Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens

Η ΕΝΝΟΙΑ ΤΗΣ ΣΥΝΕΧΕΙΑΣ: ΑΠΟ ΤΟΝ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗ ΣΤΟΝ DEDEKIND*

Οἱ μαθηματικὲς θεωρήσεις τοῦ Ἀριστοτέλη ἔχουν μελετηθεῖ ἀπὸ πολλοὺς καὶ διακεκριμένους ἐπιστήμονες[1]. Ἂν καὶ δὲν παρουσίασε συστηματικὲς πραγματεῖες, ὁ Σταγειρίτης μελέτησε τὶς βασικὲς ἀρχὲς τῶν Μαθηματικῶν.

Πραγματεύεται πολλὰ προβλήματα καὶ θέματα ὅπως π.χ. τὸ κλασικὸ πρόβλημα τοῦ τετραγωνισμοῦ τοῦ κύκλου γιὰ τὸ ὁποῖο μάλιστα ἐκφράζει τὶς προφητικὲς ἀμφιβολίες του «εἰ καὶ τετραγωνίζεται ὁ κύκλος», ἐνῶ διατυπώνει καὶ τὶς πρῶτες ἀμφισβητήσεις[2] γιὰ τὴν μοναδικότητα τοῦ Εὐκλειδείου οἰκοδομήματος, οἱ δὲ θεωρήσεις του γιὰ τὰ δύο εἴδη ἀπείρου τροφοδότησαν πολλὲς σημαντικὲς μελέτες.

Μάλιστα ἕνας ἀπὸ τοὺς μεγαλύτερους ἱστορικοὺς τῶν Μαθηματικῶν[3], ὁ M. Cantor[4] (1829-1920), μὲ τὴν ἀνακοίνωσή του στὸ Διεθνὲς Συνέδριο τῆς Φιλοσοφίας τὸ 1901 στὸ Παρίσι, παρουσιάζοντας σύγχρονες θεωρήσεις γιὰ τὸν Σταγειρίτη ἀναφέρει: «Τὸ ἄπειρο δὲν εἶναι μιὰ σταθερὴ κατάσταση, ἀλλὰ αὐτὴ καθ' αὐτὴ ἡ αὔξηση καὶ τὸ συνεχὲς εἶναι ἡ ἰδιότητα τῶν διαδοχικῶν τμημάτων νὰ κατέχουν τὸ ἕνα καὶ τὸ ἄλλο τὴν ἴδια ἄκρη ἀπ' ὅπου ἀγγίζονται»[5].

Πάντως ὁ Ἀριστοτέλης, ἀντίθετα ἀπὸ τὸν Πλάτωνα[6], δὲν ἀσχολήθηκε μὲ τὴν μαθηματικὴ θεώρηση τοῦ ἀπείρου «αὕτη μὲν καθόλου ἡ ζήτησις»[7]. Ἀλλὰ καθὼς τὸ ἄπειρο χρειάζεται τὸ νοητὸ γιὰ νὰ πραγματωθεῖ, ἡ ἔννοια τοῦ συνεχοῦς συμπλέκεται μὲ τὴν ἔννοια τοῦ ἀπείρου.

Ὅμως τόσο ὁ ὁρισμὸς τῆς συνέχειας ὅσο καὶ ὁ ὁρισμὸς τοῦ πέρατος, τοῦ ὁρίου, δὲν μπόρεσαν νὰ εἶναι χρήσιμοι γιὰ τὰ Μαθηματικὰ καθὼς ἀνήκουν σὲ πραγματεῖες οἱ ὁποῖες σὲ ὑψηλὸ βαθμὸ καλλιεργοῦν μιὰ μεταφυσική[8].

---

* Μνήμη Volodia Kirsanov.

1. Πβ. BLANCANUS, *Aristote loca mathematica ex universis ipsius operibus collecta et explicata*, Bononia, 1615· H. HANKEL, *Zur Geschichte der Mathematik*, Leipzig, 1874· GÖRLAND, *Aristoteles und die Mathematik*, Marburg, 1899· M. CANTOR, *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik* Aufl. Teubner Leipzig, 1894[2], Bd. I.· T. L. HEATH, *Mathematics in Aristotle*, Oxford University Press, 1949· H. G. APOSTLE, *Aristotle's Philosophy of Mathematics*, University of Chicago Press, 1952· I. TÓTH, Das Parallelenprobleme in Corpus Aristotelicum, *Archive History of Exact Sciences*, 1967, 3, N. 4/5, σσ. 249-422.

2. I. TÓTH, *ἔνθ' ἀν.*

3. Πβ. μερικὰ ἀπὸ τὰ ἔργα του: *Mathematische Beiträge zur Kulturleben der Völker* (1863), *Die römischen Agrimensoren und ihre Stellung in der Geschichte der Feldmerskunst* (1875), *Politische Arithmetik oder die Arithmetik des täglichen Lebens* (1898).

4. M. CURTZE, Verzeichnis der mathematischen Werke. Abhandlungen und Recensionen des Hofrat Professor Dr. Moritz Cantor, *Abh. Gesch. Math.*, Bd 9, 1899, σσ. 625-650.

5. Bibliothèque du Congrès International de Philosophie, t. III, Paris, 1901, σ. 6.

6. Πβ. τὸν πλατωνικὸ *Φίληβο.*

7. ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΟΥΣ, *Φυσικά*, 204a 34.

8. L. BRUNSCHVICG, *Les Étapes de la Philosophie Mathématique*, Paris, Blanchard, nouv. tirage 1972, σσ. 155-156.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens

Ἡ ἔννοια τῆς συνέχειας, τόσο σημαντικῆς στὴν ἀνάλυση, ἀπασχόλησε ἤδη τοὺς μαθηματικοὺς τοῦ 18ου αἰώνα, ἂν καὶ δὲν ἀποτελοῦσε ἀντικείμενο ἔρευνάς τους, ἀφοῦ τὴν θεωροῦσαν μιὰ «φυσιολογικὴ» ἰδιότητα γιὰ τὴν ὁποία δὲν ἀπαιτεῖται καμμιὰ ἀπόδειξη. Ἀργότερα ὅταν ὁ ὁρισμὸς τῆς συνάρτησης μεταβλήθηκε καὶ θεωρήθηκε ὡς μιὰ «ὀντότητα» ὁρισμένη ἀπὸ μιὰ ἀναλυτικὴ ἔκφραση, ἡ ἔννοια τῆς συνέχειας «μετακινήθηκε» ἀπὸ τὴν συναρτησιακὴ σχέση στὴν ἔκφρασή της.

Στὶς ἀρχὲς τοῦ 19ου αἰώνα οἱ μαθηματικοὶ συνειδητοποιοῦν πὼς καὶ ἡ ἀσυνέχεια εἶναι σημαντικὴ γιὰ τὰ Μαθηματικά. Ἀλλὰ τότε ἔχει γίνει πιὰ φανερὴ ἡ σχέση τῆς παραγώγισης μὲ τὴν συνέχεια.

Ὁ S. Lacroix ποὺ ἀφιέρωσε ὅλη του τὴ ζωὴ στὴ διδασκαλία καὶ στὴν συγγραφὴ βιβλίων γιὰ τὰ Μαθηματικά[9], στὸ κλασικό του σύγγραμμα γιὰ τὸν ἀπειροστικὸ λογισμό, ὅπου ἐπιχειρεῖ νὰ ἐκθέσει τὶς σύγχρονες θεωρήσεις, ἀναφέρει: «Ὡς νόμο τῆς συνέχειας πρέπει νὰ ἐννοήσουμε ἐκεῖνον ποὺ παρατηρεῖται στὴν περιγραφὴ τῆς γραμμῆς τῆς προερχόμενης ἀπὸ κίνηση, τοῦ σημείου μὲ τὸ ὁποῖο τὰ συνεχόμενα σημεῖα τῆς εὐθείας διαδέχονται τὸ ἕνα τὸ ἄλλο, χωρὶς κανένα διάστημα. Ὁ τρόπος θεώρησης τῶν μεγεθῶν στὸν ἀπειροστικὸ λογισμὸ δὲν φαίνεται νὰ ἀποδέχεται αὐτὸν τὸν νόμο, ἀφοῦ πάντα θεωρεῖ ἕνα διάστημα ἀνάμεσα σὲ δύο διαδοχικὲς τιμὲς τῆς ἴδιας ποσότητας. Ἀλλὰ ὅσο αὐτὸ τὸ διάστημα εἶναι μικρὸ τόσο πλησιάζουμε τὸν νόμο τῆς συνέχειας στὸν ὁποῖο τὸ ὅριο ταιριάζει ἀπόλυτα»[10]. Γιὰ τὸν Lacroix ἡ συνέχεια ἑρμηνεύει ἁπλὰ τὴ φύση τῶν συναρτήσεων ἡ ὁποία ὑπάρχει στὸν ἀπειροστικὸ λογισμό.

Ὁ L. Euler στὸ κλασικὸ βιβλίο του *Introductio in Analysin Infinitorum* (1748), δίδει τὸν ὁρισμὸ τῆς συνέχειας, ἀφοῦ πρῶτα δώσει τὸν ὁρισμὸ τῆς συνάρτησης ὡς ἀναλυτικῆς ἔκφρασης ποὺ σχηματίζεται μὲ ὁποιονδήποτε τρόπο ἀπὸ μιὰ μεταβλητὴ ποσότητα. Μὲ αὐτὸν τὸν τρόπο περιλαμβάνει πολυώνυμα, δυναμοσειρὲς καὶ λογαριθμικὲς καὶ τριγωνομετρικὲς ἐκφράσεις. Ὅμως ὁ Euler ἐπηρεασμένος ἀπὸ τὴν καρτεσιανὴ ἐπιστήμη, συνέδεε τὸν ἀναλυτικὸ τύπο μὲ τὴν γεωμετρικὴ ἀπεικόνιση καὶ γι' αὐτὸ θεωρεῖ «συνεχεῖς τὶς καμπύλες... ἐκεῖνες οἱ ὁποῖες μποροῦν νὰ ἐκφρασθοῦν μὲ μιὰ συνάρτηση τοῦ x»[11] δηλαδὴ οἱ καμπύλες ὑπακούουν σ' ἕνα σταθερὸ νόμο. Ἐνῶ ὅταν οἱ καμπύλες εἶναι τέτοιες ὥστε στὰ διαφορετικὰ τμήματα ποὺ ἔχουν γιὰ ἐκφράσεις συναρτήσεις διαφορετικὲς τοῦ x αὐτὲς εἶναι ἀσυνεχεῖς δηλαδὴ μεικτὲς καὶ μὴ κανονικές[12]. Οὐσιαστικὰ αὐτὲς οἱ ἀσυνεχεῖς συναρτήσεις ἀποτελοῦν γιὰ τὸν Euler μιὰ «εἰδικὴ κλάση» συναρτήσεων γιὰ τὶς ὁποῖες οἱ ἰδιαίτερες τιμὲς τῆς ἀνεξάρτητης μεταβλητῆς χωρίζουν τὰ διαστήματα στὰ ὁποῖα μιὰ ἀσυνεχὴς συνάρτηση ὁρίζεται ἀπὸ διαφορετικοὺς μαθηματικοὺς τύπους. Αὐτὸ θὰ ξανασυνδέσει τὴν ἰδέα τῆς τυχοῦσας συνάρτησης, ποὺ θὰ ἐμφανισθεῖ σ' ἕνα ἀπὸ τὰ κλασικὰ προβλήματα τῆς ἐποχῆς, στὸ πρόβλημα τῶν παλλομένων χορδῶν[13].

Ἔτσι ὁ Euler στὴν προσπάθειά του νὰ ἐπιλύσει αὐτὸ τὸ πρόβλημα θὰ εἶναι σὲ θέση νὰ «ὁρίσει» μιὰ τυχοῦσα συνάρτηση ἡ ὁποία ἀντιστοιχεῖ στὴν ἀρχικὴ μορφὴ ποὺ δίδεται στὴ χορδή, καὶ δὲν περικλείεται σὲ κανένα νόμο συνεχείας[14].

---

9. R. TATON, Sylvestre - François Lacroix (1765-1863), mathématicien, professeur et historien des Sciences, *Actes du 7e Congrès International d'Histoire des Sciences*, Jérusalem, σσ. 588-593.

10. F. S. LACROIX, *Traité élémentaire de calcul différentiel et de calcul intégral*, Paris, 1802, σ. 75.

11. L. EULER, *Introductio in Analysin Infinitorum*, t. II., Lausanne, 1748, σ. 6.

12. *Αὐτόθι*.

13. S. S. DEMIDOV, Création et développement de la théorie des équations différentielles aux dérivées partielles dans les travaux de d'Alembert, *Revue d'Histoire des Sciences*, Vol. 35, No 1 1982, σσ. 3-42.

14. L. EULER, *ἔνθ' ἀν.*, σ. 7.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens

Στὴν πραγματικότητα ὁ Euler δὲν μελετᾶ τὴ συνέχεια τῶν συναρτήσεων ἀλλὰ τῶν καμπύλων. Ὁ ἴδιος ἐπιχειρεῖ μιὰ «μετάβαση εἰς ἄλλο εἶδος» χωρὶς νὰ τὸ ἀνακοινώνει ἐπίσημα, ἔχοντας ἤδη ἀντιληφθεῖ τὴν ὕπαρξη συναρτήσεων οἱ ὁποῖες δὲν ἐκφράζονται ἀναλυτικὰ ὅπως π.χ. οἱ προκύπτουσες συναρτήσεις ἀπὸ τὴν σχεδίαση ἑνὸς τυχόντος τόξου καμπύλης.

Τὸν 19ο αἰώνα, ἐποχὴ ἀναμόρφωσης τῆς ἀνάλυσης, ὁ Bolzano θὰ δώσει πρῶτος τὸν ἀκριβῆ ὁρισμὸ τῆς συνέχειας σὲ ἕνα διάστημα καὶ ὄχι σ' ἕνα σημεῖο. «Μιὰ συνάρτηση f(x) μεταβάλλεται σύμφωνα μὲ τὸν νόμο τῆς συνέχειας γιὰ ὅλες τὶς τιμὲς τοῦ x ποὺ βρίσκονται στὸ ἐσωτερικὸ ἢ στὸ ἐξωτερικὸ κάποιων φραγμάτων... ὅταν τὸ x εἶναι μιὰ τυχοῦσα τιμή, ἡ διαφορὰ f(x+ω) - f(x) μπορεῖ νὰ γίνει μικρότερη ἀπὸ κάθε δοσμένο μέγεθος, παίρνοντας πάντα τὸ ω ὅσο μικρὸ θέλουμε»[15].

Ὅμως αὐτὸς ὁ ὁρισμός, ποὺ θὰ ταράξει τὰ λιμνάζοντα νερά, καὶ ἀποτελεῖ τὸ σημεῖο ἐκκίνησης γιὰ τὴν ἀριθμητικοποίηση τῆς ἀνάλυσης, ἕλκει τὴν καταγωγή του ἀπὸ τὸ παρελθόν. Ὁ Bolzano, βαθὺς γνώστης τῆς φιλοσοφικῆς κληρονομιᾶς, ἐμπνεύσθηκε αὐτὸν τὸν ὁρισμὸ ἀπὸ μιὰ παλαιότερη φιλοσοφικὴ[16] ἀλλὰ καὶ ταυτόχρονα μαθηματικὴ πηγή. Εἶναι ἡ περίφημη ἀρχὴ τῆς συνεχείας τοῦ Leibniz, ἡ ὁποία φέρει τὸν τίτλο *Principium quoddam generale* καὶ τὴν ὁποία διατυπώνει τὸ 1687. «Ὅταν ἡ διαφορὰ τῶν δύο περιπτώσεων μπορεῖ νὰ μειωθεῖ κάτω ἀπὸ ἕνα δοσμένο μέγεθος in quaesitis ἢ σὲ ὅ,τι ἀπορρέει. Ἢ γιὰ νὰ μιλήσουμε πιὸ ἁπλά: ὅταν οἱ περιπτώσεις ἢ (ὅ,τι ἔχει δοθεῖ) πλησιάσουν συνεχῶς καὶ τελικὰ χάνονται ἡ μία μέσα στὴν ἄλλη, πρέπει οἱ ἀκολουθίες ἢ τὰ γεγονότα (ἢ ὅ,τι ἔχει ζητηθεῖ) νὰ τὸ κάνουν ἐπίσης. Αὐτὸ ἐξαρτᾶται καὶ ἀπὸ μιὰ γενικὴ ἀρχή: Datis ordinates etiam quaesita sunt ordinatae»[17].

Ὁ Leibniz συνοδεύει αὐτὴν τὴν ἀρχὴ μὲ παραδείγματα ἀπὸ τὴν γεωμετρία καὶ τὴν φυσική. Τὸ γεωμετρικὸ παράδειγμα εἶναι ἀποκαλυπτικό. Ἂς πάρουμε μιὰ εὐθεία ἡ ὁποία τέμνει ἕνα κύκλο σὲ δύο σημεῖα καὶ ἂς προβάλλουμε αὐτὰ τὰ σχήματα στὸ ἐπίπεδο. Ἡ προβολὴ τῆς εὐθείας τέμνει τὴν προβολὴ τοῦ κύκλου ἐπίσης σὲ δύο σημεῖα. Ὅταν ἡ εὐθεία ἀπομακρύνεται ὅλο καὶ πιὸ πολὺ ἀπὸ τὸ κέντρο τοῦ κύκλου, τὰ δύο σημεῖα τομῆς πλησιάζουν, τὸ ἴδιο συμβαίνει γιὰ τὰ σημεῖα τομῆς τῶν δύο προβολῶν. Ὅταν ἡ εὐθεία γίνει ἐφαπτόμενη τότε καὶ ἡ προβολή της γίνεται ἐφαπτόμενη στὴν προβολὴ τοῦ κύκλου[18,19].

Μὲ αὐτὸ τὸ παράδειγμα κατανοοῦμε τὴν πηγὴ τῆς διατύπωσης, τὴν ὁποία ὁ Leibniz παρουσιάζει γιὰ τὴν ἀρχὴ τῆς συνεχείας, ποὺ περιέχει ὅλα τὰ στοιχεῖα γιὰ τὸν μελλοντικὸ ὁρισμό. Συνυπάρχουν οἱ ἀριθμητικὲς ἔννοιες, οἱ ἀναλυτικὲς ἔννοιες τῆς διαφορᾶς, ἡ σχέση διάταξης καὶ ἡ διατύπωση τοῦ ὁρίου. Ἀπουσιάζει ὅμως ἡ ἔννοια τῆς συνάρτησης, ὡς τυχοῦσα ἐξάρτηση μεταξὺ δύο συνόλων τιμῶν, ἡ ὁποία θὰ μπορέσει νὰ μετατρέψει τὴν

---

15. B. Bolzano, *Rein analytischer Beweis der Lehrsatzes, dass zwischen je zwei Werthen, die ein entgegengesetzes Resultat gewähren, wenigstens eine reelle Wurzel der Gleichung liege*, Gottlieb Hass, Prag, 1817, σ. 14.

16. Αὐτὴ ἡ ἀποκάλυψη τοῦ Leibniz προκύπτει ἀπὸ μιὰ φιλοσοφικὴ θεώρηση καὶ ἀποτελεῖ τὴ βάση ἑνὸς γενικοῦ συστήματος τῶν πραγμάτων: «Fortasse non inutile erit, ut non nihil attingas... de nostra hac analysi infinit, ex intimo philosophiae fonte derivate... Et haec sophematibus, partimrursus ipsis auctoritatem debunt». G. W. Leibniz, *Lettre à Fardella 3-13 Septembre 1696*, Nouvelles Lettres et Opuscules, éd. Foucher de Careil, 1857, σ. 327.

17. *Αὐτόθι*.

18. Ὁ Leibniz θεωρεῖ χωρὶς νὰ τὸ ἀναφέρει τὴν ὀρθὴ προβολή. Ὅσο μικραίνει τὸ τμῆμα τῆς εὐθείας τόσο θὰ μικραίνει καὶ ἡ ἀντίστοιχη προβολή.

19. Μὲ τὰ χρόνια ἡ ἀρχὴ τῆς συνεχείας τοῦ Leibniz παραμερίστηκε.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens

φιλοσοφικὴ ἀρχὴ τῆς συνέχειας τοῦ Leibniz[20] σὲ ἰδέα πρῶτα μὲ τὸν Bolzano καὶ ἀργότερα μὲ τὸν Cauchy.

Πάντως γιὰ τὸν Leibniz «ἡ ἀρχὴ τῆς συνέχειας... θὰ μποροῦσε νὰ χρησιμεύσει σὲ πολλὲς σημαντικὲς ἀλήθειες στὴν ἀληθὴ Φιλοσοφία, ἡ ὁποία καθὼς ὑψώνεται πάνω ἀπὸ τὶς αἰσθήσεις καὶ τὴν φαντασία ἀναζητᾶ τὴν ἀρχὴ τῶν φαινομένων στὶς περιοχὲς τῆς νόησης»[21].

Μὲ τὸν Cauchy ἀνανεώνεται ἡ φιλοσοφικὴ θεώρηση τῆς συνέχειας ἀντὶ νὰ εἶναι ἡ ἰδιότητα μιᾶς καμπύλης ἢ μιᾶς συνάρτησης, λαμβανομένης στὴν ὁλότητά της, ἕνας προσδιορισμὸς σ' ἕνα μαθηματικὸ ἀντικείμενο, ἡ συνέχεια γίνεται μιὰ στοιχειώδης σχέση, ποὺ θὰ χρησιμεύει ὡς ἐργαλεῖο στὴν σπουδὴ τῆς συνάρτησης.

Ὁ Cauchy[22] θὰ ἐγκαταλείψει τὴ θεώρηση τοῦ Πατριάρχη τῶν Μαθηματικῶν, τοῦ Euler, ἀφοῦ πιὰ δὲν γίνεται νὰ ταυτίζονται οἱ συναρτήσεις μὲ τὶς ἀναλυτικές τους ἐκφράσεις. Μάλιστα θὰ ὑπογραμμίσει αὐτὴν τὴν ἀλλαγὴ ἡ ὁποία πηγάζει ἀπὸ τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ ἴδια ἡ καμπύλη συχνὰ μπορεῖ νὰ ὁρισθεῖ τόσο ἀπὸ πολλοὺς ὅσο καὶ ἀπὸ ἕναν τύπο, δηλαδὴ σύμφωνα μὲ τὴν θεώρηση τοῦ Euler εἶναι ταυτόχρονα συνεχὴς καὶ ἀσυνεχής.

Στὴν ἀρχαία ἑλληνικὴ φιλοσοφία ὁ Παρμενίδης ὁ Ἐλεάτης εἶναι ὁ πρῶτος ποὺ ἀσχολεῖται μὲ τὴν ἔννοια τῆς συνέχειας, χωρὶς ὅμως νὰ διευκρινίζει ἂν τὴν μελετᾶ στὸν χῶρο ἢ στὸν χρόνο.

«τῷ ξυνεχὲς πᾶν ἐστιν· ἐὸν γὰρ ἐόντι πελάζει»[23].

Καθὼς ὅμως ἡ ἔννοια τῆς συνέχειας συνδέεται μὲ τὴν ἔννοια τοῦ πέρατος, ὁ Παρμενίδης ἐνδιαφέρεται ἀλλὰ χωρὶς νὰ τὸ διασαφηνίζει. Κατὰ τὸν Παρμενίδη τὸ ὂν τὸ ὁποῖο παραμένει ἀκίνητο συγκρατεῖται ἀπὸ τὰ δεσμὰ ἑνὸς ὁρίου ποὺ τὸ περιορίζει ἀπὸ παντοῦ.

«... .... κρατερὴ γὰρ Ἀνάγκη
πείρατος ἐν δεσμοῖσιν ἔχει, τὸ μεν ἀμφὲς ἐέργει»[24]
«αὐτὰρ ἐπεὶ πεῖρας πύματον, τετελεσμένον ἐστί,
πάντοθεν εὐκύκλου σφαίρης ἐναλίγκιον ὄγκῳ»[25].

Καὶ σ' αὐτὰ τὰ ἀποσπάσματα ὁ Παρμενίδης παραμένει ἑρμητικὸς καὶ δὲν ἀποσαφηνίζει τὴν ἔννοια τοῦ πέρατος. Καθὼς ὅμως χρησιμοποιεῖ τὸ ἐπίθετο πύματον, τὸ ὁποῖο σημαίνει ἔσχατο, ἀκρότατο, ἀκραῖο ὅριο θὰ πρέπει νὰ συγκατατεθοῦμε ὅτι ἐννοεῖ τὸ πέρας τόσο στὴν κυριολεκτικὴ ὅσο καὶ στὴν μεταφορική του σημασία[26].

Ὁ Ἀριστοτέλης, μελετώντας τὸν πλατωνικὸ *Παρμενίδη*, προσπαθεῖ νὰ διευκρινίσει τὴν ἔννοια τῆς συνέχειας, ἄλλωστε εἶναι ὁ πρῶτος ὁ ὁποῖος χρησιμοποιεῖ τὸν ὅρο «συνεχές»[27]. «Τί ἐννοοῦμε λέγοντας μαζὶ ἢ χωριστὰ τὸν χῶρο, σὲ ἐπαφή, ἐνδιαμέσως, ἐφεξῆς, τὸ ἑπόμενο καὶ τὸ συνεχές»;[28] «Μετὰ ἀπὸ προσεκτικὴ ἀνάλυση, ἀποκλείει τὶς ἔξι πρῶτες

---

20. L. BRUNSCHVICG, *ἔνθ' ἀν.*, σ. 233.
21. G.W. LEIBNIZ, *Apud Gurhauer*, t. I, 1846, σ. 33.
22. A. L. CAUCHY, Mémoire sur les fonctions continues ou discontinues, *Comptes Rendues de l'Académie des Sciences*, Vol. 18, 1844, σσ. 116-130.
23. ΣΙΜΠΛΙΚΙΟΥ, *Εἰς Φυσικά*, 144 ἀπ. 8, 25.
24. *Αὐτόθι*, ἀπ. 8 30-31.
25. *Αὐτόθι*, ἀπ. 8 42-43.
26. G. S. KIRK, J. E. RAVEN, M. SCHOFIELD, *Οἱ Προσωκρατικοὶ φιλόσοφοι*, μτφρ. Δ. Κουρτόβικ, Μ.Ι.Ε.Τ., 1988, σ. 261.
27. I. DÜHRING, *Ὁ Ἀριστοτέλης. Παρουσίαση καὶ ἑρμηνεία τῆς σκέψης του*, τ. Β΄, μτφρ. Α. Γ. Κατσιβέλα, Ἀθήνα, Μ.Ι.Ε.Τ., 2003, σ. 58.
28. Ε3,226β18 «ἅμα, χωρίς, ἅπτεσθαι, μεταξύ, ἑξῆς, ἐχόμενον, συνεχές».

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens

λέξεις· καμιὰ ἀπ' αὐτὲς δὲν δηλώνει αὐθεντικὴ συνέχεια. «Σὲ ἐπαφὴ» βρίσκεται αὐτὸ τοῦ ὁποίου τὰ ἀκρότατα σύνορα εἶναι μαζί· «ἐφεξῆς» εἶναι αὐτὸ ἀνάμεσα στὸ ὁποῖο δὲν ὑπάρχει τίποτα ποὺ νὰ ἀνήκει στὸ ἴδιο εἶδος· «ἑπόμενο» εἶναι αὐτὸ ποὺ εἶναι ἄμεσο ἐπακόλουθο καὶ ταυτόχρονα βρίσκεται σὲ ἐπαφὴ μ' αὐτὸ ποὺ προηγεῖται»[29].

Πῶς λοιπὸν ὁρίζει τὴ συνέχεια ὁ Σταγειρίτης; Στὰ *Φυσικὰ* παρουσιάζει ἕναν ἐξαιρετικὰ σύγχρονο ὁρισμό: «λέγω δ' εἶναι συνεχές, ὅταν ταὐτὸ γένηται καὶ ἓν τὸ ἑκατέρου πέρας[30] οἷς ἅπτονται»[31]. Δηλαδὴ τὸ συνεχὲς[32,33] εἶναι ἐκεῖνο τοῦ ὁποίου τὰ ἄκρα ταυτίζονται «ὧν τὰ ἔσχατα ἕν»[34].

Γιὰ νὰ περιορισθοῦμε στὴν εὐθεία, ὁ Ἀριστοτελικὸς ὁρισμὸς ἀναφέρει πὼς ὄντας μοναδικὸ τὸ σημεῖο τὸ ὁποῖο τέμνει μιὰ εὐθεία, πρέπει νὰ τὸ «ἀντιστοιχήσουμε» στὸ ἕνα καὶ στὸ ἄλλο ἄκρο τῆς «τομῆς» ἢ τουλάχιστον ἀντιστοιχώντας το σ' ἕνα καὶ μόνο ἄκρο, τὸ ἄλλο ἄκρο δὲν «περιέχει» αὐτὸ τὸ σημεῖο.

Ὅταν πιὰ ἡ ἀνάλυση θὰ ἔχει αὐστηρὰ θεμελιωθεῖ μὲ τὶς ἔρευνες τῶν Bolzano, Cauchy, Weierstrass, ὁ μεγάλος γερμανὸς μαθηματικὸς R. Dedekind στὸ κλασικὸ βιβλίο του *Συνέχεια καὶ ἄρρητοι ἀριθμοὶ* θέτει τὸ βασικὸ ἐρώτημα[35]: «Ἀπὸ τί ἀποτελεῖται αὐτὴ ἡ συνέχεια;»

Ἡ ἀπάντηση τοῦ Dedekind θὰ τοῦ «ἐπιτρέψει νὰ βρεῖ μιὰ ἐπιστημονικὴ βάση γιὰ τὴ μελέτη ὅλων τῶν συνεχῶν περιοχῶν»[36].

Ὁ ὁρισμός του, ὁ ὁποῖος θὰ φανεῖ σὲ ἀρκετοὺς ἀρκετὰ τετριμμένος, περιέχει τὴν πεμπτουσία τῆς συνέχειας, βρίσκεται στὸ παρακάτω «ἀξίωμα»: «Ἂν ὅλα τὰ σημεῖα τῆς εὐθείας χωρίζονται σὲ δύο κλάσεις, τέτοιες ὥστε κάθε σημεῖο τῆς πρώτης κλάσης νὰ βρίσκεται ἀριστερὰ ἀπὸ κάθε σημεῖο τῆς δεύτερης κλάσης, τότε ὑπάρχει ἕνα καὶ μόνο ἕνα σημεῖο, τὸ ὁποῖο προκαλεῖ αὐτὸν τὸν διαχωρισμὸ σὲ δύο κλάσεις, αὐτὴν τὴν διαίρεση τῆς εὐθείας σὲ δύο μέρη»[37,38].

Σ' αὐτὸν τὸν ὁρισμό, ἀπόηχο τοῦ ἀριστοτελικοῦ ὁρισμοῦ τοῦ συνεχοῦς, ἡ θεώρηση τοῦ Σταγειρίτη γιὰ τὴν εὐθεία καὶ ἡ θεώρηση τοῦ Dedekind εἶναι διαφορετικές. Ἡ εὐθεία στὴν ὁποία ἀναφέρεται ὁ Dedekind δὲν εἶναι ἡ εὐθεία ὅπως τὴν ἀντιλαμβανόταν ὁ Σταγειρίτης, δηλαδὴ ἕνα ἀντικείμενο τὸ ὁποῖο βρίσκεται στὴ φύση. Εἶναι αὐτὸ ποὺ ἐννοοῦσε ὁ Descartes στὴν *Γεωμετρία*, καὶ δὲν μποροῦσε ἀκόμα νὰ ὀνομάσει συνάρτηση. Αὐτὴ εἶναι ἡ

---

29. L. DÜHRING, *ἔνθ' ἀν.*

30. Στὰ *Μετὰ τὰ Φυσικά*, δίδει τὸν ὁρισμὸ τοῦ πέρατος: «Πέρας λέγεται τὸ ἔσχατον ἑκάστου καὶ οὗ ἔσω πάντα πρώτου, καὶ ὃ ἂν ᾖ εἶδος μεγέθους ἢ ἔχοντος μέγεθος», 1022a4-6.

31. ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΟΥΣ, *Φυσικά*, Ε,227a11-12.

32. Ἡ ἔννοια τῆς συνέχειας θὰ τὸν ἀπασχολήσει καὶ στὴν θεώρηση τῆς κίνησης ἢ τῆς μεταβολῆς.

33. Ἀναζητώντας μετὰ τὸ σπουδαιότερο γνώρισμα τοῦ συνεχοῦς (Α, 185 b 10) ἀναφέρει πὼς «πᾶν συνεχὲς διαιρετὸν εἰς ἀεὶ διαιρετά» *ἔνθ' ἀν.*, 231 b 10.

34. *Αὐτόθι*, 228 α 29.

35. Συγκρίνοντας τὸ σύνολο τῶν ρητῶν ἀριθμῶν καὶ τὴν εὐθεία, ὁ Dedekind θέλει νὰ ἐξάγει τὴν συνέχεια τῆς εὐθείας.

36. P. DUGAC, *Histoire de l'Analyse. Autour de la notion de limite et de ses voisinages*, préface de J. P. Kahane, Vuibert, Paris, 2003.

37. R. DEDEKIND, *Stetigkeit und irrationale Zahlen*, Braunschweig Vieweg, 1872, σ. 18.

38. Τὸ 1904 ὁ O. Veblen ἀπέδειξε πὼς τὸ ἀξίωμα τῆς συνεχείας τοῦ Dedekind, ὅταν τὸ σύνολο τῶν πραγματικῶν εἶναι ἐφοδιασμένο μὲ τὴ συνήθη διάταξη, εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ θεώρημα τῶν Borel-Lebesgue. Πβ. O. VEBLEN, The Heine - Borel theorem, *Bull. Amer. Math. Soc.*, vol. 10, 1904, σσ. 436-439.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens

διαφορὰ θεώρησης τοῦ ἀντικειμένου, στὸ ὁποῖο βασίζεται ὁ ὁρισμὸς τοῦ Σταγειρίτη γιὰ τὴ συνέχεια, καὶ τὴν εὐθεία ποὺ χρησιμοποιεῖ ὁ Dedekind.

Οὐσιαστικὰ ὁ ὁρισμὸς τοῦ Dedekind εἶναι ἀπελευθερωμένος ἀπὸ τὴν «ὕπαρξη» τῆς εὐθείας καὶ τῶν σημείων της ἀφοῦ βασίζεται στὴν τιμὴ τοῦ ὁρίου τῆς συνάρτησης f(x), ὅταν $x \longrightarrow x_{\circ}$. Ὁ Dedekind σημάδεψε τὰ μαθηματικά[39]· δημιουργικὸ μυαλὸ συνέβαλε στὸ νὰ δώσει στὰ μαθηματικὰ τὴ σύγχρονη πνοή, ἔχοντας ὅμως παράλληλα καὶ βαθειὰ γνώση τῆς ἀρχαιοελληνικῆς κληρονομιᾶς.

Χ. ΦΙΛΗ
(Ἀθῆναι)

39. P. Dugac, *Richard Dedekind et les fondements des Mathématiques*, Paris, Vrin, 1976.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ