀρχή, «νὰ καθιερώσει μερικὲς γενικὲς καὶ προκαταρκτικὲς ἔννοιες γιὰ τὴ φύση τῶν συναρτήσεων μιᾶς ἢ περισσοτέρων μεταβλητῶν, οἱ ὁποῖες μποροῦν νὰ χρησιμεύουν στὴν εἰσαγωγὴ μιᾶς γενικῆς θεωρίας συναρτήσεων»[35] θεώρηση τὴν ὁποία τελικὰ πραγματοποίησε.

«Ἂν u εἶναι μιὰ τυχοῦσα πεπερασμένη συνάρτηση μιας μεταβλητῆς x, ἂν θέσουμε x+ξ στὴ θέση του x... ἡ u θὰ γίνει:

$$u + p\xi + p'\xi^2 + p''\xi + p'''\xi + \ldots^{36}$$

ὅπου p, p', p'', εἶναι καινούριες συναρτήσεις οἱ ὁποῖες κατὰ κάποιο τρόπο παράγονται ἀπὸ τὴ συνάρτηση u».

---

29. Encyclopédie..., article *Calcul différentiel*, p. 520.

30. Πβ. Ch. Phili, *Sur l'enseignement de Lagrange à l'École Polytechnique*, Université de Limoges, *93e Congrès de l'A.F.A.S.*, Limoges 1974, Actes du Congrès σσ. 1-5.

31. Πβ. Ch. Phili, Les débuts de l'enseigmement de l'Analyse à l'Ecole Polytechnique, *Comptes Rendus du 100e Congrès National des Sociétés Savantes*, Paris, Bibliothèque Nationale, 1976, σσ. 87-100.

32. Lagrange à Euler, J.L. Lagrange, *Oeuvres Complètes*, Paris, Gauthier-Villars, 1892 Vol. XIV σσ. 135-138. Πβ. *Lettera di Luigi de la Grange Tournier, Torinese, all'illustrissimo Signor Conte Giulio Carlo da Fagnano, contenente una nuova serie per i differenziali et integrali di qualsivoglia grado, corrispondente alla Newtoniana per la potesta e le radici*, Torino, 1754 (nella Stamperia Reale).

33. J.L. Lagrange, Note sur la métaphysique du Calcul infinitésimal. *Misc. Taur.* t.II 1760-61, σσ. 17-18.

34. J.L. Lagrange, Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différenciation et à l'intégration des quantités variables. *Mém. de l'Académie Royale des Sciences et Belles Lettres de Berlin. classe mathématique*, pp. 182-221; Œuvres Complètes Vol. III, σσ. 439-476.

35. J.L. Lagrange *ἔνθ' ἀν.*, σ. 447.

36. Τὸ ἀνάπτυγμα αὐτὸ εἶναι τελείως αὐθαίρετο.

Μὲ τὴ βοήθεια λοιπὸν τῶν παραγομένων συναρτήσεων[37], δίνει τὸν δικό του ὁρισμὸ γιὰ τὸν διαφορικὸ καὶ ὁλοκληρωτικό λογισμό:

«Ὁ διαφορικὸς λογισμός, θεωρούμενος σὲ ὅλη του τὴ γενικότητα, συνίσταται στὸ νὰ βροῦμε ἄμεσα καὶ μὲ ἁπλὲς εὔκολες μεθόδους, τὶς συναρτήσεις p, p′, p″, ... q, q′, q″ ... r′, r′, r″ οἱ ὁποῖες παράγονται ἀπὸ τὴ συνάρτηση u. Καὶ ὁ ὁλοκληρωτικὸς λογισμὸς συνίσταται στὸ νὰ ἐπανευρίσκουμε τὴ συνάρτηση u μέσω αὐτῶν τῶν τελευταίων συναρτήσεων.

Αὐτὴ ἡ ἔννοια τοῦ διαφορικοῦ καὶ ὁλοκληρωτικοῦ λογισμοῦ μοῦ φαίνεται πὼς εἶναι ἡ πιὸ διαυγὴς καὶ ἡ πιὸ ἁπλὴ ποὺ δόθηκε. Ὅπως βλέπουμε, εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπὸ κάθε μεταφυσικὴ καὶ κάθε θεωρία ἀπειροστῶν μικρῶν ἢ ἐξαφανιζομένων ποσοτήτων»[38].

Μὲ αὐτὸ τὸ σκεπτικὸ ὁ Lagrange θεωρεῖ πὼς μπορεῖ νὰ ἀποδείξει[39] τὸ θεώρημα τοῦ Taylor, καὶ καταλήγει θέτοντας x+ξ στὴ θέση του x νὰ δώσει τὴ μορφὴ τῆς συνάρτησης u «ὅπου οἱ συναρτήσεις u, u′, u″, u‴, u⁗ παράγονται ἡ μία ἀπὸ τὴν ἄλλη μὲ τὸν ἴδιο νόμο, μὲ τέτοιον τρόπο ὥστε νὰ μποροῦμε ἄνετα νὰ τὶς βροῦμε μὲ τὴν ἴδια ἐπαναλαμβανόμενη πράξη»[40].

Ὅταν λοιπὸν τὸ 1794 ὁ Lagrange καλεῖται νὰ διδάξει στὰ δύο ἱδρύματα ποὺ καθιερώνει ἡ γαλλικὴ ἐπανάσταση τὴν École Polytechnique καὶ τὴν École Normale, ὁ μεγάλος ἀλγεβρίστας ἐπανέρχεται στὶς νεανικές του ἰδέες, τὶς ὁποῖες ἀναπτύσσει στὰ δύο μνημειώδη ἔργα του: *Θεωρία τῶν Ἀναλυτικῶν Συναρτήσεων*... (1797) καὶ *Μαθήματα στὸν Λογισμὸ τῶν Συναρτήσεων* (1808).

Μὲ τὸ ἀνάπτυγμα τῆς συνάρτησης ὁ Lagrange εἰσάγει ἕνα ἀποτελεσματικὸ ἐργαλεῖο τὸ ὁποῖο τοῦ ἐπιτρέπει νὰ λαμβάνει τὴν παράγωγο καὶ ἔτσι ὁ διαφορικὸς λογισμὸς μετατρέπεται «στὴν ἀλγεβρικὴ ἀνάλυση πεπερασμένων ποσοτήτων» ὅπως ὑποδεικνύει καὶ ὁ πλήρης τίτλος τοῦ βιβλίου του, *Θεωρία τῶν Ἀναλυτικῶν Συναρτήσεων*[41]. Κατ' αὐτὸν τὸν τρόπο «ἡ δημιουργία καὶ ὁ λογισμὸς τῶν παραγώγων συναρτήσεων μιᾶς δοθείσας συνάρτησης εἶναι γιὰ νὰ ἀκριβολογοῦμε τὸ ἀληθὲς ἀντικείμενο τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ»[42].

Ἡ θέση, μὲ τὴ φιλοσοφικὴ ἔννοια τῆς λέξης, τὴν ὁποία ὑποστηρίζει ὁ Lagrange μὲ τὸ ἀνάπτυγμα ὁποιασδήποτε συνάρτησης σὲ σειρὰ Taylor, τὸν ὁδηγεῖ νὰ ἐξάγει σημαντικὰ συμπεράσματα ὅπως π.χ. τὴν ἔκφραση τοῦ ὑπολοίπου μὲ ὁλοκλήρωμα (ἡ ὁποία φέρει τὸ ὄνομά του). Ὅμως ἂν καὶ ἡ προσπάθεια αὐτὴ τοῦ Lagrange μπορεῖ νὰ θεωρηθεῖ ὡς μιὰ ἀνεπιτυχὴς ἀπόπειρα θεμελίωσης τῆς ἀνάλυσης, ἐν τούτοις θὰ δικαιωθεῖ μέσα ἀπὸ τὸ ἔργο τοῦ Weierstrass, στὴ θεωρία συναρτήσεων μιᾶς μεταβλητῆς καθὼς καὶ στὴ σύγχρονη ἀλγεβρικὴ θεωρία τῶν τυπικῶν σειρῶν (séries formelles).

Πέρα ὅμως ἀπ' ὅλα αὐτὰ ἡ θέση αὐτὴ τοῦ Lagrange ἐπηρέασε ἀρκετοὺς φιλοσό-

---

37. Στὰ γαλλικὰ ὁ Lagrange χρησιμοποιεῖ τὸν ὅρο «fonctions dérivées» ὁ ὁποῖος δὲν ἀναφέρεται στὶς παραγώγους.

38. *Αὐτόθι*, σ. 443.

39. Σ' αὐτὴ τὴ μελέτη του ὁ Lagrange χρησιμοποιεῖ τὶς δυναμοσειρὲς γιὰ νὰ ἀποδείξει τὸ θεώρημα τοῦ Taylor ὅμως δὲν μπορεῖ κανεὶς νὰ διακρίνει μιὰ σαφὴ ἀπόδειξη.

40. *Αὐτόθι*, σσ. 444-445.

41. Théorie des fonctions analytiques, contenant les principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, d'évanouissants, de limites et de fluxions, et réduits à l'analyse algébrique des quantités finies.

42. J.L. Lagrange, *Théorie des fonctions analytiques*, 1ere éd., 1797, σ. 2.

φους[43] καὶ κυρίως τὸν Hegel.

III. Hegel καὶ Lagrange. Ὁ Felix Klein (1849-1925), ὁ ἐπονομαζόμενος Δίας τῶν Μαθηματικῶν, εἶναι ἕνας ἀπὸ τοὺς πρώτους ποὺ τονίζει τὴ μαθηματικὴ συμβολὴ τοῦ Hegel[44].

Ὁ Friedrich Hegel (1770-1831) στὸ γνωστὸ ἔργο του, *Ἐπιστήμη τῆς Λογικῆς*, μελετᾶ τὴ *Θεωρία τῶν Ἀναλυτικῶν Συναρτήσεων* τοῦ Lagrange ὅπου τονίζει τὴν ἀκρίβεια, καὶ τὴν ὁμοιογένεια τῆς μεθόδου του, χωρὶς ὅμως νὰ παραλείψει τοὺς πρωτοπόρους τοῦ λογισμοῦ.

Ἂν καὶ στὴν τελευταία δεκαετία τῆς ζωῆς τοῦ Hegel, ἡ μαθηματικὴ ἀνάλυση ἔχει πιὰ αὐστηρὰ μελετηθεῖ ἀπὸ τοὺς σύγχρονους θεμελιωτές της B. Bolzano[45] (1781-1848) καὶ A.L. Cauchy[46], (1789-1857) καὶ παρόλο ποὺ ὁ Hegel παρακολουθεῖ τὴ σύγχρονη βιβλιογραφία προτιμᾶ τὴν προσέγγιση τοῦ Lagrange ἡ ὁποία εἶναι προγενέστερη. Παράλληλα πιστεύει πὼς μὲ τὴ θεώρηση τοῦ μεγάλου μαθηματικοῦ μπορεῖ νὰ θριαμβεύσει ἡ φιλοσοφία στὰ μαθηματικά. Γιὰ τὸν Hegel, ὁ Lagrange παρουσιάζει ἕνα σημαντικὸ πλεονέκτημα, καθὼς μὲ τὴν ἀλγεβροποίηση τοῦ λογισμοῦ ἀποφεύγει τὶς ἀνακρίβειες τῆς φιλοσοφίας τοῦ ἀπείρου.

Στὶς ἀναζητήσεις τοῦ Hegel πρωταρχικὸ θέμα ἀποτελεῖ τὸ ἄπειρο καὶ ἡ ἐπιστημονική του θεώρηση. Θὰ πρέπει βέβαια νὰ θυμίσουμε πὼς στὸν 18ο αἰώνα παρουσιάζεται ἕνας θεμελιώδης ἐπιστημολογικὸς διαχωρισμός[47], καθὼς ἀπορρίπτεται ἡ φιλοσοφία τοῦ ἀπείρου ταυτόχρονα μὲ τὴν ἐννοιολογικὴ «διαμόρφωση» τοῦ λογισμοῦ τοῦ ἀπείρου.

Στὰ Μαθηματικὰ τὸ ἄπειρο[48] γίνεται ἀντιληπτὸ μόνο στὸν ἀπειροστικὸ λογισμό[49]. Μάλιστα ὁ Hegel σημειώνει πὼς μὲ τὴ θεωρία συναρτήσεων καὶ γενικότερα μὲ τὶς συναρτήσεις τῶν μεταβλητῶν μεγεθῶν ἀγγίζουμε τὸ ἀληθὲς ἄπειρο στὸ ὁποῖο πίστευε ὁ Spinoza[50].

---

43. Εἶναι χαρακτηριστικὸ πὼς στὰ μαθηματικὰ χειρόγραφά του ὁ Marx, τιμᾶ ἰδιαίτερα τὸν Lagrange, θεωρώντας τὴν μέθοδό του ὡς τὴν πιὸ ὁμοιογενὴ καὶ ἀπαλλαγμένη ἀπὸ κάθε εἴδους μεταφυσικῆς. Ἀκόμα ὁ Auguste Comte στὸ κλασικὸ ἔργο του, *Cours de philosophie positive*, Vol. I, Paris, 1830 γιὰ τοὺς ἴδιους λόγους ξεχωρίζει τὴν θεωρία του Lagrange: «(Ὁ Lagrange) μετατρέπει τὴν ὑπερβατικὴ ἀνάλυση... σ' ἕνα σύστημα καθαρὰ ἀλγεβρικό» A. Compte, ἔνθ'. ἀν., σ. 230.

44. Ἴσως οἱ συγγενικοὶ δεσμοὶ οἱ ὁποῖοι ἕνωναν τὸν Klein μὲ τὸν Hegel (ἡ σύζυγος τοῦ Klein ἦταν ἐγγονὴ τοῦ Hegel) συνέβαλαν στὴν ἔρευνα τῶν μαθηματικῶν ἀναζητήσεών του.

45. B. Bolzano, *Beiträge zu einer begründeten Darstellung der Mathematik*, Prague, 1810. Πβ. ἀκόμα I. Sebestik, Le système mathématique de Bernard Bolzano, *Cahiers Fondamenta Scientiae*, Strasbourg, 1981 καὶ I. Grattan-Guinness, Bolzano, Cauchy and the «New Analysis of the Early Nineteenth Century», *Archive for history of Exact Sciences* 6 (1970), σσ. 372-400.

46. A.L. Cauchy, *Cours d'Analyse de l'École Polytechnique*, Paris, 1821. *Résumé des Leçons données à l'École Polytechnique sur le calcul infinitésimal*, Paris, 1823.

47. Οἱ καινούριες ἔννοιες τοῦ λογισμοῦ ἀπαιτοῦν περισσότερη ἔρευνα στὶς πράξεις. Ἔτσι στὴ δεύτερη φάση δημιουργίας τῆς ἀνάλυσης, σταματᾶ σχεδὸν νὰ ἐμφανίζεται ἡ ἀκώλυτη χρήση τοῦ ἀπείρου στὶς μαθηματικὲς πράξεις.

48. Ὁ Hegel διακρίνει καὶ τὸ φιλοσοφικὸ ἄπειρο.

49. Ἡ εἰδοποιὸς διαφορὰ μεταξὺ ἄλγεβρας καὶ ἀνάλυσης εἶναι ὅτι στὴν ἀνάλυση ὑπάρχει ἡ ἔννοια τοῦ ὁρίου.

50. Ὁ Hegel ἀναφέρεται συγκεκριμένα σὲ μία ἐπιστολὴ τοῦ Spinoza (20 Ἀπριλίου 1663) πρὸς τὸν γιατρὸ καὶ φιλόσοφο L. Meyer, πβ. F. Hegel, ἔνθ. ἀν., Vol. I, σ. 275.

Ἡ θεωρία τῶν ροῶν τοῦ Newton, πρώτη ἀπόπειρα μορφοποίησης τοῦ ἀλγορίθμου γιὰ τὸν ἀπειροστικὸ λογισμό, ἀπόπειρα ἡ ὁποία περικλείει τὴν ἔννοια τῆς κίνησης ἐντυπωσίασε τὸν Hegel καθὼς ἡ fluxion γίνεται τὸ γενεσιουργὸ στοιχεῖο. Ὁ Newton θεωρεῖ πὼς τὰ μαθηματικὰ μεγέθη παράγονται ἀπὸ τὴν κίνηση: ἡ εὐθεία γραμμὴ ἀπὸ τὴ συνεχὴ κίνηση σημείων[51], οἱ ἐπιφάνειες ἀπὸ τὴν κίνηση γραμμῶν, τὰ στερεὰ ἀπὸ τὴν κίνηση ἐπιφανειῶν[52].

Ἂν ἡ θεωρία τῶν ροῶν τοῦ Newton ἐντυπωσίασε τὸν μεγάλο γερμανὸ φιλόσοφο, ἡ *Θεωρία τῶν Ἀναλυτικῶν Συναρτήσεων*, αὐτὴ ἡ προσπάθεια ἀλγεβροποίησης τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ ἀπὸ τὸν Lagrange, μὲ ἐργαλεῖο τὴ δυναμοσειρὰ ὅπου ἐμφανίζονται οἱ διαδοχικὲς παράγωγοι[53], κυριολεκτικὰ τὸν συνεπαίρνει. Ὁ Lagrange μᾶς προσφέρει τὴ σχέση ἡ ὁποία ἑνώνει τὴν συνάρτηση f(x) καὶ τὴν παράγωγό της ὡς μιὰ καθαρὰ ἀλγεβρικὴ σχέση.

Ὁ Hegel, ἐρασιτέχνης «μαθηματικός», ἀποφεύγει νὰ θίξει τὰ λάθη καὶ τὰ κενὰ τῆς θεωρίας τοῦ Lagrange, ὅπως ὅτι κάθε συνάρτηση δὲν ἀναπτύσσεται σὲ σειρὰ Taylor ἢ ἡ μὴ ἀποκρυσταλλωμένη διατύπωση τῆς ἔννοιας τῆς συνέχειας καὶ τῆς σύγκλισης. Τὸ κῦρος τῆς θεωρίας τοῦ Lagrange δέχθηκε σοβαρὲς ἐπικρίσεις καὶ κριτικὲς τόσο στὸ ἐξωτερικὸ[54] ὅσο καὶ στὴ Γαλλία[55], μάλιστα θεωροῦμε ὅτι ἀποτελεῖ ἕνα ἀνοιχτὸ θέμα πρὸς ἔρευνα ἡ ἀποσιώπησή τους ἀπὸ τὸν Hegel.

Ἡ εἰσαγωγὴ τοῦ βιβλίου *Θεωρία τῶν Ἀναλυτικῶν Συναρτήσεων*... ὅπου ὁ Lagrange ἐπικρίνει ὅλες τίς πρότερες ἀπόπειρες θεμελίωσης τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ, ἐκτὸς ἀπὸ τὴν προσπάθεια τοῦ John Landen[56,57], (1719-1790), ἡ ὁποία δὲν περιέχει καμμιὰ ἀναφορὰ σὲ ἀπειροστὰ μικρὰ ἢ στὴ θεωρία κίνησης ἀλλὰ χρησιμοποιεῖ μόνο ἀναλυτικὴ μέθοδο[58], ἀποτελεῖ μιὰ σημαντικὴ διαφορὰ γιὰ τὸν Hegel.

Ὁ μεγάλος γερμανὸς φιλόσοφος ὑπογραμμίζει πὼς ὁ Lagrange, χρησιμοποιώντας τὸ ἐργαλεῖο τῶν σειρῶν, ὑπερνικᾶ τὶς δυσκολίες τὶς ὁποῖες περικλείει ἡ χρήση τῶν

---

51. «Lineae describuntur ac describendo generantur non per appositionem partium, sed per motum continuum punctorum...», I. NEWTON, *Tractatus de Quadratura Curvarum*, Londini 1704; Πβ. *Opera Omnia*, Vol. I, Londini, 1779, σ. 237.

52. *Ἔνθ' ἀν.*

53. Ὁ F. Klein ὑπογραμμίζει τὴν θεώρηση τοῦ Hegel σχετικὰ μὲ τὴν παράγωγο, ἡ ὁποία κατὰ τὸν μεγάλο γερμανὸ φιλόσοφο ἀπεικονίζει τὸ «γίγνεσθαι τῶν ποσοτήτων». Πβ. F. KLEIN, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte*, Berlin, 1925. Πβ. ἀκόμα Berlin Springer, 1968, σ. 217.

54. Πβ. τὴ μελέτη τοῦ βερολινέζου BURJA, Sur le développement de fonctions en séries, *Mémoire de l'Académie de Berlin*, 1801, σ. 3-28 ἢ τοῦ πολωνοῦ J. SNIADECKI, *O Jozefie Ludwiku de Lagrange*..., Wilno, 1815.

55. Οἱ ἀναφορὲς του Hoëne-Wronski στὴ Γαλλικὴ Ἀκαδημία Ἐπιστημῶν ἐνάντια στὴ θεωρία τοῦ Lagrange ἀποτέλεσαν σκάνδαλο γιὰ τὴν ἐποχή του. Πβ. HOENE-WRONSKI, *Réfutation de la théorie des fonctions analytiques de Lagrange*, Paris 1812. Πβ. ἐπίσης Ch. PHILI, La loi suprême de Hoëne-Wronski: la rencontre de la philosophie et des mathématiques, *Paradigms and Mathematics*, eds. E. Ausejoy M. Horigón, Madrid, 1996, σσ. 289-308.

56. *The Residual Analysis*, London, 1764 τῆς ὁποίας ἡ ὁμοιογένεια προκάλεσε καὶ τὴν προσοχὴ τοῦ Marx στὶς μαθηματικές του ἀναζητήσεις.

57. Πβ. Ch. PHILI, John Landen: First attempt for the algebrisation of infinitesimal calculus, *Proceedings of the International Conference Contemporary Trends in the Historiography of Science*, Kluwer, 1994, σσ. 279-293.

58. J.L. LAGRANGE, *Théorie des fonctions analytiques*..., Paris, 1797, σ. 4.

ἀπειροστῶν μικρῶν καὶ ἡ μέθοδος τῶν πρώτων καὶ ὕστερων λόγων. «Ἀπὸ τὸν λογισμὸ τῶν συναρτήσεων τοῦ ὁποίου ἡ ἀκρίβεια, ἡ ἀφαίρεση καὶ ἡ γενικότητα ἔχουν γίνει ἀρκετὰ ἀποδεκτές, θὰ ποῦμε μόνο ἐδῶ ὅτι στηρίζεται στὴ βασικὴ πρόταση ἀπὸ τὴν ὁποία μπορεῖ ἡ διαφορὰ ποὺ δὲν εἶναι μηδενική, νὰ θεωρηθεῖ ὡς τόσο μικρὴ ὥστε κάθε ὅρος τῆς σειρᾶς νὰ ὑπερβαίνει σὲ μέγεθος τὸ ἄθροισμα ὅλων τῶν ὅρων ποὺ ἀκολουθοῦν»[59].

Τὸ θεώρημα αὐτὸ τοῦ Lagrange, στὸ ὁποῖο ἀναφέρεται ὁ Hegel, ἀποτελεῖ γιὰ τὸ γάλλο μαθηματικὸ μιὰ ἀπὸ τὶς θεμελιώδεις ἀρχὲς τῆς θεωρίας του[60,61]. Ἔχοντας πιὰ τὸ ἀνάπτυγμα κατὰ Taylor[62] ὡς βασικὸ ἐργαλεῖο καὶ μὲ τὴν ἀλγεβρικὴ χρήση πεπερασμένων ποσοτήτων, προχωρεῖ στὴν παρουσίαση τῆς θεωρίας του. Ἡ ἀρχὴ αὐτὴ θὰ τοῦ χρησιμεύσει ἐπίσης ὡς βάση γιὰ τὶς ἐφαρμογὲς στὴ γεωμετρία καὶ στὴ μηχανική, προσδίδοντας ἔτσι ὁμοιογένεια στὴ θεωρία του καὶ ὁριστικὴ ἀπομάκρυνση τῆς μεταφυσικῆς τῶν ἀπειροστῶν μικρῶν.

Μάλιστα ὁ Hegel περιορίζει ὁλόκληρη τὴ μεθοδολογία τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ στὴν πρόταση $dx^n = nx^{n-1}dx$ ἢ $\frac{f(x+i) - fx}{i} = p$ [63,64], αὐτὸν τὸν τελευταῖο τύπο ἀπαλλαγμένο ἀπὸ ὁποιαδήποτε μεταφυσική, ἐλεύθερο ἀπὸ κάθε ἔννοια ὁρίου ὁ Lagrange λαβαίνει τὴν παράγωγο τῆς συνάρτησης f(x), ὅπου p εἶναι μιὰ καινούρια συνάρτηση του x καὶ τοῦ i. Δηλαδὴ ἡ παράγωγος «ἰσοῦται, συνεχίζει ὁ Hegel, μὲ τὸν συντελεστὴ τοῦ πρώτου ὅρου» τοῦ ἀναπτύγματος κατὰ Taylor «...δὲ μας ὑπολείπεται τίποτα πιὰ νὰ μάθουμε: ἡ ἐξαγωγὴ τῶν ἑπομένων μορφῶν, τοῦ διαφορικοῦ ἑνὸς γινομένου, ἑνὸς ἐκθέτη κ.ἄ. γίνεται ἀπὸ ἐδῶ καὶ πέρα μηχανικά. Σὲ πολὺ λίγο χρόνο, ἴσως σὲ μισὴ ὥρα ἔχουμε ἐξοικειωθεῖ μὲ αὐτὴ τὴ θεωρία: ὅταν ἔχουμε τὰ διαφορικά, ξεκινώντας ἀπὸ αὐτά, τίποτε δὲν εἶναι πιὸ εὔκολο ἀπὸ τὸ νὰ βροῦμε τὴν ἀρχικὴ συνάρτηση... ἐκεῖνο ποὺ παίρνει πιὸ πολὺ χρόνο, εἶναι νὰ κατανοήσουμε... ὅτι ἀφότου τόσο εὔκολα ἐπιτύχαμε τὸ πρῶτο μέρος τοῦ στόχου, ὁ ὁποῖος εἶναι ἡ εὕρεση τοῦ *συντελεστὴ* μὲ ἀναλυτικὴ μέθοδο, δηλαδὴ καθαρὰ ἀριθμητικά, ἀπὸ τὸ ἀνάπτυγμα τῆς συνάρτησης μεταβλητῶν μεγεθῶν...»[65]. Μάλιστα ὁ Hegel συνεχίζοντας περιορίζεται στὴν εὕρεση τοῦ πρώτου ὅρου καθὼς φαίνεται νὰ μὴν τὸν ἐνδιαφέρουν οἱ ὑπόλοιποι ὅροι[66], δεύτερη, τρίτη παράγωγος κ.ο.κ., κάτι ποὺ ὁ Lagrange διόλου δὲν παραλείπει.

Κατὰ τὸν Hegel, «ἡ ἐξέλιξη τοῦ διαφορικοῦ λογισμοῦ ἀποδεικνύει πὼς οἱ διάφορες μέθοδοι ξεκίνησαν μὲ τεχνάσματα: ὁ τρόπος ποὺ προχώρησαν, ἀφοῦ ἤδη ἐπεκτάθηκαν σὲ ἄλλα ἀντικείμενα, τοὺς ὁδήγησε ἀργότερα σὲ ἀφηρημένους τύπους, τοὺς ὁποίους προσπάθησαν νὰ ἀναγάγουν σὲ *ἀρχές* (principia)»[67]. Φανερὰ λοιπὸν ὁ μεγάλος γερμανὸς φιλόσοφος προτείνει τὴν μεθοδολογία τοῦ Lagrange, ἡ ὁποία

---

59. G.W.F. HEGEL, *ἐνθ. ἀν.*, σ. 294 (μτφρ. Χ.Φ.).
60. J.L. LAGRANGE, *ἐνθ. ἀν.*, σ. 12.
61. Ἀργότερα ὁ A.L. Cauchy βασιζόμενος σ' αὐτὸ τὸ θεώρημα θὰ παρουσιάσει μιὰ σημαντικὴ παρατήρηση. A.L. CAUCHY, *Cours d'Analyse*, Paris, 1821, σ. 139.
62. B. TAYLOR, *Methodus Incrementorum directa et inversa*, Londini, 1715, prop. VII Theor. III, σ. 21.
63. G.W.F. HEGEL, *ἔνθ'ἀν.*, σημ. III., σ. 304.
64. Πβ. J.L. LAGRANGE, *ἔνθ'ἀν.*, σ. 8.
65. *Ἔνθ'ἀν.*, σσ. 304-305.
66. *Ἔνθ'ἀν.*
67. *Ἔνθ'ἀν.*

ἐκτὸς τῶν ἄλλων, μὲ τὴ λιτότητα ποὺ τὴν χαρακτηρίζει προσέφερε μιὰ φαινομενικὰ αὐστηρὴ θεμελίωση, ἐνῶ οἱ βασικὲς ἀρχὲς της αὐτοεπιβεβαιώνονται μὲ τὴν ἀποτελεσματικότητά τους.

Στὴν παράδοση τῶν μεγάλων μαθηματικῶν και φιλοσόφων (Πλάτων, Newton, Leibniz κ.ἄ.), ὁ Lagrange ἀποτελεῖ σ' αὐτὴν τὴν σειρὰ τῶν διττῶν μορφῶν μιὰ ἀσυνέχεια, καθὼς ἡ φιλοσοφία δὲν συμπεριλαμβανόταν στὰ ἐρευνητικὰ του ἐνδιαφέροντα. Στὸ σύνολο τοῦ ἔργου του μιὰ καὶ μόνη ἐργασία του ἅπτεται τῆς φιλοσοφίας, ἡ ἀπάντησή του, στὸ ἄρθρο τοῦ Hyacinth Sigismund Gerdil (1718-1802) *Περὶ τοῦ ἀπολύτου ἀπείρου θεωρουμένου στὸ μέγεθός του*[68]. Ἡ σύντομη ἀλλὰ τόσο ἐνδιαφέρουσα[69,70], ἀπάντησή του ἀφορᾶ στὴν μεταφυσικὴ τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ, ἡ θεμελίωση τοῦ ὁποίου ἔντονα τὸν ἀπασχολοῦσε ἤδη ἀπὸ τὰ νεανικὰ του χρόνια.

Ἡ ἀλγεβροποίηση τῆς ἀνάλυσης ἀπὸ τὸν Lagrange, ἀποτελεῖ γιὰ τὸν Hegel τὸ βασικὸ ἐπιχείρημά του γιὰ νὰ κυριαρχήσει καὶ πάλι ἡ φιλοσοφία στὰ Μαθηματικά. Καθὼς ὅλο τὸ οἰκοδόμημα του βασίζεται στὸ ἀνάπτυγμα μιᾶς συνάρτησης σὲ σειρὰ Taylor, ἀπαλλάσσει τὴ θεωρία του ἀπὸ κάθε μεταφυσική[71] καὶ κάθε ἀνακρίβεια σχετικὴ μὲ τὴ φιλοσοφία τοῦ ἀπείρου.

Βέβαια ὁ Hegel δὲν εἶναι μαθηματικὸς καὶ δὲν μπορεῖ νὰ διακρίνει τὰ κενὰ ποὺ περιέχει ἡ θεωρία τοῦ Lagrange καὶ μάλιστα ἀποδίδει τὴν «αὐστηρὴ» θεμελίωση τοῦ λογισμοῦ ἀπὸ τὸν μεγάλο μαθηματικό, στὴν ἀπουσία ἐννοιολογικῆς παρουσίας τοῦ ἀπείρου, ποὺ κρατεῖ ἀποκλειστικὰ γιὰ τὴ φιλοσοφία.

Γιὰ τὸν γερμανὸ φιλόσοφο ὁ ἀπειροστικός λογισμός σταματᾶ στὸν Lagrange, οἱ σύγχρονοι του αὐστηροὶ θεμελιωτὲς Bolzano καὶ Cauchy δὲν τὸν ἀπασχολοῦν. Μετὰ τὸν Lagrange ὅμως παύουν νὰ ἀπασχολοῦν τοὺς μαθηματικοὺς οἱ ἔρευνες γιὰ τὴν ἔννοια τοῦ ἀπείρου, καθὼς τὰ ἐνδιαφέροντά τους μετατοπίζονται στὴν ἔρευνα τοῦ ὁρίου, τῆς συνέχειας, τῆς σύγκλισης, ἔννοιες οἱ ὁποῖες διαμόρφωσαν τὴ σύγχρονη μαθηματικὴ ἀνάλυση.

Ἡ αὐστηρὴ θεώρηση τοῦ ὁρίου θὰ γίνει ὁ ἀκρογωνιαῖος λίθος γιὰ τὴν ἀναδιοργάνωση τῆς ἀνάλυσης μὲ τοὺς Bolzano[72], Cauchy[73], καὶ Weierstrass[74] στὸν 19ο αἰώνα. Ἀργότερα οἱ ἔρευνες τῶν K. Weierstrass καὶ R. Dedekind θὰ ὁδηγήσουν στὴν ἀριθ-

---

68. *Misc. Taur.*, 1760-61, t. III, σσ. 1-45.

69. G. Gantor, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, Band IV, Leipzig, 1908, σ. 644.

70. J.L. Lagrange, *Note sur la métaphysique du calcul infinitésimal. Misc. Taur.* V. II., 1760-61, σσ. 17-18. Πβ. ἐπίσης *Œuvres*, tom. VII., Paris, 1877, σσ. 597-599.

71. Καὶ ἄλλοι γερμανοὶ ὑπογραμμίζουν τὴν ἔλλειψη μεταφυσικῆς στὸν Lagrange, πβ. H. Cohen, *Das Prinzip der Infinitesimalmethode und seine Geschichte*, Berlin, 1883, σ. 96 et passim; πβ. ἐπίσης M. Simon, Zur Geschichte und Philosophie der Differentialrechnung, *Abh. zur Geschichte der Mathematik*, 1898, Heft VIII, σ. 130.

72. B. Bolzano, *Rein analytischer Beweis des Lehrsatzes, dass zwischen je zwey Werthen, die ein entgegengesetztes Resultat gewähren wenigstens eine reelle Wurzel der Gleihung liege*, Prague, Gottlieb Haase, 1817. Πβ. ἐπίσης B. Bolzano, *Beiträge zu einer bergündeten Darstellung der Mathematik*, Prague, 1810.

73. A.L. Cauchy, *Cours d'Analyse de l'École Royale Polytechnique*, Paris 1821. Πβ. ἐπίσης *Résumé des leçons données à l'École Royale Polytechnique sur le calcul infinitésimal*, Paris, 1823.

74. K. Weierstrass, *Zur Theorie der Potenzreihen, Math. Werke* I., Berlin, 1894, σσ. 67-74. Πβ. ἐπίσης Ueber continuirliche Functionen eines reellen Argumentents, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen, *Math. Werke*, Bd. II, σσ. 71-74.

μητικοποίηση τῆς ἀνάλυσης, τὴν ἐξαγωγὴ τῶν θεωρημάτων τῆς ἀνάλυσης ἀπὸ τὰ βασικὰ ἀξιώματα τῶν ἀκεραίων ἀριθμῶν καὶ ἔπειτα ἀπὸ τὶς ἀρχὲς τῆς συνολοθεωρίας. Ἔτσι πιὰ γιὰ τὴν ἀνάλυση ἀποδείχθηκε ὅτι«δὲν χρειάζεται τίποτα ἄλλο παρὰ τοὺς ἀκέραιους ἀριθμοὺς ἢ πεπερασμένα ἢ ἄπειρα συστήματά τους[75-76]». Ἡ κλασικὴ ἀνάλυση λοιπὸν κατέληξε στὴ πυθαγόρεια θεώρηση τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ[77] «οὐ γὰρ οἷόν τε οὐδὲν οὔτε νοηθῆμεν οὔτε γνωσθῆμεν ἄνευ τούτου»[78].

Χ.Π. Φιλη
(Ἀθῆναι)

---

75. H. Poincaré, *The Foundations of Science*, transl. by B. Halsted, New York, 1913, σσ. 380, 441 κ. ἑξ.

76. C. Boyer, *ἔνθ. ἀν.*, σ. 298.

77. *Ἔνθ᾽ἀν.*

78. H. Diels, *Die Fragmente der Vorsokratiker*, 1er Vol., 2e éd., Berlin, 1906, σ. 240.