ΑΝΑΚΟΙΝΩΣΕΙΣ

ΣΤΟΙΧΕΙΑ ΘΕΩΡΙΑΣ ΔΙΑΣΤΑΣΗΣ ΣΤΗΝ ΑΡΧΑΙΟΕΛΛΗΝΙΚΗ ΦΙΛΟΣΟΦΙΑ ΚΑΙ ΣΤΑ ΑΡΧΑΙΟΕΛΛΗΝΙΚΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Ι. Εἰσαγωγή. Καθὼς ἡ ἀρχαιοελληνικὴ κληρονομιὰ παραμένει ἡ κυριότερη πηγὴ γιὰ τὶς σύγχρονες θεωρίες, θὰ προσπαθήσουμε νὰ ἀνιχνεύσουμε σὲ ἀρχαιοελληνικὰ κείμενα, τὶς ρίζες μιᾶς σημερινῆς μαθηματικῆς θεωρίας, τῆς θεωρίας τῆς διάστασης. Βέβαια, οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες δὲν ἦταν σὲ θέση νὰ διατυπώσουν μιὰ τέτοια θεωρία, ἀλλὰ σὲ ἀρκετὰ ἀποσπάσματα διαφαίνονται οἱ ἀπόψεις τους ὅταν ἀναφύονται ἐρωτήματα ἢ προβλήματα σχετικὰ μὲ τὴ διάσταση.

ΙΙ. Ἐν ἀρχῇ ἦν...οἱ Πυθαγόρειοι. Ἡ μαθηματικοῦ τύπου φιλοσοφία τῶν Πυθαγορείων, βασιζόταν στὴν ἔννοια τοῦ ἀκεραίου ἀριθμοῦ[1], ἐνῶ ἡ κοσμολογία[2] τους ἦταν οὐσιαστικὰ μιὰ «θεωρία ἀριθμῶν» καθὼς γνώση καὶ ἀριθμὸς εἶναι ἔννοιες ἄρρηκτα συνδεδεμένες μεταξύ τους[3].

Ὁ Σπεύσιππος, διάδοχος τῆς Ἀκαδημίας καὶ στενὸς συγγενὴς τοῦ Πλάτωνος, φαίνεται ὅτι μελέτησε τὶς πυθαγόρειες θεωρίες, ὅπως καὶ τὰ συγγράμματα τοῦ Φιλολάου καὶ μάλιστα συνέταξε τὴν πραγματεία *Περὶ Πυθαγορικῶν ἀριθμῶν*[4].

«τὸ μὲν α΄ στιγμή, τὸ δὲ β΄ γραμμή, τὸ δὲ γ΄ τρίγωνον, τὸ δὲ δ΄ πυραμίς· ταῦτα δὲ πάντα ἐστὶ πρῶτα καὶ ἀρχαὶ τῶν καθ' ἕκαστον ὁμογενῶν. καὶ ἀναλογιῶν δὲ πρώτη αὕτη ἐστὶν ἡ ἐν αὐτοῖς ὀφθεῖσα, ἡ τὸ ἴσον μὲν ὑπερέχουσα, τέλος δὲ ἔχουσα ἐν τοῖς δέκα. ἐν τε ἐπιπέδοις καὶ στερεοῖς πρῶτα ἐστι ταῦτα· στιγμή, γραμμή, τρίγωνον, πυραμίς»[5]... «τὰ αὐτὰ δὲ καὶ ἐν τῇ γενέσει· πρώτη μὲν εἰς μέγεθος στιγμή, δευτέρα γραμμή, τρίτη ἐπιφάνεια, τέταρτον στερεόν»[6]. Τὸ σημεῖο, ἡ εὐθεία, τὸ τρίγωνο, τὸ τετράεδρο ἀντιστοιχοῦν στοὺς ἀριθμοὺς 1, 2, 3, 4, ἔτσι τὰ γεωμετρικὰ σχήματα περιγράφονται μὲ ἐλάχιστο ἀριθμὸ ἀνεξάρτητων σημείων: τὸ ἕνα ἢ ἡ μονάδα γιὰ τὸ σημεῖο, τὸ δύο γιὰ τὴν εὐθεία, τὸ τρία γιὰ τὸ τρίγωνο καὶ τὸ τέσσερα γιὰ τετράεδρο.

---

1. Αριστοτελους, *Μετὰ τὰ Φυσικά*, «Φαίνονται δὴ καὶ οὗτοι τὸν ἀριθμὸν νομίζοντες ἀρχὴν εἶναι καὶ ὡς ὕλην τοῖς οὖσι καὶ ὡς πάθη τε καὶ ἕξεις». Ι 5 986 a 15.

2. «τὸν γὰρ ὅλον οὐρανὸν κατασκευάζουσιν ἐξ ἀριθμῶν» *ἔνθ. ἀν.* 1080 b 16.

3. H. Diels, *Die Fragmente der Vorsokratiker* «Καὶ πάντα γα μὰν τὰ γιγνωσκόμενα ἀριθμὸν ἔχοντι. οὐ γὰρ οἷον τε οὐδὲν οὔτε νοηθῶμεν οὔτε γνωσθῶμεν ἄνευ τούτου». 1st Band 2e Aufl. Berlin 1906 p. 240.

4. Ιαμβλιχου, Θεολογούμενα Ἀριθμητικά, «Σπεύσιππος, ὁ Πωτώνης μὲν υἱὸς τῆς τοῦ Πλάτωνος ἀδελφῆς, διάδοχος δὲ Ἀκαδημείας παρὰ Ξενοκράτους ἐκ τῶν ἐξαιρέτως σπουδασθεισῶν ἀεὶ Πυθαγορικῶν ἀκροάσεων, μάλιστα δὲ τῶν Φιλολάου συγγραμμάτων, βιβλίδιόν τι συντάξας γλαφυρὸν ἐπέγραψε μὲν αὐτὸ περὶ Πυθαγορικῶν ἀριθμῶν». 61, 8, (Ast).

5. Του Αυτου, 40-46.

6. Του Αυτου, 69-71.

Μὲ αὐτὴ τὴν ἀκολουθία «παραγώγισης» ἀναγνωρίζει τὴ στιγμὴ ὡς ἀδιαίρετο μέγεθος καὶ «μοναδιαῖο», τὸν ἀριθμὸ 2 τὸν «ἐξισώνει» μὲ τὴ γραμμή, τὸν ἀριθμὸ 3 μὲ τὸ τρίγωνο, τὸ ἁπλούστερο ἀπὸ τὰ ἐπίπεδα σχήματα, καὶ τὸν ἀριθμὸ 4 μὲ τὸ τετράεδρο (τὴν πυραμίδα), τὸ ἁπλούστερο στερεό. Αὐτὴ ἡ ἀκολουθία διαδοχῆς, πιθανῶς νὰ δημιουργήθηκε ἀρχικὰ ἀπὸ μία ἁπλῆ συλλογιστική, ἡ ὁποία ἔπαιξε σημαντικὸ ρόλο στὴ κοσμογονία τῶν Πυθαγορείων, ἀλλὰ ἀργότερα φαίνεται ὅτι αὐτὴ ἡ συλλογιστικὴ ἐμπλουτίστηκε μὲ τὴν ἔννοια τῆς ροῆς[7], ἔννοια ἡ ὁποία ἔδωσε μιά πιὸ ἐκλεπτυσμένη ἑρμηνεία γένεσης στίς ἀνεξάρτητες ὀντότητες, σημεῖο, εὐθεία, ἐπίπεδο, θεωρούμενες ὡς *φύσεις*.

Μάλιστα ὁ Σταγειρίτης σημειώνει πὼς «(οἱ Πυθαγόρειοι) κατὰ μέντοι τὸ ποιεῖν ἐξ ἀριθμῶν τὰ φυσικὰ σώματα, ἐκ μὴ ἐχόντων βάρος μηδὲ κουφότητα ἔχοντα κουφότητα καὶ βάρος, ἐοίκασι περὶ ἄλλου οὐρανοῦ λέγειν καὶ σωμάτων ἀλλ᾽ οὐ τῶν αἰσθητῶν»[8]. Δηλαδὴ ὁ ἀριθμὸς εἶναι γιὰ τοὺς Πυθαγορείους *res extensa* ποὺ ὁδηγεῖ σὲ αἰσθητὰ ἀντικείμενα, στὰ ὁποῖα ὑπεισέρχεται ἡ ἔννοια τῆς διάστασης:

«δοκεῖ δε τισι τὰ τοῦ σώματος πέρατα, οἷον ἐπιφάνεια καὶ γραμμὴ καὶ στιγμὴ καὶ μονάς, εἶναι οὐσίαι καὶ μᾶλλον ἢ τὸ σῶμα καὶ τὸ στερεόν»[9].

«Εἰσὶ δὲ τινες οἱ ἐκ τοῦ πέρατα εἶναι καὶ ἔσχατα τὴν στιγμὴν μὲν γραμμῆς, ταύτην δ᾽ἐπιπέδου, τοῦτο δὲ τοῦ στερεοῦ, οἴονται εἶναι ἀνάγκης τοιαύτας φύσεις εἶναι»[10].

Παράλληλα ὅμως μὲ τὴν ἔννοια τῆς διάστασης, ὁ Ἀριστοτέλης ἀναφέρει γιὰ τοὺς Πυθαγορείους τὴν ἀκολουθία σημεῖο – εὐθεῖα – ἐπιφάνεια – στερεό, καθὼς καὶ τὴν ἔννοια τοῦ ὁρίου ὡς πέρατος, τὴν ὁποίαν ἀργότερα θὰ χρησιμοποιήσει ὁ Πλάτων στὸν ὁρισμὸ τοῦ γεωμετρικοῦ σχήματος στὸν Μένωνα: «Κατὰ γὰρ παντὸς σχήματος τοῦτο λέγω, εἰς ὃ τὸ στερεὸν περαίνει, τοῦτ᾽ εἶναι σχῆμα. ὅπερ ἂν συλλαβὼν εἴποιμι στερεοῦ πέρας σχῆμα εἶναι»[11].

Στὴν ἀκολουθία γένεσης[12] λοιπὸν προστίθεται ὅτι τὰ στοιχεῖα της, σημεῖο – εὐθεία – ἐπιφάνεια – στερεό, εἶναι οὐσίες γιατὶ εἶναι πέρατα, ὅρια. Ξεκινώντας ἀπὸ τὸ ὅτι ἡ στιγμή (σημεῖο) εἶναι οὐσία γιατὶ εἶναι πέρας, ἡ εὐθεῖα θεωρεῖται ὅτι ἐκτείνεται μεταξὺ δύο περάτων ἢ ἄκρων, ὁρισμὸ τὸν ὁποῖον διατηρεῖ ὁ Εὐκλείδης: «Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα»[13]. Ἔτσι ἡ θεωρία αὐτὴ τῆς «παραγώγισης» καὶ ἡ θεώρηση τοῦ πέρατος, ὡς ὁρίου, θὰ ἐνταχθοῦν στὴ μεταγενέστερη ἀνάπτυξη τῆς γεωμετρίας.

III. Ἀπὸ τὴν στιγμὴ στὸ σημεῖον. Ὅπως ἀναφέρει ὁ Ἀριστοτέλης, ὁ Πλάτων δὲν ἔδωσε χωρὶς περίσκεψη τὸν ὁρισμὸ τοῦ σημείου. Ὁ ὁρισμὸς τῶν Πυθαγορείων γιὰ τὴ μονάδα, ὡς «στιγμὴ ἄθετος» καὶ τὸ σημεῖο ὡς «μονὰς θέσιν ἔχουσα»[14], δὲν τὸν ἱκανοποιεῖ. Τὸ ὁρίζει «ὡς ἀρχὴ γραμμῆς ταυτίζοντας συχνὰ αὐτὴ τὴν ἔννοια μὲ τὴν ἔννοια τῆς ἀδιαιρέτου γραμμῆς»[15].

«τούτῳ μὲν οὖν τῷ γένει καὶ διεμάχετο Πλάτων ὡς ὄντι γεωμετρικῷ δόγματι, ἀλλ᾽ ἐκά-

---

7. Πβ. Ch. Phili, Has flux's concept ancient roots? An attempt at an approach, *Galileo*, 2002, http//galileo.fcien.edu.uy p. 1-12.

8. Αριστοτελους, *Μετὰ τὰ Φυσικά*, N 1090 a 32.

9. Του Αυτου, Z 1028 b 16.

10. Του Αυτου, N 1090 b 5.

11. Πλατωνος, *Μένων*, 76 A.

12. Πβ. Αριστ., *Περὶ Ψυχῆς* A[4] 409 a 4: «ἔτι δ᾽ ἐπεί φασι κινηθεῖσαν γραμμὴν ἐπίπεδον ποιεῖν, στιγμὴν δὲ γραμμήν, καὶ αἱ τῶν μονάδων κινήσεις γραμμαὶ ἔσονται· ἡ γὰρ στιγμὴ μονάς ἐστι θέσιν ἔχουσα».

13. Ευκλειδου, *Στοιχεῖα*, Βιβλίο I, ὅρος γ΄.

14. Αριστ., *Μ.τ.Φ.*, M8 1084 b 25. *Περὶ ψυχῆς* i 4 409 a 6. Πρoκλου, *Ὑπόμνημα ὡς τὸ πρῶτον τῶν Εὐκλείδου Στοιχείων*, 95, 21.

15. Ch. Mugler, *Platon et la Recherche mathématique de son époque*, Strasbourg, 1948, σ. 19.

λει ἀρχὴν γραμμῆς, τοῦτο δὲ πολλάκις ἐτίθει τὰς ἀτόμους γραμμάς»[16,17].

Εἶναι ἀποδεκτὸ πὼς οἱ δυσκολίες αὐτῆς τῆς ταύτισης εἶναι μία ἀπὸ τὶς αἰτίες οἱ ὁποῖες ἐπηρέασαν τὸν Πλάτωνα, ὥστε νὰ μὴν δημιουργήσει[18] ἕναν γενικὸ ὅρο γιὰ τὸν προσδιορισμὸ τῆς ἔννοιας τοῦ σημείου.

Θυμίζουμε πάντως ὅτι, πρὶν ἀπὸ τὸν Πλάτωνα καὶ μέχρι τὸν Ἀριστοτέλη, τὸ σημεῖο ὀνομαζόταν στιγμή[19], χωρὶς αὐτὸ νὰ ἐμποδίζει τοὺς μεταγενέστερους νὰ χρησιμοποιοῦν τὴ λέξη στιγμή, ὅταν ἀναφέρονται οἱ παλαιότερες γεωμετρικὲς ἔννοιες[20], ὅπως ὁ Σιμπλίκιος, ὅταν ἀναφέρεται στὸν Ζήνωνα τὸν Ἐλεάτη «τὴν δὲ στιγμὴν μηδὲ ἓν τιθέναι»[21].

Ὅμως ὁ Πλάτων[22], ὁ ὁποῖος στὴν Πολιτεία διακηρύσσει ὅτι τὸ πραγματικὸ ἀντικείμενο τῆς σκέψης τῶν γεωμετρῶν δὲν εἶναι πιὰ τὰ ἴδια τὰ σχήματα ἀλλὰ ἐκεῖνα τῶν ὁποίων τὰ σχήματα εἶναι εἰκόνες[23], δὲν θὰ μποροῦσε νὰ χρησιμοποιεῖ τὴ λέξη στιγμή, ποὺ ἀπορρέει ἀπὸ τὸ ρῆμα στίζειν καὶ φανερὰ παραπέμπει σὲ κατασκευαστικὲς τεχνικές[24].

Πάντως ὁ Ἀριστοτέλης ἐξακολουθεῖ νὰ χρησιμοποιεῖ τόσο τὴ λέξη σημεῖον ὅσο καὶ τὴ λέξη στιγμή:

«οἷον μονάδας ἡ ἀριθμητική, ἡ δὲ γεωμετρία σημεῖα καὶ γραμμάς»[25].

«οἷον καθ' αὑτὴν τῇ γραμμῇ ὑπάρχει στιγμὴ καὶ τὸ εὐθύ»[26], «καὶ ἐν πάσῃ γραμμῇ στιγμή»[27].

Μετὰ τὸν Ἀριστοτέλη, ἡ λέξη στιγμὴ παραχωρεῖ τὴ θέση της[28] στὴ λέξη σημεῖον. Ὁ Αὐτόλυκος ὁ Πιτανεύς, τοῦ ὁποίου γνήσιες πραγματεῖες προγενέστερες τοῦ Εὐκλείδου ἔχουν διασωθεῖ ἀκέραιες[29], χρησιμοποιεῖ τὴ λέξη σημεῖον.

«Ἐάν ... φερόμενον τι σημεῖον ὁμαλῶς δύο γραμμάς διεξέλθῃ»[30].

«Εἰλήφθω γάρ τι σημεῖον ἐπὶ τῆς ἐπιφανείας τῆς σφαίρας, τὸ Γ...»[31].

Ὁ Εὐκλείδης, μὲ τὴ λέξη σημεῖον ἐγκαινιάζει πανηγυρικὰ τὰ *Στοιχεῖα*, δίδοντας μάλιστα καὶ τὸν πρῶτο ὁρισμό του:

---

16. Αριστ., *Μ.τ.Φ.*, 992 a 20.
17. Πβ., Χ.Π. Φιλη, Ἀρχαιοελληνικὴ φιλοσοφία καὶ τὰ ἀδιαίρετα τοῦ Cavalieri, *Φιλοσοφία*, Κέντρο Ἐρεύνης Ἀρχαίας Ἑλληνικῆς Φιλοσοφίας, Ἀθήνα 2002, σσ. 197-205.
18. Ch. Mugler, *ἔνθ' ἀν.*
19. Πβ. Αριστ., *ἔνθ' ἀν.*, 1028 b 16.
20. Ch. Mugler, *ἔνθ' ἀν.*
21. Σιμπλικιου, *Εἰς Φυσικὰ* D.V. 19A 21.
22. Πβ. Πλατωνος, *Πολιτεία*, VII, 526 d - 527 b καὶ *Ἑβδόμη Ἐπιστολή*, 342 b - 343 b.
23. Πλατωνος, *Πολιτεία*, VI, 510 d-e. «Οὐκοῦν καὶ ὅτι τοῖς ὁρωμένοις εἴδεσι προσχρῶνται καὶ τοὺς λόγους περὶ αὐτῶν ποιοῦνται οὐ περὶ τούτων διανοούμενοι, ἀλλ' ἐκείνων περὶ οἷς ταῦτα ἔοικε, τοῦ τετραγώνου αὐτοῦ ἕνεκα τοὺς λόγους ποιούμενοι καὶ διαμέτρου αὐτῆς, ἀλλ' οὐ ταύτης ἣν γράφουσιν, καὶ τἆλλα οὕτως, αὐτὰ μὲν ταῦτα ἃ πλάττουσίν τε καὶ γράφουσιν, ὧν καὶ σκιαὶ καὶ ἐν ὕδασιν εἰκόνες εἰσίν, τούτοις μὲν ὡς εἰκόσιν ἂν χρώμενοι, ζητοῦντες δὲ αὐτὰ ἐκεῖνα ἰδεῖν ἃ οὐκ ἂν ἄλλης ἴδοι τις ἢ τῇ διανοίᾳ».
24. Ch. Mugler, σ. 21.
25. Αριστοτελους, *Ἀναλ. Ὕστερα*, 76 b 4.
26. Του Αυτου, 73 b 29.
27. Του Αυτου, 73 a 31.
28. Ch. Mugler, *ἔνθ' ἀν.*, σ. 22.
29. Th. L. Heath, *Ἱστορία τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν*, Ἀθήνα 2001 Κ.Ε.ΕΠ.ΕΚ. Τομ. I, σ. 430.
30. *De sph.*, ὁρισ. 2. Πβ. ἐπίσης Αυτολυκου του Πιτανεως, *Περὶ κινουμένης σφαίρας* ... Εἰσαγωγή - Ἀρχαῖο Κείμενο - Μεταγραφή - Ἐπεξηγήσεις - Σχόλια - Ἱστορικὰ Στοιχεῖα ἀπὸ Ε. Σπανδάγο, Ἀθήνα, Αἴθρα, 2002.
31. Του Αυτου, πρόταση 1.

«Σημεῖον ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν»[32].

Οἱ μεγάλοι μαθηματικοὶ τῆς ἑλληνιστικῆς ἐποχῆς Ἀρχιμήδης καὶ Ἀπολλώνιος, καθὼς ὁ Πάππος καὶ ἄλλοι, υἱοθετοῦν ἀποκλειστικὰ τὴ χρήση τῆς λέξης σημεῖον.

Ποιά ὅμως εἶναι ἡ ἑρμηνεία γι'αὐτὴν τὴν ἐξέλιξη τῆς γεωμετρικῆς ὁρολογίας, καὶ πῶς συντελεῖται αὐτὴ ἡ μετάβαση;

Οὐσιαστικά, ὅπως ἀναφέρει ὁ καθηγητὴς κ. Σ.Π. Ζερβός, στὸ ἐμπεριστατωμένο ἄρθρο του[33], ἡ ἐξέλιξη αὐτὴ ὑπογραμμίζει «τὴν ἀναγκαία ἀφαίρεση στὴ γλῶσσα, γιὰ νὰ περιγραφοῦν σωστὰ ἀφηρημένες ἔννοιες ... ἐγκαταλείποντας τὴ στιγμὴ γιὰ τὸ σημεῖον σημαίνει τὴν ἐγκατάλειψη τῆς σχεδιαστικῆς γεωμετρίας γιὰ τὴ νοητικὴ γεωμετρία δηλαδὴ τὴν ἀφαιρετικὴ γεωμετρία... Καὶ αὐτὸ ποὺ εἶναι ἐνδιαφέρον εἶναι ὅτι ὁ πιὸ βασικὸς ὅρος τῆς γεωμετρίας, τὸ σημεῖον, εἶναι περισσότερο ἀφαιρετικός, ἀπ' ὅ,τι μᾶς δίδει ἡ σύγχρονη δυτικὴ μετάφραση του ὡς «point» στὴν προφορμαλιστικὴ της ἑρμηνεία»[34,35].

IV. Οἱ θεωρήσεις τῆς διάστασης στὸν Πλάτωνα καὶ τὸν Ἀριστοτέλη. Οἱ ἀτομιστὲς ὀνομάζουν τὸ χῶρο κενό[36], ὁ Πλάτων χρησιμοποιεῖ τὴ λέξη χώρα[37], ὡς ἡ περιοχὴ ὅπου «συνυπάρχουν» ἡ ἀκινησία καὶ ἡ κίνηση τῶν σωμάτων, καὶ τὴ λέξη τόπος[38], ἡ ὁποία περικλείει τὴν ἔννοια τοῦ πεπερασμένου.

Γιὰ νὰ ἐκφράσει τὴν ἔννοια τῆς διάστασης, ὁ Πλάτων χρησιμοποιεῖ τὴ λέξη *αὔξη*. Ἔτσι γιὰ τὴ δεύτερη διάσταση ἀναφέρει δευτέραν αὔξην[39], ἐνῶ γιὰ τὴν τρίτη διάσταση παρουσιάζει μιὰ ποικιλία ἐκφράσεων, ὅπως ἡ τρίτη αὔξη[40], ἡ βάθους αὔξη[41], ἡ τῶν κύβων αὔξη[42], τὸ βάθος[43].

Οἱ τρεῖς διαστάσεις τοῦ χώρου[44,45,46] ἐπισημαίνονται ἀπὸ τὸν Πλάτωνα, ὁ ὁποῖος μά-

---

32. ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ, *Στοιχεῖα*, Βιβλίο 1 ὅρος α΄.

33. S.P. ZERVOS, On the development of mathematical intuition; On the Genesis of Geometry, Further remarks, *Tensor* N.S. Vol. 26 1972, σσ. 397-467.

34. ΤΟΥ ΑΥΤΟΥ, σ. 419.

35. Θυμίζουμε πὼς ὁ ὅρος «point» παράγεται ἀπὸ τὸ λατινικὸ ρῆμα pungere.

36. H. DIELS, «φέρεσθαι κατὰ ἀποτομὴν ἐκ τοῦ ἀπείρου πολλὰ σώματα παντοῖα τοῖς σχήμασιν εἰς μέγα κενόν», Die Fragmente der Vorsokratiker 54 A1. Πβ. ἐπίσης «ἐτεῇ δ' ἄτομον καὶ κενόν». DV. I 55 A 49 καὶ 55 B 125.

37. «μῶν οὖν οὐκ ἐν χώρᾳ τινὶ τά τε ἑστῶτα ἕστηκε καὶ τὰ κινούμενα κινῆται», *Νόμοι*, X 893 c.

38. «ἐν τῷ σωματοειδεῖ τε καὶ ὁρατῷ τόπῳ», *Πολιτεία*, VII, 532 d.

39. *Πολιτεία*, 528 b.

40. *Αὐτόθι*, «ὀρθῆς δὲ ἔχει ἑξῆς μετὰ δευτέραν αὔξην τρίτην λαμβάνων».

41. Πβ. *αὐτόθι*, «τὴν βάθους αὔξης μέθοδον», ὡς τὸν ὁρισμὸ τῆς στερεομετρίας.

42. *Αὐτόθι*, «ἔστι δε τοῦτο περὶ τῶν κύβων αὔξην καὶ τὸ βάθος μετέχον».

43. *Αὐτόθι*, «Τὸ δὲ τοῦ σώματος εἶδος πᾶν καὶ βάθος ἔχει» *Τίμαιος* 53 c. «Εἰ μὲν οὖν ἐπίπεδον μὲν βάθος δὲ μηδὲν ἔχον ἔδει γίγνεσθαι τὸ τοῦ παντὸς σῶμα», 32 a.

44. Θυμίζουμε πὼς ὁ Πλάτων χρησιμοποιεῖ ἐπίσης καὶ τὸν ὅρο χώρα, ὡς τὸ πλαίσιο τῆς ἀκινησίας καὶ τῆς κίνησης τῶν σωμάτων: «μῶν οὖν οὐκ ἐν χώρᾳ τινὶ τά τε ἑστῶτα ἕστηκε καὶ τὰ κινούμενα κινεῖται» *Νόμοι*, X, 89 3 c. Καθὼς ἐπίσης καὶ τὴν πιὸ γενικευμένη ἔννοια τοῦ τόπου πβ. «ἐν... τῷ ὁρατῷ τόπῳ» *Πολιτεία* VII 532D. Γιὰ τοὺς μεταγενέστερους τοῦ Πλάτωνος αὐτὴ ἡ λέξη συγκεκριμενοποιεῖται ἀποκτώντας τὴ σημασία ἑνὸς ἐκ τῶν βασικῶν γεωμετρικῶν ἀντικειμένων: σημεῖα, εὐθεία, ἐπιφάνεια πβ. «ὑφ' οὗ σημείου γράφεταί τις ἐν τῷ μεταξὺ τόπῳ τῶν τε ΒΑΔ εὐθειῶν καὶ τῆς ΒΕΔ περιφερείας γραμμῆς» ΠΑΠΠΟΥ, Συναγωγή, IV 30 ἔκδ. F. Hultsch Berlin, 1875,[1] σ. 252· πβ. ἐπίσης καὶ τὴν ἔκδ. 2001, Ἀθήνα, Αἴθρα, Εἰσαγωγὴ – Ἀρχαῖο Κείμενο – Μεταγραφή – Ἐπεξηγήσεις – Σχόλια – Ἱστορικὰ Στοιχεῖα ἀπὸ Ε. Σπανδάγο.

45. Ὁ Πλάτων ὁρίζει τὴν ἀστρονομία ὡς τὴν ἐπιστήμη τῆς κίνησης τῶν στερεῶν σωμάτων: «μετὰ γεωμετρίαν ἀστρονομίαν ἔλεγεν, φορὰν οὖσαν βάθους» *Πολιτεία* VII, 528 d.

46. Ἡ ἔννοια τῆς διάστασης ἀπασχόλησε καὶ τὸν Πτολεμαῖο, ὁ ὁποῖος ἔγραψε μιὰ πραγματεία περὶ διαστάσεως, ποὺ χάθηκε. Ὁ Σιμπλίκιος (*Σχόλια εἰς τὸ περὶ Οὐρανοῦ*, ἔκδ. Heiberg,

λιστα ταξινομεῖ τὰ γεωμετρικὰ ἀντικείμενα κατὰ τὸν ἀριθμὸ τῆς διάστασής τους.

«γιγνώσκεις που μῆκος; Τί μήν; Τί δε; πλάτος; Πάντως. Ἦ καὶ ταῦτα ὅτι δυ' ἐστὸν καὶ τρίτον τούτων βάθος»[47].

Θὰ θέλαμε νὰ ὑπογραμμίσουμε πὼς ἡ λέξη αὔξη δὲν ἦταν τόσο διαδεδομένη, ὁ Πλάτων στὴν *Πολιτεία* τὴν παρουσιάζει ὡς τὴν «πρόσθεση» τῆς τρίτης διάστασης σὲ ἕνα τετράγωνο γιὰ τὴν κατασκευὴ ἑνὸς κύβου.

Ὁ Ἀριστοτέλης, τὸν ὁποῖον δὲν ἀπασχολοῦν τὰ Μαθηματικὰ τόσο ἔντονα, ὅπως ἀναφέρεται, γιὰ τὴν ἔννοια τῆς διάστασης, «γνωρίζει τρεῖς ἐκφράσεις: διάστασις, διάστημα, καὶ μέγεθος»[48].

«σῶμά ἐστι τὸ πάντη ἔχον διάστασιν»[49], «διαστήματα μὲν οὖν ἔχει τρία, μήκους καὶ πλάτους καὶ βάθους»[50], «πᾶν σῶμα βάθος ἔχει, τοῦτο δ'ἐστί τὸ τρίτον μέγεθος»[51].

Γνωρίζει ὅμως ὅτι ὁ χῶρος ἔχει τρεῖς διαστάσεις: «διαστήματα μὲν οὖν ἔχει τρία, μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος, οἷς ὁρίζεται σῶμα πᾶν»[52].

V. Εὐθεῖα ἐπιφάνεια, στερεό. Σημαντικὴ εἶναι ἡ συμβολὴ τοῦ Πλάτωνος[53] καὶ γιὰ τὸν ὁρισμὸ τῆς εὐθείας γραμμῆς, τὴν ὁποίαν παρουσιάζει στὸν Παρμενίδη, καὶ ὁ ἀπόηχός της θὰ ἐμφανισθεῖ ἀργότερα στὸν Εὐκλείδη: «καὶ μὴν εὐθύ γε, οὗ ἂν τὸ μέσον ἀμφοῖν τοῖν ἐσχάτοιν ἐπίπροσθεν ᾖ»[54].

Θυμίζουμε βέβαια ὅτι τὸ ἐπίθετο εὐθὺ γιὰ τὸν Πλάτωνα σημαίνει ὅ,τι γιὰ τοὺς γεωμέτρες τῆς ἑλληνιστικῆς ἐποχῆς ἡ λέξη εὐθεῖα, ἐνῶ ἡ σημασιολογικὴ ἑρμηνεία τοῦ ἐπιθέτου παραπέμπει στὴ γνωστὴ γεωμετρικὴ ἰδιότητα ὅτι ἡ εὐθεῖα γραμμὴ εἶναι ὁ συντομώτερος δρόμος μεταξὺ δύο σημείων. Ἀργότερα ὁ Συρακούσιος θα χρησιμοποιήσει αὐτὴ τὴ χαρακτηριστικὴ ἰδιότητα: «τῶν τὰ αὐτὰ πέρατα ἐχουσῶν γραμμῶν ἐλαχίστην εἶναι τὴν εὐθεῖαν[55]». Ἐνῶ ὁ πλατωνικὸς αὐτὸς ὁρισμός στὸν Παρμενίδη θὰ ἀναπαραχθεῖ σχεδὸν αὐτούσιος στὸν ἄλλο εὐκλείδειο ὁρισμὸ τῆς εὐθείας: «Εὐθεῖα γραμμή ἐστιν, ἥτις ἐξ' ἴσου τοῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται»[56].

Ἐνῶ ὁ Ἀριστοτέλης χρησιμοποιεῖ περισσότερο τὴ λέξη εὐθεία καὶ λιγότερο τὸ ἐπίθετο εὐθύ.

«οἷον εἰ καλλίστη τῶν γραμμῶν ἡ εὐθεῖα»[57].

«οὐ μέντοι γ' ἅψεται τούτου χωρισθὲν τὸ εὐθύ»[58].

Μὲ τὸν Αὐτόλυκο[59], καὶ τὸν Εὐκλείδη[60] καὶ τὸν Πάππο[61] θὰ καθιερωθεῖ τὸ οὐσιαστι-

---

σ. 710) μᾶς ἀναφέρει πὼς ὁ ἀλεξανδρινὸς ἀπέδειξε ὅτι οἱ πιθανὲς διαστάσεις τοῦ χώρου εἶναι τρεῖς.

47. *Νόμοι*, 819 e.

48. Ch. Mugler *ἔνθ' ἀν.*, p. 8.

49. *Μ.τ.Φ.*, 1066 b 32.

50. *Φυσ.*, 209 a 5.

51. *Περὶ Ψυχῆς*, 423 a 22.

52. *Φυσ.*, 209 a 4.

53. Πβ. *Παρμενίδης*, 137 E.

54. Πβ. *Ἑβδόμη Ἐπιστολή*, 342 d.

55. Αρχιμηδουσ, *Περὶ σφαίρας καὶ κυλίνδρου*, πρ. 20.

56. Ευκλειδου, *Στοιχεῖα*, Βιβλίο 1 ὅρος δ΄.

57. *Ἀναλ. Ὕστερα*, 75 b 23.

58. *Περὶ Ψυχῆς*, 403 a 12.

59. «Ἔστω σφαίρα ἧς ἄξων ἔστω ἡ εὐθεία ΑΒ» De sphaera quae movetur... προτ. 1.

60. «Δύο δοθεισῶν εὐθειῶν ἀνίσων ἀπὸ τῆς μείζονος τῷ ἐλάσσονι ἴσων εὐθείαν ἀφελεῖν». *Στοιχεῖα*, Βιβλ. I προτ. 3.

61. *Συναγωγή* ... σ. 50: «Ἔστωσαν ἴσαι εὐθεῖαι...».

κοποιημένο ἐπίθετο εὐθεῖα.

Ἀπὸ τὸ γεωμετρικὸ σχῆμα τῆς εὐθείας διάστασης 1, φυσικὸ ἐπακόλουθο ἦταν ἡ ἀναζήτηση τῆς δεύτερης διάστασης τῆς ἐπιφάνειας, ὅρον ποὺ χρησιμοποιεῖ ἤδη ὁ Δημόκριτος[62]. Μάλιστα τὸ πέρασμα αὐτὸ ἀπὸ τὴν πρώτη διάσταση στὴ τρίτη ἀποδίδει ὁ Σταγειρίτης στὰ Μετὰ τὰ Φυσικά.

«τὸ δὲ πάντῃ καὶ θέσιν ἔχον στιγμή, τὸ δὲ μοναχῇ γραμμή, τὸ δὲ διχῇ ἐπίπεδον, τὸ δὲ πάντῃ καὶ τριχῇ διαιρετόν κατὰ τὸ ποσὸν σῶμα»[63].

Ὁ Πλάτων χρησιμοποιεῖ τὸ ἐπίθετο ἐπίπεδος[64] καὶ στὸν *Μένωνα* ταυτίζει τὴν ἐπιφάνεια μὲ τὸ γεωμετρικὸ σχῆμα, ἐνῶ ἀργότερα ὁ Εὐκλείδης θὰ ὁρίσει τὴν ἐπιφάνεια ὡς ὅριο στερεοῦ σώματος[65].

Ἡ τρίτη διάσταση μελετᾶ τὰ στερεά, τὰ σώματα, ἔννοια ποὺ ὁ Δημόκριτος[66] χρησιμοποιεῖ στὴν θεώρησή του γιὰ τὴν ὕλη, ἐνῶ τόσο ὁ Πλάτων[67], ὅσο καὶ ὁ Ἀριστοτέλης[68] δίδουν ταυτόσημους ὁρισμοὺς ἀπὸ τοὺς ὁποίους ὁ Εὐκλείδης[69] θὰ ἐπωφεληθεῖ.

VI. Ἡ εὐκλείδεια θεώρηση τῆς διάστασης στὰ *Στοιχεῖα*. Ὁ Εὐκλείδης κωδικοποιώντας τὶς πρότερες γνώσεις δίδει στὸ πρῶτο Βιβλίο τῶν *Στοιχείων*, στοὺς ὁρισμούς, (ὅρους), τὶς βασικὲς ἔννοιες τῆς γεωμετρίας:

1. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.
2. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.
3. Γραμμὴ δὲ πέρατα σημεῖα.
5. Ἐπιφάνεια δὲ ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει.
6. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.

Στὸ 11ο Βιβλίο παρουσιάζει τοὺς βασικοὺς ὁρισμοὺς γιὰ τὴ στερεομετρία.

1. Στερεόν ἐστι, τὸ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχον.
2. Στερεοῦ δὲ πέρας ἐπιφάνεια.

Ἂς προσπαθήσουμε νὰ συνδέσουμε αὐτοὺς τοὺς ὁρισμοὺς μὲ τὴ θεωρία τῆς διάστασης ταξινομώντας τους σὲ δύο ὁμάδες.

I

1. Σημεῖόν ἐστιν, οὗ μέρος οὐθέν.
2. Γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές.
5. Ἐπιφάνεια δε ἐστιν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει

καὶ

1. Στερεόν ἐστι, τὸ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχον.

II

3. Γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα.
6. Ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί.
2. Στερεοῦ δὲ πέρας ἐπιφάνεια.

---

62. Πλουταρχου, «εἰ κῶνος τέμνοιτο παρὰ τὴν βάσιν ἐπιπέδοις, τί χρὴ διανοεῖσθαι τὰς τῶν τμημάτων ἐπιφανείας...», *De comm. not.*, 39, 1, 1079 E. Πβ. ἐπίσης Fr. B 155 Diels.

63. *Μ.τ.Φ.*, 1016 b 25.

64. *Στοιχεῖα*, Βιβλίο XI ὅρος β΄: «Στερεοῦ δὲ πέρας ἐπιφάνεια».

65. Πβ. *Πολιτεία*, VII, 528: «τὴν μὲν γάρ που τοῦ ἐπιπέδου πραγματείαν γεωμετρίαν ἐτίθεις».

66. Αετιος, *Περὶ Δημοκρίτου*, D.V. 55 A 47: «Δημόκριτος τὰ πρῶτα φησι σώματα...».

67. Πλατωνος, *Τίμαιος* 53c: «τὸ δὲ τοῦ σώματος εἶδος πᾶν καὶ βάθος ἔχει».

68. Αριστοτελους, *Περὶ Ψυχῆς, 423 a 21* «εἰ πᾶν σῶμα βάθος ἔχει τοῦτο δ᾽ ἐστὶ τὸ τρίτον μέγεθος».

69. Ευκλειδου, *Στοιχεῖα, Βιβλ. XI ὅρος α΄*. «Στερεόν ἐστι τὸ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχον».

Εὔκολα παρατηροῦμε πὼς ἡ πρώτη ὁμάδα μᾶς προσφέρει μιά ἄμεση σχέση μεταξὺ γεωμετρικῶν σχημάτων καὶ διάστασης. Οἱ ὁρισμοὶ εἶναι ἁπλοὶ καὶ ἀριθμοῦν τὶς διαστάσεις βασικῶν σχημάτων. Ἔτσι τὸ σημεῖο δὲν ἔχει διάσταση, ἀδιάστατον, ὅπως ἀναφέρει ὁ Ἥρων ὁ Ἀλεξανδρεύς. Οἱ γραμμὲς ἔχουν μῆκος, ἄρα διάσταση 1, οἱ ἐπιφάνειες ἔχουν διάσταση 2, ἀφοῦ ἔχουν μῆκος καὶ πλάτος καὶ τὰ στερεὰ ἔχουν διάσταση 3, ἔχοντας μῆκος, πλάτος καὶ βάθος.

Στὴ δεύτερη ὁμάδα, παρουσιάζεται ἡ φανερὴ συγγένεια τῶν εὐκλείδειων ὁρισμῶν μὲ τὸ σύγχρονο ὁρισμὸ τῆς διάστασης, βασιζόμενο στὴν ἔννοια τοῦ πέρατος.

Ξεκινώντας μὲ τὴν παραδοχὴ πὼς τὸ σημεῖον εἶναι ἀδιάστατον, μποροῦμε νὰ ποῦμε πὼς τὰ πέρατα ἑνὸς μονοδιάστατου συνεχοῦς ἔχουν διάσταση μηδέν.

Ἔτσι λοιπὸν οἱ προηγούμενοι ὁρισμοὶ τῆς ὁμάδας II μετατρέπονται στοὺς παρακάτω:

3΄. Τὰ πέρατα ἑνὸς μονοδιάστατου συνεχοῦς εἶναι σημεῖα.

6΄. Τὰ πέρατα ἑνὸς δισδιάστατου συνεχοῦς εἶναι ἕνα μονοδιάστατο συνεχές.

2΄. Τὰ πέρατα ἑνὸς τρισδιάστατου συνεχοῦς εἶναι ἕνα δισδιάστατο συνεχές[70].

Στὸν Εὐκλείδη γίνεται φανερὴ ἡ ἀκολουθία σημεῖο – εὐθεῖα – ἐπιφάνεια – στερεό. Γιὰ τὴ σύγχρονη θεωρία διάστασης, στὴν ὁποία θὰ ἀναφερθοῦμε στὴν τελευταία παράγραφο τοῦ ἄρθρου μας, ἕνα σύνολο ἢ ἕνας χῶρος εἶναι ν-διάστατος, ὅταν ν εἶναι ὁ τελευταῖος ἀκέραιος γιὰ τὸν ὁποῖον κάθε σημείο ἔχει τυχοῦσες μικρὲς περιοχὲς μὲ πέρατα τὸ πολύ ν-1 διάστασης.

Ὅμως αὐτοὶ οἱ ὁρισμοὶ ἀνήκουν στὸν Εὐκλείδη; Ὁ Heath θεωρεῖ πὼς εἶναι προγενέστεροι[71], καὶ μάλιστα ἀναφέρεται σ' ἕνα ἀπόσπασμα ἀπὸ τὰ *Τοπικὰ* τοῦ Ἀριστοτέλους «εἰσὶ δὲ τῶν τοιούτων ὁρισμῶν ὅ τε τῆς στιγμῆς καὶ ὁ τῆς γραμμῆς καὶ τοῦ ἐπιπέδου· πάντες γὰρ διὰ τῶν ὑστέρων τὰ πρότερα δηλοῦσιν· τὸ μὲν γὰρ γραμμῆς, τὸ δ' ἐπίπεδον, τὸ δὲ στερεοῦ φασὶ πέρας εἶναι»[72] ὅπου φανερὰ ὁ Σταγειρίτης ἀντιτίθεται στοὺς παλαιότερους ὁρισμούς, ἀπὸ τὴν ἀκολουθία σημεῖο – εὐθεῖα – ἐπιφάνεια – στερεό, ἀπὸ τὰ ὕστερα στὰ πρότερα, τοὺς ὁποίους θεωρεῖ μὴ ἐπιστημονικούς.

Ἀνάλογα ἐκφράζεται καὶ στὰ *Μετὰ τὰ Φυσικὰ* «εἰ γε μὴν γραμμὰς ἢ τὰ τούτων ἐχόμενα (λέγω δ' ἐπιφανείας τὰς πρώτας) θήσει τις ἀρχάς, ταῦτα δ'οὐκ εἰσὶν οὐσίαι χωρισταί, τομαὶ δὲ καὶ διαιρέσεις αἱ μὲν ἐπιφανειῶν αἱ δὲ σωμάτων, αἱ δὲ στιγμαὶ γραμμῶν, ἔτι δὲ πέρατα τῶν αὐτῶν τούτων· πάντα δὲ ταῦτα ἐν ἄλλοις ὑπάρχει καὶ χωριστὸν οὐθὲν ἔστιν»[73].

VII. Οἱ ἀριστοτέλειες ἀντιρρήσεις στοὺς εὐκλείδειους ὁρισμούς. Ὁ Ἀριστοτέλης ἐπικρίνει τοὺς ὁρισμοὺς τοῦ Εὐκλείδου καὶ βασιζόμενος στὴ θεωρία τῆς διαιρετότητας καὶ τῆς συνέχειας παρουσιάζει τὴ δική του θεωρία διάστασης.

«τῶν γὰρ φύσει συνεστώτων τὰ μὲν ἐστὶ σώματα καὶ μεγέθη, τὰ δ' ἔχει σῶμα καὶ μέγεθος, τὰ δ'ἀρχαὶ τῶν ἐχόντων εἰσίν. συνεχὲς μὲν οὖν ἐστὶ τὸ διαιρετὸν εἰς ἀεὶ διαιρετά, σῶμα δὲ τὸ πάντη διαιρετόν. μεγέθους δὲ τὸ μὲν ἐφ' ἓν γραμμή, τὸ δ' ἐπὶ δύο ἐπίπεδον, τὸ δ' ἐπὶ τρία σῶμα· καὶ παρὰ ταῦτα οὐκ ἔστιν ἄλλο μέγεθος διὰ τὸ τὰ τρία πάντα εἶναι καὶ τὸ τρὶς πάντη. καθάπερ γάρ φασι καὶ οἱ Πυθαγόρειοι, τὸ πᾶν καὶ τὰ πάντα τοῖς τρισὶν ὥρισται· τελευτὴ γὰρ καὶ μέσον καὶ ἀρχὴ τὸν ἀριθμὸν ἔχει τὸν τοῦ παντός, ταῦτα δὲ τὸν τῆς τριάδος»[74].

«ὥστ' ἐπεὶ τὰ πάντα καὶ τὸ πᾶν καὶ τὸ τέλειον οὐ κατὰ τὴν ἰδέαν διαφέρουσιν ἀλλή-

---

70. Πβ. S.P. Zervos, *ἔνθ' ἀν.*, σσ. 414-415.
71. Εὐκλείδου, *Στοιχεῖα*, 1926, I, σσ. 155-156.
72. Ἀριστοτέλους, *Τοπικά*, VI 4, 141 b 20.
73. Ἀριστοτέλους, *Μ.τ.Φ.*, XI, 20 1060 b, 12-17.
74. Ἀριστοτέλους, *Περὶ Οὐρανοῦ*, I, 268 a 4-13.

λων, ἀλλ' εἴπερ ἄρα, ἐν τῇ ὕλῃ καὶ ἐφ' ὧν λέγονται, τὸ σῶμα μόνον ἂν εἴη τῶν μεγεθῶν τέλειον· μόνον γὰρ ὥρισται τοῖς τρισίν· τοῦτο δ' ἐστὶ πᾶν. τριχῇ δὲ ὂν διαιρετὸν πάντη διαιρετόν ἐστιν· τῶν δ' ἄλλων τὸ μὲν ἐφ' ἕν, τὸ δ' ἐπὶ δύο· ὡς γὰρ τοῦ ἀριθμοῦ τετυχήκασιν, οὕτω καὶ τῆς διαιρέσεως καὶ τοῦ συνεχοῦς· τὸ μὲν γὰρ ἐφ' ἓν συνεχές, τὸ δ' ἐπὶ δύο, τὸ δὲ πάντη τοιοῦτον. ὅσα μὲν οὖν διαιρετὰ τῶν μεγεθῶν, καὶ συνεχῆ ταῦτα. εἰ δὲ καὶ τὰ συνεχῆ πάντα διαιρετά, οὔπω δῆλον ἐκ τῶν νῦν· ἀλλ' ἐκεῖνο μὲν δῆλον, ὡς οὐκ ἔστιν ἄλλο γένος μετάβασις, ὥσπερ ἐκ μήκους εἰς ἐπιφάνειαν, εἰς δὲ σῶμα ἐξ' ἐπιφανείας· οὐ γάρ ἂν ἔτι τὸ τοιοῦτον τέλειον εἴη μέγεθος· ἀνάγκη γὰρ γίγνεσθαι τὴν ἔκβασιν κατὰ τὴν ἔλλειψιν, οὐχ οἷόν τε δὲ τὸ τέλειον ἐλλείπειν· πάντη γάρ ἐστιν»[75].

Στὸ πρῶτο κυρίως μέρος τοῦ ἀριστοτελικοῦ ἀποσπάσματος διαφαίνεται ἡ υἱοθέτηση τῶν πυθαγορικῶν θεωρήσεων γιὰ τὸ τρισδιάστατο τῶν σωμάτων ἀπὸ τὸν Σταγειρίτη.

Ἐπίσης στὰ *Μετὰ τὰ Φυσικὰ* ὁ Ἀριστοτέλης παρουσιάζει τὴ θεώρησή του γιὰ τὴ διαιρετότητα καὶ τὴ συνέχεια.

«πανταχοῦ δὲ τὸ ἓν ἢ τῷ ποσῷ ἢ τῷ εἴδει ἀδιαίρετον. τὸ μὲν οὖν κατὰ τὸ ποσὸν καὶ ᾗ ποσὸν ἀδιαίρετον. τὸ μὲν πάντη καὶ θέσιν ἔχον στιγμή, τὸ δὲ μοναχῇ γραμμή, τὸ δὲ διχῇ ἐπίπεδον τὸ δὲ πάντῃ καὶ τριχῇ διαιρετὸν κατὰ τὸ ποσὸν σῶμα. καὶ ἀντιστρέψαντι δὴ τὸ μὲν διχῇ διαιρετὸν ἐπίπεδον, τὸ δὲ μοναχῇ γραμμή· τὸ δὲ μηδαμῇ διαιρετὸν κατὰ τὸ ποσὸν στιγμὴ καὶ μονάς, ἡ μὲν ἄθετος μονάς, ἡ δὲ θετὸς στιγμή»[76].

«Ποσὸν λέγεται τὸ διαιρετὸν εἰς ἐνυπάρχουσαν, ὧν ἑκάτερον ἢ ἕκαστον ἕν τι καὶ τόδε τι πέφυκεν εἶναι. πλῆθος μὲν οὖν ποσόν τι ἂν ἀριθμητὸν ᾖ, μέγεθος δὲ ἂν μετρητόν ᾖ. λέγεται δὲ πλῆθος μὲν τὸ διαιρετὸν δυνάμει εἰς μὴ συνεχῆ, μέγεθος δὲ τὸ εἰς συνεχῆ. μέγεθος δὲ τὸ μὲν ἐφ' ἓν συνεχὲς μῆκος, τὸ δ' ἐπὶ δύο πλάτος, τὸ δ' ἐπὶ τρία βάθος. τούτων δὲ πλῆθος μὲν τὸ πεπερασμένον ἀριθμός, μῆκος δὲ γραμμή, πλάτος δὲ ἐπιφάνεια, βάθος δὲ σῶμα»[77].

VIII. Οἱ θεωρήσεις περὶ σώματος τοῦ Σέξτου Ἐμπειρικοῦ. Στὸ Κεφάλαιο *Κατὰ Φυσικῶν*, τῆς πραγματείας του, ὁ σκεπτικὸς φιλόσοφος καὶ φυσικός, ὁ Σέξτος Ἐμπειρικὸς (2ος αἰώνας μ.Χ.) ἐπαναλαμβάνει τὴν πυθαγόρεια ἀλλὰ καὶ τὴν εὐκλείδεια θεώρηση περὶ σώματος «φασὶ γὰρ σῶμα εἶναι τὸ τρεῖς ἔχον διαστάσεις, μῆκος, βάθος, πλάτος»[79]... «εἶτ' ἐπεὶ τὸ σῶμα οὐ μῆκος μόνον ἐστὶν οὐδὲ πλάτος οὐδὲ βάθος ἀλλὰ καὶ μῆκος καὶ βάθος καὶ πλάτος, ἕκαστον τούτων ἔχον τὴν σωματότητα τρία γενήσεται, καὶ οὕτω τὸ μῆκος οὐ μόνον μῆκος ἔσται ἀλλὰ καὶ πλάτος καὶ βάθος, καὶ τὸ πλάτος οὐχ ἁπλῶς πλάτος ἀλλὰ καὶ μῆκος καὶ βάθος, ὡσαύτως δὲ καὶ ἡ λειπομένη διάστασις»[79].

Νωρίτερα βέβαια ὁ Ἀριστοτέλης ἔχει διακηρύξει πὼς τὸ σῶμα, τὸ στερεὸ ἔχει τρεῖς διαστάσεις: «σῶμα τὸ πάσας ἔχον διαστάσεις, τὸ πάντη ἔχον διάστασιν, τὸ ἔχον τρεῖς διαστάσεις»[80]. Καὶ ὁ Σέξτος Ἐμπειρικὸς διακηρύσσει:

«Πρὸς τούτοις εἰ μηδέν ἐστι μῆκος, μηδὲ πλάτος, μηδὲ βάθος, οὐδὲ τὸ κατὰ μετουσίαν τούτων νοούμενον σῶμα γενήσεται· οὐδὲν δὲ ἐστι μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος, ὡς παραστήσομεν· οὐκ ἄρα ἔστι σῶμα. μῆκος μὲν γὰρ οὐκ ἔστιν, ἐπεὶ τὸ μέγιστον ἦν τοῦτο τοῦ σώματος διάστημα ὅπερ λέγεται παρὰ τοῖς μαθηματικοῖς γραμμή, ἡ δὲ γραμμὴ ἦν στιγμὴ ἐρρυηκυῖα καὶ ἡ στιγμὴ σημεῖον ἀμερὲς καὶ ἀδιάστατον»[81].

---

75. *Αὐτόθι*, 268 a 20 - 268 b 5.
76. Ἀριστοτελους, *Μ.τ.Φ.*, Δ 6, 1016 b 23-31.
77. *Αὐτόθι*, V 13, 1020 a, 7-14.
78. Σεξτου Ἐμπειρικου, *Πρὸς Φυσ.*, I, 367, 3-4.
79. *Αὐτόθι*, 372, 1-7.
80. Ἀριστοτελους, *Αὐτόθι*, *Φυσ.*, Γ 5, 204 b 20.
81. Σεξτου Ἐμπειρικου, *ἔνθ' ἀν.*, 375, 5-13.

Στὸ ἀπόσπασμα αὐτὸ ἡ ἐπίδραση τοῦ Σταγειρίτη εἶναι ἐμφανής, καθὼς ὁ Ἀριστοτέλης ἔχει ἤδη θεωρήσει ὅτι «τὸ ἀμερὲς οὐκ ἔχει διάστασιν»[82]

Ὁ εὐκλείδειος ἀπόηχος τοῦ ὁρισμοῦ του σώματος, ὡς ὅριο ἐπιφανείας, παρουσιάζεται στὸ παρακάτω ἀπόσπασμα τοῦ Σέξτου Ἐμπειρικοῦ: «Ἔτι κἂν δῶμεν τὴν γραμμὴν μῆκος ἀπλανὲς ὑπάρχειν... ὥσπερ γὰρ τὸ σημεῖον ῥυὲν ποιεῖ γραμμήν, οὕτω καὶ ἡ γραμμὴ ῥυεῖσαι ποιεῖ ἐπιφάνειαν, ἥτις ἐστὶ πέρας σώματος δύο ἔχον διαστάσεις μῆκος τε καὶ πλάτος. ἐπείπερ οὖν ἡ ἐπιφάνεια πέρας ἐστὶ σώματος, πάντως»[83].

Ἐνῶ φανερὴ παραμένει ἡ πυθαγόρεια ἀπήχηση τῆς θεωρίας γένεσης τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων μὲ τὴν ἔννοια τῆς ροῆς, τῆς κίνησης[84] «ἐξ αὐτοῦ μὲν <γάρ> γραμμὴ γίνεται, ἀπὸ γραμμῆς δὲ ἐπιφάνεια, ἀπὸ δὲ ταύτης σῶμα»[85]: «τινὲς δ' ἀπὸ ἑνὸς σημείου τὸ σῶμα φασὶ συνίστασθαι· τουτὶ γὰρ τὸ σημεῖον ῥυὲν γραμμῶν ἀποτελεῖν, τὴν δὲ γραμμὴν ῥυεῖσαν ἐπίπεδον ποιεῖν, τοῦτο δὲ εἰς βάθος κινηθὲν τὸ σῶμα γεννᾶν τριχῇ διαστατόν. διαφέρει δὲ ἡ τοιαύτη τῶν Πυθαγορικῶν στάσις τῆς τῶν προτέρων. ἐκεῖνοι μὲν γὰρ ἐκ δυοῖν ἀρχῶν, τῆς τε μονάδος καὶ τῆς ἀορίστου δυάδος, ἐποίουν τοὺς ἀριθμούς, εἶτ' ἐκ τῶν ἀριθμῶν τὰ σημεῖα καὶ τὰς γραμμὰς τά τε ἐπίπεδα σχήματα καὶ τὰ στερεά· οὗτοι δὲ ἀπὸ ἑνὸς σημείου τὰ πάντα τεκταίνουσιν».

IX. Ἡ Ἀριθμητικὴ Εἰσαγωγὴ τοῦ Νικομάχου τοῦ Γερασηνοῦ: ἡ ἀναβίωση τῶν προτέρων θεωριῶν. Οἱ πυθαγόρειες θεωρήσεις γιὰ τοὺς ἀριθμοὺς ἐκτίθενται στὴν πραγματεία τοῦ Νικομάχου τοῦ Γερασηνοῦ (τὸ 100 μ.Χ.). Κατὰ τὸν συγγραφέα ἡ μονάδα εἶναι ἀπὸ τὴ φύση τῆς ἄτομος[86], ἐνῶ ἡ γένεση τῶν ἀριθμῶν, τῶν γεωμετρικῶν σχημάτων καὶ τῶν φυσικῶν σωμάτων ἀκολουθεῖ τὴν ἴδια ἀκριβῶς προγενέστερη διαδοχή[87].

«ἔσται οὖν ἡ μὲν μονὰς σημείου τόπον ἐπέχουσα καὶ τρόπον ἀρχὴ μὲν διαστημάτων καὶ ἀριθμῶν, οὔπω δὲ διάστημα οὐδὲ ἀριθμός, ὡς τὸ σημεῖον ἀρχὴ μὲν γραμμῆς καὶ διαστήματος, οὔπω δὲ γραμμὴ οὐδὲ διάστημα· ἀμέλει οὔτε σημείῳ σημεῖον συντεθὲν πλεῖόν τι ποιεῖ, ἀδιάστατον γὰρ ἀδιαστάτῳ συντεθὲν διάστημα οὐχ ἕξει, ὥσπερ εἴ τις τὸ οὐδὲν οὐδενὶ συντεθὲν σκέπτοιτο, οὐδὲν γὰρ ποιεῖ· κατὰ ταυτὰ γὰρ ἐφαίνετο καὶ ἐπὶ τῆς ἰσότητος ἡμῖν ἐν ταῖς σχέσεσι, σώζεται μὲν γὰρ ἀναλογία, ὡς ὁ πρῶτος πρὸς τὸν δεύτερον, οὕτως ὁ δεύτερος πρὸς τὸν τρίτον, οὐ μὴν διάστημα γεννᾶταί τι τοῖς ἄκροις πρὸς ἀλλή-

---

82. Ἀριστοτελογς, *Περὶ ἀτόμων γραμμῶν*, 971 b 2.

83. Σεξτογ Εμπειρικογ, *ἔνθ' ἀν.*, 430, 1-7.

84. Πβ. καὶ τὴν ἑρμηνεία τοῦ Πρόκλου στὰ *Σχόλιά* του στὸ Βιβλίο I τοῦ Εὐκλείδη, γιὰ τὰ πρῶτα τρία αἰτήματα, θεωρεῖ πὼς τὸ νὰ ἀχθεῖ μία εὐθεία γραμμὴ ἀπὸ ἕνα σημεῖο σὲ ἕνα ἄλλο εἶναι συνέπεια τοῦ ὅτι ἡ γραμμὴ εἶναι ἡ ροὴ ἑνὸς σημείου, ἡ εὐθεία γραμμὴ εἶναι ἡ ροὴ τοῦ ἐπιπέδου, ἂν καὶ ἡ εἰσαγωγὴ τῆς κίνησης στὴ γεωμετρία δὲν εἶναι τόσο ἁπλῆ: «εἰ δὲ τις ἀποροίη, πῶς κινήσεις ἐπεισάγομεν τοῖς γεωμετρικοῖς οἶσιν, πῶς δὲ τὰ ἀμερῆ κινοῦμεν, ταῦτα γὰρ ἀδύνατα εἶναι παντελῶς» (185: 25 – 186:2).

85. Σεξτογ Εμπειρικογ *ἔνθ' ἀν.*, $281^1 – 282^8$.

86. Νικομαχογ Γερασηνογ, *Ἀριθμητικὴ εἰσαγωγή*, «τὴν φύσει ἄτομον μονάδα...» 13,13.

87. Πβ. ἐπίσης τὸν Θέωνα τὸν Σμυρναῖον, ὁ ὁποῖος ὅμως, στὴν πραγματεία του Πλατωνικοῦ, *Τῶν κατὰ τὸ μαθηματικὸν χρησίμων εἰς τὴν Πλάτωνος ἀνάλυσιν*, ἀντιστοιχεῖ στὸ σημεῖο τὴν πρώτη διάσταση καὶ στὸν χῶρο τὴν τέταρτη διάσταση «τὸ μὲν σπέρμα ἀνάλογον μονάδι καὶ σημείῳ ἡ δὲ εἰς μῆκος αὔξη δυάδι καὶ γραμμῇ, ἡ δὲ εἰς πλάτος τριάδι καὶ ἐπιφανείᾳ, ἡ δὲ εἰς πάχος τετράδι καὶ στερεῷ». 97, 17. Hiller Leipzig, 1878. Πβ. ἐπίσης καὶ τὴν ἔκδοση ἀπὸ Ε. Σπανδάγο, Ἀθήνα, Αἴθρα, 2003. Θυμίζουμε πὼς τόσο στοὺς πυθαγορείους, ὅσο καὶ στοὺς πλατωνικούς, ἡ μονάδα δὲν θεωρεῖτο ἀριθμός. Ἡ παράδοση αὐτὴ διατηρήθηκε μέχρι τὸν Simon Stevin, ὁ ὁποῖος στὴν ἀρχὴ τοῦ βιβλίου του *Ἀριθμητικὴ* (1585) γράφει μὲ κεφαλαῖα γράμματα: «Η ΜΟΝΑΔΑ ΕΙΝΑΙ ΑΡΙΘΜΟΣ (L'UNITÉ EST NOMBRE)».

λους, ὥσπερ ἐπὶ τῶν ἄλλων τῶν χωρὶς ἰσότητος σχέσεων πασῶν· τὸν αὐτὸν δὴ τρόπον καὶ μονὰς ἐκ παντὸς μόνη τοῦ ἀριθμοῦ ἑαυτῶν πολλαπλασιάσασα οὐδὲν πλέον ἑαυτῆς γεννᾷ. ἀδιάστατος ἄρα ἡ μονὰς καὶ ἀρχοειδής, πρῶτον δὲ διάστημα εὑρίσκεται καὶ φαίνεται ἐν δυάδι, εἶτ' ἐν τριάδι, εἶτα ἐν τετράδι καὶ ἑξῆς ἐν τοῖς ἀκολούθοις· διάστημα γάρ ἐστι δυεῖν ὅρων τὸ μεταξὺ θεωρούμενον. πρῶτον δὲ διάστημα γραμμὴ λέγεται, γραμμὴ γάρ ἐστι τὸ ἐφ' ἓν διαστατόν· δύο δὲ διαστήματα ἐπιφάνεια, ἐπιφάνεια γάρ ἐστι τὸ διχῇ διαστατόν· τρία δὲ διαστήματα στερεόν, στερεόν γάρ ἐστι τὸ τριχῇ διαστατόν»[88].

«Ἔστιν οὖν σημεῖον ἀρχὴ διαστήματος, οὐ διάστημα δέ, τὸ δ' αὐτὸ καὶ ἀρχὴ γραμμῆς, οὐ γραμμὴ δέ· καὶ γραμμὴ ἀρχὴ ἐπικρατείας, οὐκ ἐπιφάνεια δέ, καὶ ἀρχὴ τοῦ διχῇ διαστατοῦ, οὐ διχῇ δὲ διαστατόν. καὶ εἰκότως ἡ ἐπιφάνεια ἀρχὴ μὲν σώματος, οὐ σῶμα δέ, καὶ ἡ αὐτὴ ἀρχὴ μὲν τοῦ τριχῇ διαστατοῦ, οὐ τριχῇ δὲ διαστατόν. Οὕτως δὴ καὶ ἐν τοῖς ἀριθμοῖς ἡ μὲν μονὰς ἀρχὴ παντὸς ἀριθμοῦ ἐφ' ἓν διάστημα κατὰ μονάδα προβιβαζομένου, ὁ δὲ γραμμικὸς ἀριθμὸς ἀρχὴ ἐπιπέδου ἀριθμοῦ ἐφ' ἕτερον διάστημα, ἐπιπέδως πλατυνομένου, ὁ δὲ ἐπίπεδος ἀριθμὸς ἀρχὴ στερεοῦ ἀριθμοῦ ἐπὶ τρίτον διάστημα πρὸς τὰ ἐξ' ἀρχῆς βάθος τι προσκτωμένου»[89].

X. Οἱ ἀπόηχοι στὸν 16ο αἰώνα. Ἡ θεωρία τῶν περάτων, καθὼς καὶ θεωρία τῶν ροῶν, θὰ ἐμφανισθοῦν στὸν ἕναν ἀπὸ τοὺς δημιουργοὺς τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ, στὸν I. Newton. Στὴν *Πραγματεία γιὰ τὸν τετραγωνισμὸ τῶν Καμπύλων*, δηλώνει, ἀναφερόμενος στοὺς ἀρχαίους, πὼς θεωρεῖ τὶς μαθηματικὲς ποσότητες ὅτι γεννῶνται μὲ συνεχῆ κίνηση, οἱ γραμμὲς γεννῶνται μὲ τὴ συνεχῆ κίνηση τῶν σημείων, οἱ ἐπιφάνειες ἀπὸ τὴν κίνηση τῶν γραμμῶν, τὰ στερεὰ ἀπὸ τὴν κίνηση τῶν ἐπιφανειῶν. ...Αὐτὲς οἱ γεννήσεις βρίσκονται στὴ φύση, καὶ εἶναι καθημερινὰ ὁρατὲς στὴν κίνηση τῶν σωμάτων»[90].

Ἀργότερα ὁ D' Alembert στὸ λῆμμα του *σημεῖο* στὴν *Ἐγκυκλοπαίδεια* θὰ ὑπογραμμίσει τὴν θεωρία τῶν περάτων, ἡ ὁποία εἶναι σύμμορφη μὲ τὴν ἀφαιρετικὴ θεώρηση τῆς γεωμετρίας. Τὰ σημεῖα, οἱ εὐθεῖες καὶ οἱ ἐπιφάνειες «ὑπάρχουν» καὶ εἶναι τὰ πέρατα τῶν ἀντιστοίχων μεγαλύτερης διάστασης σχημάτων.

«Ἂν θεωρήσουμε ὅτι ἕνα σημεῖο ρέει, θὰ γράψει μιὰ γραμμή. Μιὰ γραμμὴ ἡ ὁποία ρέει θὰ παράγει μιὰ ἐπιφάνεια κλπ. Αὐτὸς ὁ τρόπος θεώρησης τῆς γένεσης τῶν διαστάσεων ἢ τῶν ἰδιοτήτων τῶν σωμάτων, φαίνεται ὅτι εἶναι ἡ πρώτη βάση τῆς σύγχρονης γεωμετρίας, δηλαδὴ τῆς ἀναλυτικῆς γεωμετρίας, ἡ ὁποία χρησιμοποιεῖ τὸν διαφορικὸ καὶ ὁλοκληρωτικὸ λογισμό»[91].

XI. Ὁ Henri Poincaré καὶ ἡ δημιουργία τῆς θεωρίας τῆς διάστασης. Στὰ πρῶτα χρόνια τοῦ 20ου αἰώνα ἐμφανίζονται οἱ σύγχρονες ἰδέες γιὰ τὴν θεωρία τῆς διάστασης ἀπὸ τὸν μεγάλο γάλλο μαθηματικὸ καὶ φιλόσοφο H. Poincaré[92] (1854-1912).

---

88. Νικομαχου Γερασηνου, *Ἀριθμητικὴ εἰσαγωγὴ στ'*. Πβ. ἐπίσης καὶ ἐκδ. Αἴθρα, Ἀθήνα, 2001, Εἰσαγωγὴ – Ἀρχαῖο Κείμενο – Μεταγραφὴ – Ἐπεξηγήσεις – Σχόλια – Ἱστορικὰ Στοιχεῖα, Ε. Σπανδάγος.

89. *Αὐτόθι*, ζ'.

90. I. Newton, *Tractatus de Quadratura Curvarum:* «Lineae describuntur ac describendo generantur non per appositionem partium, sed per motum continuum punctorum... Hae geneses in rerum natura locum vere habent et in motu corporum quotidie cernuntur», ἐκδ. Amsterdam, 1823, σ. 43.

91. «Si l'on se représente qu'un point coule, il tracera une ligne & une ligne qui couleroit engenderoit une surface & cette manière de considérer la génération des dimensions ou des propriétés des corps, paroit être le premier fondement de la Géométrie moderne, c'est-à-dire de la Géométrie analytique qui fait usage du calcul déffférentiel et intégral».

92. A. Bellivier, *Henri Poincaré, ou la vocation souveraine*. Paris, 1956.

Δύο θεωρίες διάστασης παρουσιάζει ὁ Poincaré. Υἱοθετώντας τὶς θεωρήσεις γιὰ τὴ γεωμετρία τῶν Helmholtz, Klein καὶ Lie, θὰ δηλώσει πὼς «ἡ Γεωμετρία δὲν εἶναι τίποτα ἄλλο παρὰ ἡ μελέτη μιᾶς ὁμάδας»[93], θὰ θεμελιώσει τὴν πρώτη του θεωρία διάστασης στὴ θεωρία ὁμάδων. Ἡ δεύτερη θεωρία του θὰ ἔχει τοπολογικὸ χαρακτήρα καὶ θὰ ἐπηρεάσει τὴν ὅλη μεταγενέστερη ἐξέλιξη τῆς θεωρίας τῆς διάστασης.

Στὸ πρῶτο τεῦχος τοῦ νεοϊδρυόμενου περιοδικοῦ *Revue de Métaphysique et Morale* ὁ Poincaré παρουσιάζει ἕνα ἐνδιαφέρον ἄρθρο σχετικὰ μὲ τὸ *Μαθηματικὸ Συνεχές*[94], ὅπου ἑρμηνεύει τὶς ἔννοιες τοῦ φυσικοῦ καὶ μαθηματικοῦ συνεχοῦς. Αὐτὰ τὰ συνεχῆ εἶναι γραμμικά, ἢ διάστασης 1.

Δύο χρόνια μετά, ἐκθέτει[95] γιὰ πρώτη φορὰ τὶς θεωρήσεις γιὰ τὴ διάσταση τοῦ χώρου, ἡ ὁποία βασίζεται στὴ θεωρία τῶν συνεχῶν ὁμάδων τοῦ Lie, καὶ οἱ ὁποῖες προκάλεσαν τὴν ἔντονη κριτικὴ τοῦ Louis Couturat[96]. Ἡ ἀπάντηση τοῦ Poincaré θὰ δοθεῖ τὸ 1898 σ' ἕνα ἄρθρο του γιὰ τὴ θεμελίωση τῆς Γεωμετρίας ὅπου σημειώνει: «ἐπιλέξαμε τὴ διάσταση τοῦ χώρου μας νὰ εἶναι 3, γιατί εἶναι ὁ μικρότερος ἀριθμὸς καὶ γιατὶ ἡ ἀντιστοιχοῦσα ὑποομάδα συνδέεται μὲ τὶς ἐμπειρικὲς ἰδέες τοῦ τόπου καὶ τοῦ σημείου»[97]. Μάλιστα τονίζει πὼς ἡ ἐμπειρία μᾶς ὁδήγησε νὰ ἐπιλέξουμε τὸ σημεῖο ὡς βασικὸ στοιχεῖο τοῦ χώρου.

Σαφῶς οἱ μαθηματικὲς θεωρήσεις τοῦ Poincaré βασιζόμενες στὴ θεωρία ὁμάδων παρουσιάζουν ἐξαιρετικὸ μαθηματικὸ ἐνδιαφέρον, ἐνῶ οἱ φιλοσοφικὲς ἀπόψεις του δὲν εἶναι ἐντελῶς ἱκανοποιητικές.

Ἡ πρώτη του θεωρία, που ἔχει στηριχθεῖ, στὴν ὁμάδα μετατοπίσεων, ἀποτελεῖ μιὰ «δυναμικὴ θεωρία». Τὸ 1903 παρουσιάζει[98] μιὰ καινούργια ἑρμηνεία γιὰ τὴν ἔννοια τῆς διάστασης συλλαμβάνοντας μιὰ «στατικὴ θεωρία» στὴν ὁποίαν θὰ δώσει τὴν πιὸ ἐκτεταμένη μορφή της τὸ 1912, στὸ κλασικὸ ἄρθρο του[99]: *Γιατί ὁ χῶρος ἔχει τρεῖς διαστάσεις;*

Αὐτὰ τὰ δύο κείμενα τοῦ Poincaré περιέχουν τὴν ἀναθεωρημένη φιλοσοφική του θεώρηση γιὰ τὴ γένεση τῆς τρισδιάστατης γεωμετρίας. Ἡ θεώρησή του αὐτὴ ἀποτελεῖ μιὰ τοπολογικὴ θεωρία ἡ ὁποία βασίζεται στὴν ἔννοια τῆς τομῆς (coupure). Ἡ τοπολογικὴ αὐτὴ προσέγγιση εἶναι ἐκείνη ποὺ θὰ συμβάλει στὴν ἑρμηνεία τῆς ἔννοιας τῆς διάστασης καθὼς μάλιστα τὴν ἴδια ἐποχὴ[100] ὁ Poincaré θὰ παρουσιάσει τὰ σημαντικά του κείμενα γιὰ τὴν τοπολογία[101], Analysis Situs, ὅπως τὴν ὀνόμαζε τότε.

---

93. H. Poincaré, Sur les hypothèses fondamentales de la Géométrie, *Bull. soc. Math. France*, 15 1887, σ. 215.

94. H. Poincaré, Le continu Mathématique, *Revue de Métaphysique et Morale* (1) 1893, σσ. 26-34.

95. L'Espace et la Géométrie, *ἔνθ' ἀν.*, 3 1895, σσ. 631-646.

96. Études sur l'espace et le temps de MM Lechalas, Poincaré, Delbœuf, Bergson, L. Weber et Evellin, *ἔνθ' ἄν.*, 4, 1896, σσ. 646-669.

97. On the Foundations of Geometry, *The Monist* (1), 1898, σ. 24.

98. L'espace et ses trois dimensions, *Revue de Métaphysique et Morale*, 11, 1903, σσ. 282-301, καὶ σσ. 407-429.

99. Pourquoi l'espace a trois dimensions? *ἔνθ' ἀν.*, 20, 1912, σσ. 483-504.

100. Θὰ θέλαμε νὰ ὑπογραμμίσουμε πὼς τότε ὁ D. Hilbert δημοσιεύει τὸ βαθυστόχαστο ἄρθρο του γιὰ τὴ θεμελίωση τῆς Γεωμετρίας, Grundlagen der Geometrie καὶ αὐτὸ ὁδηγεῖ τὸν Poincaré νὰ παραμερίσει τὶς θεωρήσεις του γιὰ τὴ γεωμετρία βασιζόμενη στὴ θεωρία ὁμάδων, ὅμως δὲν ἀκολουθεῖ τὴ λογικὴ ἢ ἀξιωματικὴ προσέγγιση τοῦ Hilbert, ἀλλὰ προσανατολίζεται νὰ χρησιμοποιήσει τὴν τοπολογία ὡς «βάση» τῆς γεωμετρίας.

101. Analysis Situs, *Journal de l'École Polytechnique* 2 (1), 1895, σσ. 1-121. Complément à l'Analysis Situs. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo* 13, 1899, σσ. 285-343. Second Complément à l'Analysis Situs. *Proc. of the London Math. Soc.* 32 1900 - σσ. 277-308. Cinquième Complément à l'Analysis Situs. *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 18, 1904 σσ. 43-110.

Τόσο ἡ μελέτη του[102] τοῦ 1903 ὅσο καὶ ἡ μελέτη τοῦ 1912 ἔχουν τὸν ἴδιο πρωταρχικὸ στόχο: τὴν ἑρμηνεία τοῦ τρισδιάστατου τοῦ χώρου.

Ὅμως μεταξὺ τῶν δύο αὐτῶν κειμένων ὁ Poincaré δημοσιεύει ἕνα βιβλίο μὲ τίτλο *Ἡ ἀξία τῆς Ἐπιστήμης*[103] ὅπου ἀναφέρει χαρακτηριστικά: «Ἀπ᾽ ὅλα τὰ θεωρήματα τῆς τοπολογίας[104] τὸ πιὸ σημαντικὸ εἶναι ἐκεῖνο ποὺ ἐκφράζει ὅτι ὁ χῶρος ἔχει τρεῖς διαστάσεις... Τί ἐννοοῦμε ὅταν λέμε ὅτι ὁ χῶρος ἔχει τρεῖς διαστάσεις; ... ἂν, γιὰ νὰ διαιρέσουμε ἕνα συνεχές, ἀρκεῖ νὰ θεωρήσουμε ὡς τομὲς ἕναν κάποιο ἀριθμὸ στοιχείων, τὰ ὁποῖα μποροῦν νὰ εἶναι διακεκριμένα μεταξύ τους, θὰ λέμε ὅτι αὐτὸ τὸ συνεχὲς ἔχει διάσταση 1. Ἀντίθετα γιὰ νὰ διαιρέσουμε ἕνα συνεχὲς εἶναι ἀπαραίτητο νὰ θεωρήσουμε ὡς τομὲς ἕνα σύστημα στοιχείων, τὰ ὁποῖα νὰ σχηματίζουν ἕνα ἢ κάποια συνεχῆ, θὰ λέμε τότε ὅτι αὐτὸ τὸ συνεχὲς εἶναι κάποιων διαστάσεων.

Ἂν, γιὰ νὰ διαιρέσουμε ἕνα συνεχὲς C, οἱ τομὲς σχηματίζουν ἕνα ἢ κάποια συνεχῆ μιᾶς διάστασης, ἀρκεῖ νὰ λέμε ὅτι τὸ C εἶναι συνεχὲς δύο διαστάσεων, ἂν οἱ τομὲς ποὺ σχηματίζουν ἕνα ἢ περισσότερα συνεχῆ τὸ πολὺ δύο διαστάσεων, ἀρκεῖ νὰ λέμε ὅτι τὸ C εἶναι, συνεχὲς τριῶν διαστάσεων κ.ο.κ.

Γιὰ νὰ δικαιολογήσουμε αὐτὸν τὸν ὁρισμό, πρέπει νὰ δοῦμε ἂν μὲ αὐτὸ τὸν τρόπο οἱ γεωμέτρες εἰσήγαγαν τὴν ἔννοια τῶν τριῶν διαστάσεων στὴν ἀρχὴ τῶν ἔργων τους. Τὸ παρατηροῦμε τώρα; Συνήθως ὅπως εἴδαμε ἀρχίζουν ὁρίζοντας ἐπιφάνειες ὡς πέρατα στερεῶν ἢ τμήματα τοῦ χώρου, εὐθεῖες γραμμὲς ὡς πέρατα ἐπιφανειῶν, σημεῖα ὡς πέρατα γραμμῶν, καὶ βεβαιώνουν ὅτι αὐτὴ ἡ διαδικασία δὲν μπορεῖ νὰ προχωρήσει περισσότερο.

Εἶναι ἀκριβῶς ἡ ἰδέα ποὺ παρουσιάστηκε πιὸ πάνω: γιὰ τὴ διαίρεση τοῦ χώρου, εἶναι ἀπαραίτητες οἱ τομές, οἱ ὁποῖες ὀνομάζονται ἐπιφάνειες, γιὰ τὴ διαίρεση τῶν ἐπιφανειῶν εἶναι ἀπαραίτητες οἱ τομές οἱ ὁποῖες ὀνομάζονται σημεῖα. Δὲν μποροῦμε νὰ προχωρήσουμε περισσότερο, τὸ σημεῖο δὲν μπορεῖ νὰ διαιρεθεῖ[105] ἄρα τὸ σημεῖο δὲν εἶναι συνεχές. Τότε οἱ γραμμὲς οἱ ὁποῖες δὲν μποροῦν νὰ διαιρεθοῦν μὲ τομές, ποὺ δὲν εἶναι συνεχῆ, θὰ εἶναι συνεχῆ διάστασης 1. Οἱ ἐπιφάνειες, οἱ ὁποῖες δὲν μποροῦν νὰ διαιρεθοῦν μὲ συνεχεῖς τομὲς μιᾶς διάστασης θὰ εἶναι συνεχῆ δύο διαστάσεων. Τελικὰ ὁ χῶρος, ὁ ὁποῖος μπορεῖ νὰ διαιρεθεῖ μὲ συνεχεῖς τομές δύο διαστάσεων, θὰ εἶναι ἕνα συνεχὲς τριῶν διαστάσεων.

Ἔτσι ὁ ὁρισμὸς τὸν ὁποῖον μόλις ἔδωσα δὲν διαφέρει βασικὰ ἀπὸ τοὺς συνηθισμένους ὁρισμούς»[106].

Ὁ Poincaré ὁμολογεῖ πὼς ἀκολουθεῖ τοὺς παραδοσιακοὺς ὁρισμοὺς τῶν βασικῶν στοιχείων τῆς γεωμετρίας, καὶ στὸ ἄρθρο του τοῦ 1912 θὰ ἐπανέλθει.

Τὸ παράδοξο τοῦ Cantor γιὰ τὴν ἰσοδυναμία τῶν συνεχῶν διαφόρων διαστάσεων μὲ τὴν 1-1 ἀντιστοιχία ἀναφέρεται ἀπὸ τὸν Poincaré στὸ ἄρθρο του τοῦ 1912, καὶ τὸ καταρρίπτει ὑπογραμμίζοντας πὼς ἡ ἀντιστοιχία τοῦ Cantor δὲν εἶναι συνεχής[107]. Μετὰ ὁρίζει τὸ συ-

102. Πβ. H. Poincaré, La Relativité de l'espace, *L'Année Psychologique* 13, 1907, σσ. 1-17.

103. *La Valeur de la Science,* 1905 Paris.

104. Χρησιμοποιεῖ τὴν ὀνομασία Analysis Situs.

105. Πβ. τὸ σκεπτικὸ τοῦ Σέξτου Ἐμπειρικοῦ «πρόβλημά ἐστι τὸν κύκλον δίχα τεμεῖν· ὅπερ ἐστιν ἀδύνατον. τὸ γὰρ κέντρον, ὅπερ παντός τοῦ κύκλου μεσαίτατόν ἐστιν, ἤτοι δίχα τέμνηται κατὰ τὴν τοῦ κύκλου διχοτόμησιν ἢ τῷ ἑτέρῳ προσμερίζεται τμήματι. ἀλλὰ δίχα μὲν τμηθῆναι τῶν ἀδυνάτων· πῶς γὰρ οἷόν τε τὸ ἀμερὲς ἐπινοεῖν μεριζόμενον; εἰ δὲ τῷ ἑτέρῳ προσμερίζεται τμήματι, ἄνισα γίνεται τὰ τμήματα καὶ ὁ κύκλος οὐ μέσος διαιρεῖται» *Πρὸς Λογικούς*, IX 284 H. Mutschman, 1914.

106. H. Poincaré, *La valeur de la Science* n.d., Paris, σσ. 75-76.

107. Σημαντικὴ εἶναι ἡ «διατύπωση» τοῦ ἀναλλοίωτου γιὰ τὴ θεωρία διάστασης: «Μπο-

νεχὲς διάστασης 1. Μιὰ ἁπλὴ κλειστὴ καμπύλη, ἕνα τυπικὸ συνεχὲς διάστασης 1, μπορεῖ νὰ τμηθεῖ σὲ δύο μέρη ἀπὸ ὁποιοδήποτε ζεῦγος σημείων τῆς καμπύλης. Δὲν μποροῦμε νὰ περάσουμε ἀπὸ τὸ ἕνα τμῆμα στὸ ἄλλο παρὰ μόνο περνώντας ἀπὸ ἕνα ἀπὸ τὰ σημεῖα τομῆς. Γιὰ τὸν τρισδιάστατο χῶρο χρειάζονται δισδιάστατες κλειστὲς ἐπιφάνειες, γιὰ νὰ διαιρέσουμε τὸν χῶρο σὲ τμήματα. Ὁ ὁρισμὸς τοῦ ν-διάστατου συνεχοῦς ἀκολουθεῖ:

«Ἕνα συνεχὲς ἔχει ν διαστάσεις ὅταν μποροῦμε νὰ τὸ ἀναλύσουμε σὲ πολλὰ τμήματα ἐφαρμόζοντας μία ἢ πολλὲς τομές, ποὺ οἱ ἴδιες εἶναι συνεχῆ ν-1 διαστάσεων. Ἔτσι ορίζεται τὸ ν-διάστατο συνεχὲς μὲ τὸ ν-1 διαστάσεων συνεχές. Αὐτὸ ἀποτελεῖ ἕναν ἀναδρομικὸ ὁρισμό.

Αὐτὸ ποὺ ἐμπιστεύομαι σ' αὐτὸν τὸν ὁρισμό... εἶναι πρῶτα ὅτι πολλοὶ συγγραφεῖς στοιχειωδῶν πραγματειῶν... στὴν ἀρχὴ τῶν βιβλίων τους παρουσίασαν κάτι ἀνάλογο»[108].

Ὁ Poincaré δὲν ἀναφέρεται εἰδικὰ στὸν Εὐκλείδη, ὅμως ἀπὸ τὴν ὁμάδα II τῶν ὁρισμῶν ποὺ παρουσιάσαμε πρίν, εἶναι φανερὸ ὅτι, ἂν ἀντικαταστήσουμε τὴν ἔννοια του πέρατος, μὲ τὴν ἔννοια της τομῆς, τὴν ὁποία χρησιμοποιεῖ ὁ Poincaré, τότε ὁ Εὐκλείδης μᾶς ἀνοίγει τὸν δρόμο τῆς σύγχρονης τοπολογίας.

Γιὰ τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνες ὁ γεωμετρικὸς χῶρος δὲν εἶναι παρὰ ἡ νοητικὴ ἀφαίρεση τοῦ αἰσθητοῦ χώρου καὶ φυσικὰ δὲν θὰ μποροῦσαν νὰ θεωρήσουν ὅτι ὁ χῶρος ἔχει διάσταση μεγαλύτερη τοῦ τρία.

Ὁ χῶρος ἀπὸ ἔννοια sensorium Dei μετατρέπεται σταδιακὰ σὲ ἔννοια sensorium hominis, ἡ ὁποία τόσο στὴν προευκλείδεια φάση ὅσο καὶ στὴν εὐκλείδεια ὁδηγεῖ σὲ μιὰ σαφῆ ἑρμηνεία του, προμήνυμα τῆς σύγχρονης θεωρίας τῆς διάστασης, ὅπως θὰ τὴν διατυπώσει ὁ Poincaré.

Χ.Π. ΦΙΛΗ
(Ἀθῆναι)

ροῦμε νὰ παραμορφώσουμε τὸ ἐπίπεδο μὲ τέτοιο τρόπο ὥστε νὰ λάβουμε μία εὐθεῖα, ἀρκεῖ αὐτὴ ἡ παραμόρφωση νὰ μὴν εἶναι συνεχής. Ἔτσι τὸ πρόβλημα τοῦ ἀριθμοῦ τῶν διαστάσεων εἶναι στενὰ συνδεδεμένο μὲ τὴν ἔννοια τῆς συνέχειας...» H. POINCARÉ, *ἔνθ' ἀν.*, σ. 486.

108. H. POINCARÉ, *ἔνθ' ἀν.*, σ. 488.