Ο ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΗΣ ΩΣ ΠΡΟΔΡΟΜΟΣ ΤΟΥ ΕΥΚΛΕΙΔΗ

Ι. Εἰσαγωγή

Στὴν ἀπαράμιλλη διδακτορική του διατριβὴ *Οἱ φάσεις τῆς μαθηματικῆς φιλοσοφίας*[1], ὁ L. Brunschvicg, θεωρεῖ πὼς ὁ Εὐκλείδης ποὺ διαπαιδαγώγησε πολυάριθμες γενεὲς «ἦταν περισσότερο ἕνας καθηγητὴς λογικῆς παρὰ ἕνας καθηγητὴς γεωμετρίας. Ἡ ἐπαγωγικὴ μορφὴ τῶν *Στοιχείων* καθιστᾶ φανερὴ καὶ ἐπιβεβαιώνει τὴν παγκοσμιότητα τῆς ἐφαρμογῆς γιὰ τὴν ὁποίαν ἦταν ἱκανὴ ἡ λογικὴ τοῦ Ἀριστοτέλη»[2].

Βέβαια αὐτὴ ἡ διαπίστωση δὲν ἀνήκει ἀποκλειστικὰ στὸν Brunschvicg. Αἰῶνες νωρίτερα ὁ Leibniz, βαθυστόχαστος μαθηματικὸς καὶ λογικός, δὲν διστάζει νὰ δηλώσει: «Ὑπάρχουν ἀρκετὰ σημαντικὰ παραδείγματα ἀπόδειξης ἐκτὸς ἀπὸ τὰ μαθηματικὰ καὶ μποροῦμε νὰ ποῦμε πὼς ἡ λογικὴ τῶν γεωμετρῶν ἢ οἱ τρόποι τῶν ἐπιχειρημάτων ποὺ ὁ Εὐκλείδης ἑρμήνευσε καὶ ἔθεσε ἀναφερόμενος σὲ προτάσεις ἀποτελοῦν μιὰ ἐπέκταση ἢ μιὰ ἰδιαίτερη πρόοδο τῆς γενικῆς λογικῆς»[3].

Ἡ εὐκλείδεια λογικὴ ἀποτελεῖ λοιπὸν μιὰ ὑποπερίπτωση τῆς ἀριστοτελικῆς λογικῆς; Ἢ μήπως καθὼς ὁ Εὐκλείδης κωδικοποίησε τὶς πρότερες γεωμετρικὲς γνώσεις ἀκολούθησε τὶς χρησιμοποιούμενες τεχνικὲς τῆς Σχολῆς τοῦ Κρότωνα καὶ τῆς Πλατωνικῆς Ἀκαδημίας; Ἢ ἁπλὰ ἡ ἑλληνικὴ ἐπιστήμη φθάνοντας στὸ ἀπόγειό της ἔχει πιὰ ἀπορροφήσει τὰ ἐργαλεῖα τῆς λογικῆς καὶ μπορεῖ νὰ δημιουργήσει ἕνα οἰκοδόμημα ἀκλόνητο γιὰ χιλιάδες χρόνια;

Θὰ προσπαθήσουμε νὰ παρουσιάσουμε τόσο τὴ συμβολὴ ὅσο καὶ τὴν ἐπίδραση τοῦ Σταγειρίτη στὴ διαμόρφωση τῶν *Στοιχείων* τοῦ Εὐκλείδη.

Μιὰ ἀπὸ τὶς κύριες πηγὲς μελέτης τῶν ἀρχαίων Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν ἀποτελεῖ τὸ ἔργο τοῦ Πρόκλου, *Ὑπόμνημα εἰς πρῶτον Στοιχείων Εὐκλείδου*[4] καὶ σὲ αὐτὸ ὁ σπουδαῖος νεοπλατωνιστὴς φιλόσοφος τοῦ 5ου αἰώνα, ἔχοντας ἀκόμα πρόσβαση σὲ ἱστορικὲς καὶ κριτικὲς ἐργασίες ποὺ ἀργότερα χάθηκαν, ἀφήνει νὰ ὑποτεθεῖ πὼς ὁ Θαλῆς ἦταν ἕνας ἀπὸ τοὺς πρώτους ποὺ ἔδωσε μία ἀπόδειξη: «Θαλῆς δὲ πρῶτον εἰς Αἴγυπτον ἐλθὼν

---

1. L. Brunschvicg, *Les Étapes de la Philosophie Mathématique*, Paris, 1912; 2e éd., Paris, Blanchard, 1972.

2. *Αὐτόθι*, σ. 84.

3. G. W. Leibniz, *Nouveaux Essais*, Livre IV. Chap. II § 9.

4. Προκλου Διαδοχου, *In Primum Euclidis Elementarum Librum Commentaria* ἐκδ. Friedlein, Leipzig, 1873.

μετήγαγεν εἰς τὴν Ἑλλάδα τὴν θεωρίαν ταύτην καὶ πολλὰ μὲν αὐτὸς εὗρεν, πολλῶν δὲ τὰς ἀρχὰς τοῖς μέτ' αὐτὸν ὑφηγήσατο, τοῖς μὲν καθολικώτερον ἐπιβάλλων τοῖς δὲ αἰσθητικώτερον»[5].

Αὐτὴ εἶναι καὶ ἡ πρώτη ἐπιστημολογικὴ μεταλλαγὴ ἡ ὁποία διακρίνει τοὺς Ἴωνες ἀπὸ τοὺς Αἰγυπτίους καὶ λαμβάνει χώρα τὴν ἐποχὴ ὅπου παρατηρεῖται ἡ μετάβαση ἀπὸ τὸν μύθο στὸν λόγο[6]. Ἡ ἐποχὴ αὐτὴ χαρακτηρίζεται καὶ ἀπὸ τὸν ἐκδημοκρατισμὸ τῶν θεσμῶν καθὼς καὶ ἀπὸ τὴ χρήση τοῦ γραπτοῦ λόγου.

Ὅμως ὁ Πρόκλος δὲν θὰ διστάσει νὰ ἀποδώσει στὸν Πυθαγόρα τὴ μεταστροφὴ τῆς γεωμετρίας ἀπὸ ἐμπειρικὴ γνώση σὲ θεωρητικὴ ἐπιστήμη: «Πυθαγόρας τὴν περὶ αὐτὴν φιλοσοφίαν εἰς σχῆμα παιδείας ἐλευθέρου μετέστησεν, ἄνωθεν τὰς ἀρχὰς αὐτῆς ἐπισκοπούμενος καὶ ἀΰλως καὶ νοερῶς τε θεωρήματα διερευνώμενος»[7].

Μὲ τὸν Πλάτωνα παρατηρεῖται μιὰ οὐσιαστικότερη στροφὴ πρὸς τὰ μαθηματικά: «Πλάτων δ' ἐπὶ τούτοις γενόμενος μεγίστην ἐποίησεν ἐπίδοσιν τά τε ἄλλα μαθήματα καὶ τὴν γεωμετρίαν λαβεῖν διὰ τὴν περὶ αὐτὰ σπουδήν, ὅς που δῆλός ἐστι καὶ τὰ συγγράμματα τοῖς μαθηματικοῖς λόγοις καταπυκνώσας καὶ πανταχοῦ τὸ περὶ αὐτὰ θαῦμα τῶν φιλοσοφίας ἀντεχομένων ἐπεγείρων»[8]. Ἐνῶ ὁ μαθητής του, Φίλιππος ὁ Μενδαῖος καὶ ὁ δάσκαλος «τὰς ἱστορίας ἀναγράψαντες μέχρι τούτου προάγουσι τὴν τῆς ἐπιστήμης ταύτης τελείωσιν»[9].

Παράλληλα ὅμως καθὼς ὅλα τὰ θέματα τῆς πόλης συζητοῦνται δημόσια καὶ μὲ ἰσηγορία, ἀναπτύσσεται ὁ ἔντεχνος ῥητορικὸς λόγος, ὁ ὁποῖος ἐφαρμόζεται παντοῦ[10] (πβ. στὸ δικονομικὸ σύστημα)[11] καὶ ἔχει ὡς κύριο γνώρισμα τὴ σαφήνεια[12]. Οἱ φαινομενικὰ ἀσύμβατες αὐτὲς συνιστῶσες θὰ συμβάλουν στὴν ἑδραίωση τῆς ἔννοιας τῆς ἀπόδειξης[13], ἔννοια κυρίαρχη γιὰ τὴν μετέπειτα ἐξέλιξη τῶν ἐπιστημῶν.

ΙΙ. Ἡ Προϊστορία

Χάρις στὸ ἔργο τοῦ Πρόκλου, *Ὑπόμνημα εἰς πρῶτον Στοιχείων*[14] *Εὐκλεί-*

5. *Αὐτόθι*, 65: 7-11.
6. E. Moutsopoulos, *La pensée présocratique. Du mythe à la raison*, Athènes, Grigoris, 1978.
7. Προκλου Διαδοχου, *ἔνθ' ἀν.*, 65: 16-19.
8. *Αὐτόθι*, 66: 9-15.
9. *Αὐτόθι*, 67: 23-28.
10. A. Croiset, *Histoire de la littérature grecque*, Paris, 1899, Vol. V, σ. 42.
11. Ch. Phili, Juriprudence Elements in Atredian and Labdakian Myths, *Festschrift für Kostas Beys dem Rechtdenker in Attischer Dialektik*, Athen, 2003, pp. 1255-1271.
12. Αριστοτελους, *Τέχνη ῥητορικὴ* III, 1404 b, «ὡρίσθω λέξεως ἀρετὴ σαφῆ εἶναι».
13. Πβ. Χρ. Φιλη, Ἀπόδειξη: Ἡ τέχνη τῆς πειθοῦς ἢ τῆς διαφώτισης; Ἡ προϊστορία καὶ ὁ Καρτέσιος, στὸ *Τομὲς Φιλοσοφίας καὶ Μαθηματικῶν*, Ἀθήνα, ἐκδ. Παπασωτηρίου, 2009.
14. Προκλου Διαδοχου, *In primum Euclidis Elementarum Librum Commentaria*, ἐκδ. Friedlein, Leipzig, 1873.

δου καὶ στὰ διασωθέντα *ἀποσπάσματα τοῦ Εὐδήμου*[15] μποροῦμε νὰ σχηματίσουμε μιὰ σχεδὸν κατατοπιστικὴ εἰκόνα τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν τοῦ 4ου αἰώνα π.Χ.

Ἔτσι γνωρίζουμε πὼς τὰ πρῶτα «Στοιχεῖα» τῆς Γεωμετρίας ἀνήκουν στὸν Ἱπποκράτη τὸν Χίον[16] «πρῶτος γὰρ ὁ Ἱπποκράτης τῶν μνημονευομένων καὶ στοιχεῖα συνέγραψεν»[17]. Στὴν Πλατωνικὴ Ἀκαδημία φαίνεται πὼς χρησιμοποιοῦσαν τὸ ἔργο τοῦ Θεύδιου «Θεύδιος δὲ ὁ Μάγνης ἔν τε τοῖς μαθήμασιν ἔδοξεν εἶναι διαφέρων καὶ κατὰ τὴν ἄλλην φιλοσοφίαν· καὶ γὰρ τὰ στοιχεῖα καλῶς συνέταξεν καὶ πολλὰ τῶν μερικῶν καθολικώτερα ἐποίησεν»[18].

Ἐκείνη τὴν ἐποχὴ ὁ Εὔδοξος ὁ Κνίδιος ἦταν «Λέοντος μὲν ὀλίγῳ νεώτερος»[19]. Ὁ Λέων ὁ ὁποῖος ἦταν μαθητὴς τοῦ Νεοκλείδη, ἔγραψε μελέτη γιὰ τὰ στοιχεῖα, «ὁ Νεοκλείδης καὶ ὁ τούτου μαθητὴς Λέων, οἳ πολλὰ προσευπόρησαν τοῖς πρὸ αὐτῶν, ὥστε τὸν Λέοντα καὶ τὰ στοιχεῖα συνθεῖναι τῷ τε πλήθει καὶ τῇ χρείᾳ τῶν δεικνυμένων ἐπιμελέστερον, καὶ διορισμοὺς εὑρεῖν, πότε δυνατὸν ἐστι τὸ ζητούμενο πρόβλημα καὶ πότε ἀδύνατον»[20]. Ἀκόμα τότε στὴν ἴδια αὐτὴ ὁμάδα γύρω ἀπὸ τὸν Πλάτωνα βρίσκονταν ὁ Ἀρχύτας ὁ Ταραντῖνος καὶ ὁ Θεαίτητος ὁ Ἀθηναῖος»[21], ἐνῶ ὁ Εὔδοξος «ἑταῖρος δὲ τῶν περὶ Πλάτωνα γενόμενος»[22].

Ὅπως ἤδη ἀναφέραμε, ὁ Θεύδιος συνέγραψε πραγματείαν γιὰ τὴ γεωμετρία, ἐνῶ ὁ Ἀμύκλας ὁ Ἡρακλειώτης, ὁ Μέναιχμος μαθητὴς τοῦ Εὐδόξου καὶ τοῦ Πλάτωνα, ὁ ἀδελφός του Δεινόστρατος καὶ ὁ Ἀθηναῖος ὁ Κυζικηνός, ἀνήκουν στὸν ἴδιο κύκλο καὶ «διῆγον οὖν οὗτοι μετ᾽ ἀλλήλων ἐν Ἀκαδημίᾳ κοινῶς ποιούμενοι τὰς ζητήσεις»[23].

Μετὰ τὸν Θεύδιον, ὁ Εὔδημος δὲν ἀναφέρει πιὰ καμμιὰ ἄλλη μελέτη. Ὁ Ἑρμότιμος ὁ Κολοφώνιος μὲ τὸν Φίλιππο τὸν Μενδαῖο φαίνεται πὼς ἀποτελοῦν τὴν νεώτερη γενεὰ τῆς Πλατωνικῆς Ἀκαδημίας μᾶλλον μαζὶ μὲ τὸν Ἀριστοτέλη. Μάλιστα ὅπως μᾶς ἔχει διασώσει ὁ Πρόκλος, ὁ Ἑρμότιμος «τὰ ὑπ᾽ Εὐδόξου προηυπορημένα καὶ Θεαιτήτου προήγαγεν ἐπὶ πλέον καὶ τῶν στοιχείων πολλὰ ἀνεῦρε»[24].

Σίγουρα καὶ σὲ ἄλλες «Σχολὲς» θὰ πρέπει νὰ ἐπεξεργάσθηκαν «στοιχεῖα», ἂν καὶ γι᾽ αὐτὸ δὲν διαθέτουμε καμμιὰ σχετικὴ ἀναφορά. Πάντως

---

15. L. von Spengel, *Eudemi Rhodii Peripatetici Fragmenta quae supersunt*, Berlin, 1866.
16. Ἀριστοτελους, *Ἠθικὰ Εὐδήμεια* 1247, 14, «Οἷον Ἱπποκράτης γεωμετρικὸς ὤν».
17. Προκλου Διαδοχου, *ἔνθ᾽ ἀν.*, 66. 8-9.
18. *Αὐτόθι*, 67: 13-16.
19. *Αὐτόθι*, 67: 2-3.
20. *Αὐτόθι*, 66: 20-23 καὶ 67: 1-2.
21. *Αὐτόθι*, 66: 16-17.
22. *Αὐτόθι*, 67: 3-4.
23. *Αὐτόθι*, 67: 19-20.
24. *Αὐτόθι*, 67: 21-23.

στὶς γεωμετρικὲς κατασκευές, ὅπως μερικὲς μᾶς ἔχουν διασωθεῖ στοὺς Πλατωνικοὺς Διαλόγους, παρατηροῦμε τὴν προσπάθεια διασάφησης κάποιων ἀρχικῶν συνθηκῶν ἀπὸ τὶς ὁποῖες θὰ μποροῦσαν νὰ ἐξαχθοῦν ὅλα τὰ ἄλλα. Ἴσως τὰ διάφορα «ὑπάρχοντα στοιχεῖα» νὰ περιεῖχαν καὶ διαφορετικὰ «συστήματα» ἀρχικῶν συνθηκῶν, τὰ ὁποῖα πρέπει νὰ ἐπιβίωσαν στὴν Ἀθήνα καὶ μετὰ μὲ τὸν Εὐκλείδη μεταλαμπαδεύτηκαν στὴν Ἀλεξάνδρεια.

Δυστυχῶς δὲν διασώθηκαν πολὺ προγενέστερες τοῦ Εὐκλείδη μαθηματικὲς ἀποδείξεις. Ἔτσι, ἐκτὸς ἀπὸ λίγες ἐξαιρέσεις, δὲν διαθέτουμε κείμενα τὰ ὁποῖα νὰ μᾶς ἀποκαλύπτουν τὴ μεθοδολογία καὶ τὴ διδασκαλία τῶν μαθηματικῶν στὴν Πλατωνικὴ Ἀκαδημία. Ἴσως ἔμμεσα ὁ Ἀριστοτέλης νὰ ἔδωσε μὲ τὸν δικό του τρόπο κάποια ψήγματα αὐτῶν τῶν προσπαθειῶν.

Σίγουρα οἱ δύο μεγάλες μορφὲς τῆς ἀρχαίας ἑλληνικῆς φιλοσοφίας καὶ ἐπιστήμης, ὁ Πλάτων καὶ ὁ Ἀριστοτέλης, πρέπει νὰ ἔπαιξαν σημαντικὸ ρόλο στὴ δημιουργία ἑνὸς μοναδικοῦ συστήματος στοιχείων, ἀφοῦ καὶ οἱ δύο στὰ ἔργα τους παρουσίασαν τὶς ἀρχὲς μὲ τὶς ὁποῖες μπορεῖ νὰ οἰκοδομηθεῖ ἡ ἐπιστήμη. Πολλὰ ἔργα τοῦ Πλάτωνα, ὅπως οἱ *Νόμοι* γιὰ τὸ δίκαιο ἢ ὁ *Τίμαιος* γιὰ τὴ φυσικὴ ἀπηχοῦν αὐτὴ τὴ θεώρηση. Ἐνῶ ὁ Ἀριστοτέλης, μαθητὴς τῆς Πλατωνικῆς Ἀκαδημίας, ἀλλὰ καὶ ἡγήτορας τοῦ Λυκείου, θὰ ἀναπτύξει περισσότερο αὐτὴν τὴ θεώρηση τοῦ Πλάτωνα γιὰ τὴ δημιουργία τῶν Ἐπιστημῶν.

III. Ἐν ἀρχῇ ἦν... ὁ Ἀριστοτέλης

Τί ἀπεκόμισε ὁ Ἀριστοτέλης ἀπὸ τὴν ἀρχαιότερη καὶ τὴ νεότερη ὁμάδα τῆς Πλατωνικῆς Ἀκαδημίας; Ἡ ἔννοια τῶν στοιχείων τοῦ εἶναι οἰκεία «ἐν γεωμετρίᾳ πρὸ ἔργου τὸ περὶ τὰ στοιχεῖα γεγυμνάσθαι»[25].

Ἡ οἰκοδόμηση τῶν «στοιχείων» δὲν ἀποτελεῖ μιὰ ἰδιαίτερη πραγματεία τοῦ Σταγειρίτη, ὅμως σὲ ἀρκετὰ ἀποσπάσματα μποροῦμε νὰ διακρίνουμε ὁρισμοὺς καὶ μεθόδους οἱ ὁποῖες θὰ ἀποτελέσουν μέρος τῶν *Στοιχείων* τοῦ Ἀλεξανδρινοῦ.

Στοὺς *Σοφιστικοὺς Ἐλέγχους* θεωρώντας πὼς «χαλεπὸν γὰρ ἅμα πολλὰ συνορᾶν»[26] διακήρυσσε πὼς τὸ πρῶτο βῆμα εἶναι τὸ βασικὸ καὶ ἑπομένως τὸ πιὸ δύσκολο: «τῶν γὰρ εὑρισκομένων ἁπάντων τὰ μὲν παρ᾽ ἑτέρων ληφθέντων πρότερον πεπονημένα κατὰ μέρος ἐπιδέδωκεν ὑπὸ τῶν παραλαβόντων ὕστερον· τὰ δ᾽ ἐξ ὑπαρχῆς εὑρισκόμενα μικρὰν τὸ πρῶτον ἐπίδοσιν λαμβάνειν εἴωθε, χρησιμωτέραν μέντοι πολλῷ τῆς ὕστερον ἐκ τούτων αὐξήσεις· μέγιστον γὰρ ἴσως ἀρχὴ παντὸς ὥσπερ λέγεται διὸ καὶ χαλεπώτατον· ... διόπερ οὐδὲν θαυμαστὸν ἔχειν τι πλῆθος τὴν τέχνην. ταύτης δὲ τῆς πραγ-

25. H. Diels, *Elementum* 163^b 23.
26. Ἀριστοτελους, *Περὶ Σοφιστικῶν Ἐλέγχων*, 15.2.

ματείας οὐ τὸ μὲν ἦν τὸ δ' οὐκ ἦν προεξεργασμένον, ἀλλὰ νοῦν παντελῶς ὑπῆρχον»[27].

Οἱ τελευταῖες δύο γραμμὲς τοῦ Σταγειρίτη ἴσως νὰ ἀποτελοῦν τὴ ληξιαρχικὴ πράξη γέννησης τῆς λογικῆς ὅπως πολὺ ἀργότερα χρησιμοποιήθηκε[28, 29].

Αὐτὴ ἡ σχεδὸν συγκλίνουσα θεώρηση πὼς ἡ ταξινόμηση ἐμβίων καὶ φυτῶν[30] βρίσκεται στὴ βάση τῆς ἀριστοτελικῆς διάταξης μᾶλλον ἀδικεῖ τὸν Σταγειρίτη. Ἡ θητεία του στὴν Πλατωνικὴ Ἀκαδημία καὶ οἱ δικές του ἀναζητήσεις ἀποτελοῦν τοὺς κύριους παράγοντες γιὰ τὴ διαμόρφωση τῆς ἀξιωματικῆς του.

Τὰ *Ἀναλυτικά* του θὰ ἀποτελέσουν ἕνα ἀπαράμιλλο πρότυπο σύστημα ἐννοιῶν ἀπ' ὅπου ὁ συλλογισμός, τὸ παγκόσμιο ἐργαλεῖο τῆς σκέψης, ὁ «ἐναργέστερος ὁ διὰ τῆς ἐπαγωγῆς»[31], κυριαρχεῖ.

Ὅμως θὰ ξεκινήσει μὲ τὶς ἀπαρχές, τὶς ὁποῖες θὰ λάβει ἀναπόδεικτα γιὰ νὰ θεμελιώσει τὸ οἰκοδόμημά τους. «Λέγω δ' ἀρχὰς ἐν ἑκάστῳ γένει ταύτας, ἃς ὅτι ἔστι μὴ ἐνδέχεται δεῖξαι. τί μὲν οὖν σημαίνει καὶ τὰ πρῶτα καὶ τὰ ἐκ τούτων λαμβάνεται· ὅτι δ' ἔστι, τὰς μὲν ἀρχὰς ἀνάγκη λαμβάνειν, τὰ δ' ἄλλα δεικνύναι, οἷον τι μονὰς ἢ τί τὸ εὐθὺ καὶ τρίγωνον»[32].

---

27. *Αὐτόθι*, 34, 183 β 17-23 καὶ 34-36.

28. Πβ. B. Mates, *Stoic Logic*, California University Press, Berkeley - Los Angeles, 1953 καὶ V. Brochard, *La logique des Stoïciens; deux études*, Études de Philosophie antique et de Philosophie moderne, Paris, Vrin, 1954, σσ. 220-251.

29. Ὁ Κικέρωνας μελετώντας τοὺς Στωϊκοὺς μετέφερε στὰ λατινικὰ τὴ λέξη λογικὴ ὡς logica. Γιὰ τὸν Πλάτωνα ἦταν διαλεκτικὴ καὶ γιὰ τὸν Ἀριστοτέλη ἀναλυτική.

30. Ἕνα ἀπόσπασμα τοῦ κωμικοῦ Ἐπικράτη παρουσιάζει μιὰ σκηνὴ στὴν Πλατωνικὴ Ἀκαδημία, ὅπου οἱ φοιτητὲς μελετοῦν τὰ προβλήματα τῆς ταξινόμησης ἀναζητώντας τὰ ὅρια ποὺ χωρίζουν τὰ ἔμβια ἀπὸ τὰ εἴδη τῶν δένδρων ἢ φυτῶν.

«περὶ γὰρ φύσεως ἀφοριζόμενοι
διεχώριζον ζώων τε βίον
δένδρων τε φᾶσιν, λαχάνων τὰ γένη».

(Poetarum Comicorum Graecorum fragmenta (hrsg) Meineke - Boethe, 1885, 512^{β} 13).

«Στὴν ἀρχὴ ὅλοι σιωποῦσαν καὶ ἦταν σκεπτικοὶ καὶ σκοτισμένοι, μὲ σκυμμένα κεφάλια. Τότε πετάχτηκε ξαφνικὰ ἕνας νεαρὸς μὲ ἕναν ὁρισμό: «Κηπευτικὸ μὲ σφαιρικὸ καρπό». Ἄλλος εἶπε ὅτι τὸ κολοκύθι ἀνήκει στὸ γένος «δένδρο». Ἕνας γιατρὸς ἀπὸ τὴ Σικελία, ὁ ὁποῖος ἄκουσε αὐτὴ τὴν φλυαρία γέλασε τρανταχτὰ μὲ τὴν ἀφέλειά τους... Οἱ νεαροὶ δὲν ἔδωσαν καμμιὰ σημασία. Τότε ὅμως πῆρε τὸν λόγο ὁ Πλάτων. Μὲ ἠρεμία καὶ ἄνεση ἄρχισε νὰ τοὺς ἐξηγεῖ ἐκ θεμελίων σὲ ποιό γένος ἀνήκει τὸ κολοκύθι καί, ὅταν τοὺς ἄφησε, ἀσχολοῦνταν ἀκόμα μὲ τὴν ταξινόμηση». I. Düring, *Ἀριστοτέλης*. Παρουσίαση καὶ ἑρμηνεία τῆς σκέψης του, Β΄ τόμ., (μτφρ. Α. Γεωργίου-Κατσιβέλα), ΜΙΕΤ, Ἀθήνα, 2003, σ. 330.

31. Ἀριστοτελους, Ι *Ἀναλυτικὰ* II 23 68 b 35.

32. Ἀριστοτελους, *Ἀναλυτικὰ Ὕστερα*, 76, 10 31-34.

Κατὰ τὸν Σταγειρίτη κάθε ἀποδεικτικὴ ἐπιστήμη, πρέπει νὰ περιστρέφεται γύρω ἀπὸ τρία στοιχεῖα[33]: τὸ γένος τοῦ ὁποίου θεωρεῖ τὶς βασικὲς ἰδιότητες, τὰ κοινὰ λεγόμενα ἀξιώματα, «ἐξ ὧν πρώτων ἀποδείκνυσι»[34] καὶ τρίτον τὶς ἰδιότητες ποὺ ἡ ἐπιστήμη θέτει γιὰ καθεμία, τὴ σημασία[35]. Τὰ στοιχεῖα τῆς ἀπόδειξης εἶναι τρία ἐπίσης: τὸ θέμα τῆς ἀπόδειξης, οἱ ἰδιότητες ποὺ ἀποδεικνύει καὶ οἱ ἀπαρχές: «περὶ ὅ τε δείκνυσι καὶ ἃ δείκνυσι καὶ ἐξ ὧν»[36]. Ἀκόμα διακρίνει τὴν ὑπόθεση ἀπὸ τὸ αἴτημα ἀφοῦ τὸ αἴτημα «τὸ ὑπεναντίον τοῦ μανθάνοντος τῇ δόξῃ, ἢ ὃ ἄν τις ἀποδεικτὸν ὂν λαμβάνῃ καὶ χρῆται μὴ δείξας»[37].

Γιὰ τὶς ἀναπόδεικτες ἀπαρχὲς οἱ ἀποδεικτικὲς ἐπιστῆμες ἐκτὸς ἀπὸ ἀξιώματα ὁ Ἀριστοτέλης ἀπαιτεῖ τὴν ὕπαρξη ὅρων, τῶν ὁρισμῶν, οἱ ὁποῖοι δὲν εἶναι ὑποθέσεις ἀφοῦ δὲν ἀναφέρουν τίποτα γιὰ τὴν ὕπαρξη ἢ τὴ μὴ ὕπαρξη, ἀλλὰ βρίσκονται στὶς προτάσεις[38]. Μάλιστα γιὰ τὴ γεωμετρία[39] θεωρεῖ πὼς πρέπει νὰ ἀποδεχθοῦμε τὴν ὕπαρξη τοῦ σημείου καὶ τῆς εὐθείας: «ἔστι δ' ἴδια μὲν καὶ ἃ λαμβάνεται εἶναι, περὶ ἃ ἡ ἐπιστήμη θεωρεῖ τὰ ὑπάρχοντα καθ' αὑτά... ἡ δὲ γεωμετρία σημεῖα καὶ γραμμάς»[40]. Αὐτὲς οἱ ἀπαρχὲς μπορεῖ νὰ μὴν μποροῦν νὰ ἀποδειχθοῦν «λέγω δ' ἀρχὰς ἐν ἑκάστῳ γένει ταύτας, ἃς ὅτι ἔστι μὴ ἐνδέχεται δεῖξαι»[41]. Ἡ ὕπαρξη ὅλων τῶν ὑπολοίπων πρέπει νὰ ἀποδειχθεῖ.

Ὁ H. Scholtz[42] θεωρεῖ πὼς ἡ ἀξιωματικὴ τοῦ Ἀριστοτέλη διαφέρει ἀπὸ τὴν ἀξιωματικὴ τοῦ Hilbert[43] μονάχα στὸ ὅτι ἀπουσιάζει ἡ ἀπαίτηση τῆς μὴ ἀντίφασης τῶν ἀξιωμάτων κάτι ποὺ γιὰ τὸν Ἀριστοτέλη ἦταν περιττὸ ἀφοῦ θεωροῦσε πὼς τὰ ἀξιώματά του εἶναι *ἀπόλυτες ἀλήθειες*. Ὅσο γιὰ τὴν πλήρωση ὁ Scholtz θεωρεῖ ὅτι στὸν Ἀριστοτέλη ὑπάρχει ἐκφρασμένη μὲ τὴ μορφὴ τοῦ αἰτήματος τῆς ὁμογένειας ἀπαιτώντας πὼς οἱ ἰδιότητες τῶν πραγμάτων ποὺ ἀνῆκαν στὸ ἴδιο γένος δὲν ἀποδεικνύονται παρὰ ξεκινώ-

---

33. «Πᾶσα γὰρ ἀποδεικτικὴ ἐπιστήμη περὶ τρία ἐστίν». *Αὐτόθι*, 76 b, 11-12.

34. *Αὐτόθι*, 76 b, 14-15.

35. «καὶ τρίτον τὰ πάθη, ὧν τί σημαίνει ἕκαστον λαμβάνει». *Αὐτόθι*, 76 b, 15-16.

36. *Αὐτόθι*, 76 b 22.

37. *Αὐτόθι*, 76 b, 32-34.

38. «Οἱ μὲν οὖν ὅροι οὐκ εἰσὶν ὑποθέσεις (οὐδὲ γὰρ εἶναι ἢ μὴ λέγονται), ἀλλ' ἐν ταῖς προτάσεσιν αἱ ὑποθέσεις», *αὐτόθι*, 76 b, 35-36.

39. Γιὰ τὴν Ἀριθμητικὴ θεωρεῖ πὼς τὸ βασικὸ στοιχεῖο εἶναι οἱ μονάδες «οἷον μονάδας ἡ ἀριθμητική» *Ἀναλυτικὰ Ὕστερα*, 76[b] 3.

40. *Αὐτόθι*, 76[a], 31.

41. *Αὐτόθι*.

42. H. Scholtz, Die Axiomatik der Alten, *Blätter für deutsche Philosophie*, Bd. 4, Heft 3/4, 1930, σσ. 259-278.

43. Θυμίζουμε πὼς γιὰ τὸν Hilbert ἕνα σύστημα ἀξιωμάτων εἶναι ἀποδεκτὸ ὅταν ἱκανοποιεῖ τὶς παρακάτω ἀπαιτήσεις: i) νὰ μὴν ὁδηγεῖ σὲ ἀντιφάσεις ii) νὰ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἀνεξάρτητα μεταξύ τους ἀξιώματα iii) νὰ εἶναι πλῆρες δηλαδὴ ἡ θεωρία ποὺ ἀπορρέει νὰ μπορεῖ ἀποδεικτικὰ νὰ ἐξασφαλίσει τόσο τὴν κατάφαση μιᾶς ὁποιασδήποτε πρότασης ὅσο καὶ τὴν ἄρνησή της.

ντας ἀπὸ στοιχεῖα διατυπωμένα γιὰ δοθὲν εἶδος (δηλαδὴ τὰ ἀξιώματα γιὰ μιὰ δοθεῖσα ἀξιωματικὴ θεωρία μποροῦν νὰ βρίσκονται σὲ ἱκανοποιητικὸ βαθμὸ γιὰ νὰ καθορισθοῦν ὅλες οἱ προτάσεις τῆς θεωρίας). «Ἐπεὶ δὲ φανερὸν ἔτι τῶν ἐξ᾿ ἀρχῆς αἰτίων δεῖ λαβεῖν ἐπιστήμην (τότε γὰρ εἰδέναι φαμὲν ἕκαστον, ὅταν τὴν πρώτην αἰτίαν οἰώμεθα γνωρίζειν)»[44].

Τὰ ἀξιώματα πρέπει νὰ εἶναι ἁπλά, ἀναγκαῖα καὶ προφανῆ καὶ συνεπῶς ἀναπόδεικτα. Ἡ ἐπιλογὴ τῶν πρώτων θέσεων δὲν ἀνήκουν στὸν μαθηματικὸ ἀλλὰ στὸν φιλόσοφο «οὖν τοῦ φιλοσόφου καὶ τοῦ περὶ πάσης τῆς οὐσίας θεωροῦντος ᾗ πέφυκεν, καὶ περὶ τῶν συλλογιστικῶν ἀρχῶν ἐστὶν ἐπισκέψασθαι, δῆλον. προσήκει δὲ τὸν μάλιστα γνωρίζοντα περὶ ἕκαστον γένος ἔχειν λέγειν τὰς βεβαιοτάτας ἀρχὰς τοῦ πράγματος, ὥστε καὶ τὸν περὶ τῶν ὄντων ᾗ ὄντα τὰς πάντων βεβαιοτάτας. ἔστι δ᾿ οὗτος ὁ φιλόσοφος»[45].

Ὅμως πέρα ἀπὸ τὴ στέρεη θεμελίωση, ὁ Σταγειρίτης θὰ ἀφομοιώσει τὰ διδάγματα τῆς πλατωνικῆς διδασκαλίας, θὰ υἱοθετήσει μερικὰ καὶ θὰ δώσει τοὺς δικούς του ὁρισμοὺς γιὰ βασικὲς γεωμετρικὲς ἔννοιες τὶς ὁποίες θὰ παραλάβει ὁ Ἀλεξανδρινὸς καὶ θὰ τὶς ἐντάξει στὰ *Στοιχεῖα*. Οἱ ἀριστοτελικοὶ ὁρισμοὶ εἶναι παρόντες στὸ πρότυπο λογικὸ οἰκοδόμημα τῶν αἰώνων.

Πρῶτα οἱ ἀπόηχοι τῆς πλατωνικῆς διδασκαλίας ἐπανεμφανίζονται μὲ ἔντονη χροιὰ στὸν Σταγειρίτη:

«εὐθύ τι λέγω φησὶν ὁ λόγος καὶ περιφερές»[46].	«οἷόν τὸ εὐθὺ ὑπάρχει γραμμῇ καὶ τὸ περιφερές»[47].
«καὶ μὴν εὐθύ γε (ἐστι τοῦτο), οὗ ἂν τὸ μέσον ἀμφοῖν τοῖν ἐσχάτοιν ἐπίπροσθεν ᾖ»[48]	«οἷον, εἰ ὡρίσατο γραμμὴν πεπερασμένην εὐθεῖαν πέρας ἐπιπέδου ἔχοντος πέρατα, οὗ τὸ μέσον ἐπιπροσθεῖ τοῖς πέρασιν, εἰ τῆς πεπερασμένης γραμμῆς ὁ λόγος ἐστὶ πέρας ἐπιπέδου ἔχοντος πέρατα, τοῦ εὐθέος δεῖ εἶναι τὸ λοιπόν· οὗ τὸ μέσον ἐπιπροσθεῖ τοῖς πέρασιν»[49].

ἐνῶ οἱ ὁρισμοὶ αὐτοὶ θὰ καταλήξουν στὸν εὐκλείδειο ὁρισμὸ τῆς εὐθείας:

---

44. Αριστοτελους, *Μετὰ τὰ Φυσικά*, 983 a 24-26.
45. Αριστοτελους, *Μετὰ τὰ Φυσικά*, Γ 1005 b 6-11.
46. Πλατωνος, *Φίληβος*, 51c.
47. Αριστοτελους, *Ἀναλ. Ὕστερα* Α, 73^{a} 38.
48. Πλατωνος, *Παρμενίδης*, 137e.
49. Αριστοτελους, *Τοπικὰ Ζ*, 148^{b} 26.

«εὐθεῖα γραμμὴ ἐστιν,
ἥτις ἐξ' ἴσου τοῖς
ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις
κεῖται»[50].

ἐνῶ οἱ ὁρισμοὶ τοῦ ἐπιπέδου δὲν κρύβουν τὴν ἐπίδραση τοῦ Πλάτωνα στὸν Ἀριστοτέλη.

«ἐπίπεδον καλεῖς τι
καὶ ἕτερον αὖ στερεόν,
οἷον ταῦτα τὰ ἐν
γεωμετρίαις... κατὰ γὰρ
παντὸς σχήματος τοῦτο
λέγω, εἰς ὃ τὸ στερεὸν
περαίνει τοῦτ' εἶναι
σχῆμα· ὅπερ ἂν συλλαβὼν
εἴποιμι στερεοῦ πέρας[51]
σχῆμα εἶναι»[52].

«εἰσὶ δὲ τῶν τοιούτων
ὁρισμῶν ὅ τε τῆς στιγμῆς
καὶ ὁ τῆς γραμμῆς καὶ ὁ
τοῦ ἐπιπέδου· πάντες γὰρ διὰ
τῶν ὑστέρων τὰ πρότερα
δηλοῦσιν· τὸ μὲν γὰρ
γραμμῆς, τὸ δ' ἐπιπέδου τὸ
δὲ στερεοῦ φασὶ πέρας
εἶναι»[53].

Γιὰ νὰ δώσει τὸν ὁρισμὸ τῆς γραμμῆς, τῆς ἐπιφάνειας καὶ τοῦ στερεοῦ ὁ Εὐκλείδης βασιζόμενος στοὺς πρότερους ὁρισμοὺς εἶχε μονάχα ἕνα μικρὸ βῆμα νὰ κάνει: «γραμμῆς δὲ πέρατα σημεῖα» (Βιβλίο 1, ὁρσ. 3), «ἐπιφανείας δὲ πέρατα γραμμαί» (Βιβλίο 1, ὁρσ. 6), «στερεοῦ δὲ πέρας ἐπιφάνεια» (Βιβλίο 11, ὁρσ. 2).

Γιὰ τὸ σημεῖο ὁ Ἀριστοτέλης θεωρεῖ: «οὐ γάρ ἐστιν ἐχόμενον σημεῖον σημείου ἢ στιγμὴ στιγμῆς»[54], ἐνῶ δὲν διστάζει νὰ ἀναφέρει πὼς γιὰ τὸν Πλάτωνα ἡ στιγμὴ εἶναι μιὰ γεωμετρικὴ «φαντασίωση», δηλαδὴ εἶναι «δόγμα γεωμετρικὸν» καὶ ἀποτελεῖ «ἀρχὴν γραμμῆς»[55].

Ἀκόμα ὁ Σταγειρίτης χρησιμοποιεῖ τὴν ἐπιφάνεια μὲ τὴν πρέπουσα μαθηματικὴ ἔννοια, ποὺ συναντᾶμε ἀργότερα στὸν Εὐκλείδη, «δῆλον ὅτι καὶ ἐπιφανείας καὶ τῶν λοιπῶν περάτων»[56], «πλάτος δὲ ἐπιφάνεια»[57]. Συγχέει ὅμως τὴν ἔννοια τοῦ ἐπιπέδου μὲ τὴν ἔννοια τῆς ἐπιφάνειας «τὸ μὲν γὰρ γραμμῆς, τὸ δ' ἐπιπέδου, τὸ δὲ στερεοῦ φασὶ πέρας εἶναι»[58], «τὸ δὲ διχῆ

---

50. Ευκλειδου, *Στοιχεῖα*. Βιβλ. 1 ὁρσ. 4.

51. Κατὰ τὸν Διογένη Λαέρτιον ἡ σύλληψη τῆς ἐπιφάνειας ὡς πέρας ἐπιπέδου ἀνάγεται στὸν Πλάτωνα. «[Πλάτων] πρῶτος ἐν φιλοσοφίᾳ... ὠνόμασε ... τῶν περάτων τὴν ἐπίπεδον ἐπιφάνειαν». Διογ. Λαερτιου, *Βίοι*, III, 24.

52. Πλατωνος, *Μένων*, 76 a.

53. Αριστοτελους, *Τοπικὰ Ζ΄*, 141 β 19-25.

54. Αριστοτελους, *Περὶ Γενέσεως καὶ φθορᾶς*, 317a 11.

55. Αριστοτελους, *Μετὰ τὰ Φυσικά*, 992a 19.

56. Αριστοτελους, *Φυσικῆς Ἀκροάσεως*, Δ΄, 209a 8.

57. Αριστοτελους, *Μετὰ τὰ Φυσικά*, Δ΄, 1020α 14.

58. Αριστοτελους, *Τοπικὰ Ζ΄*, 141 b 22.

ἐπίπεδον»[59], καὶ δὲν διστάζει νὰ ἀναφερθεῖ καὶ στὶς δύο, «ἔστι γὰρ λαβεῖν κοινὸν ὅρον, πρὸς ὃν τὰ μόρια αὐτῆς συνάπτει, στιγμὴν καὶ τῆς ἐπιφανείας γραμμήν· τὰ γὰρ τοῦ ἐπιπέδου μόρια πρός τινα κοινὸν ὅρον συνάπτει· ὡσαύτως δὲ καὶ ἐπὶ τοῦ σώματος ἔχοις ἂν λαβὼν κοινὸν ὅρον, γραμμὴν ἢ ἐπιφάνειαν, πρὸς ἃ τὰ τοῦ σώματος μόρια συνάπτει»[60].

Ὁ Εὐκλείδης μετὰ δὲν θὰ δυσκολευθεῖ νὰ ὁρίσει: «ἐπιφάνεια δε ἐστίν, ὃ μῆκος καὶ πλάτος μόνον ἔχει» (Βιβλίο 1, ὁρσ. 5) «ἐπίπεδος ἐπιφάνεια ἐστίν, ἥτις ἐξ' ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς εὐθείας κεῖται» (Βιβλίο 1, ὁρσ. 7). Αὐτὸς ὁ ὁρισμὸς τοῦ χρησιμεύει καὶ γιὰ νὰ ὁρίσει τὴν εὐθεία: «εὐθεῖα γραμμὴ ἐστιν, ἥτις ἐξ ἴσου ταῖς ἐφ' ἑαυτῆς σημείοις κεῖται» (Βιβλίο 1, ὁρσ. 4).

Ἂς δοῦμε τώρα κάποιους ἀπὸ τοὺς βασικοὺς ὁρισμούς, τοῦ σημείου καὶ τῆς εὐθείας, ὅπως ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν κάθε τριγώνου ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθές, ποὺ παρουσιάζει ὁ Σταγειρίτης πῶς μετασχηματίζονται στὰ *Στοιχεῖα* ἀπὸ τὸν Εὐκλείδη:

«ἡ στιγμὴ δὲ ἀδιαίρετον»[61]	«σημεῖόν ἐστιν οὗ μέρος οὐθέν»[62].
«καθάπερ οἱ τὴν γραμμὴν ὁριζόμενοι μῆκος ἀπλατὲς εἶναι»[63].	«γραμμὴ δὲ μῆκος ἀπλατές»[64].
«πᾶν τρίγωνον ἔχει δυσὶν ὀρθαῖς ἴσας»[65].	«αἱ ἐντὸς τοῦ τριγώνου τρεῖς γωνίαι δυσὶν ὀρθαῖς ἴσαι εἰσίν»[66].

Χαρακτηριστικὴ εἶναι ἡ ὁμοιότητα τοῦ ὁρισμοῦ τῆς ὀξείας γωνίας.

«γωνία δὲ ὀξεῖα ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς»[67].	«ὀξεῖα δὲ ἡ ἐλάσσων ὀρθῆς»[68].

Ἡ ἔννοια τοῦ σχήματος[69] σημαντικὴ στὴν ἑλληνικὴ γεωμετρία, ἀφοῦ ἡ

59. Αριστοτελουσ, *Μετὰ τὰ Φυσικὰ* Δ, 1016b 27.
60. Αριστοτελουσ, *Κατηγορίαι*, 5a 2.
61. Αριστοτελουσ, Φυσικῆς Ἀκροάσεως Ζ, 231ª 25.
62. Ευκλειδου, *Στοιχεῖα*, Βιβλίο Ι, ὁρσ. 1.
63. Αριστοτελουσ, *Τοπικὰ* Ζ, 143ᵇ 11.
64. Ευκλειδου, *Στοιχεῖα*, Βιβλίο Ι, ὁρσ. 2.
65. Αριστοτελουσ, *Ἀναλυτικὰ Ὕστερα*, 73b 36.
66. Ευκλειδου, *Στοιχεῖα*, Βιβλίο Ι, ὁρσ. 32.
67. Αριστοτελουσ, *Τοπικὰ* 107a 16.
68. Ευκλειδου, *Στοιχεῖα*, Βιβλίο Ι, ὁρσ. 12.
69. Θυμίζουμε πῶς ὁ Πλάτων ὁρίζει τὴν ἔννοια τοῦ σχήματος μέσω τοῦ χρώματος: «ἔστω γὰρ δὴ ἡμῖν τοῦτο σχῆμα, ὃ μόνον τῶν ὄντων τυγχάνει χρώμασι ἀεὶ ἑπόμενον», *Μένων* 75 b. Ὁ ὁρισμὸς αὐτὸς κατὰ τὸν σπουδαῖο ἄγγλο ἱστορικὸ τῶν μαθηματικῶν Th. Heath ἔχει τὶς ρίζες του στοὺς Πυθαγορείους T. Heath, *A History of Greek Mathematics*,

ἔλλειψη σχήματος ὁδηγεῖ στὴν ἔννοια ἀσχημίας (α-σχημο) καὶ πάλι ἀναδεικνύει τὴν συγγένεια τοῦ Σταγειρίτη μὲ τὸν 'Αλεξανδρινό, ὅπως καὶ ὁ ὁρισμὸς τοῦ μέρους καὶ τῆς ὁμοιότητας:

«ἅπαν δὴ σχῆμα ἐπίπεδον ἢ εὐθύγραμμόν ἐστιν ἢ περιφερόγραμμον, καὶ τὸ μὲν εὐθύγραμμον ὑπὸ πλειόνων περιέχεται γραμμῶν, τὸ δὲ περιφερόγραμμον ὑπὸ μιᾶς»[70].	«σχῆμά ἐστι το ὑπό τινος ἤ τινων ὅρων περιεχόμενον»[71].
«μέρος λέγεται ἕνα μὲν τρόπον, εἰς ὃ διαιρεθείη ἂν τὸ ποσὸν δοκοῦν· ἀεὶ γὰρ τὸ ἀφαιρούμενον τοῦ ποσοῦ, ᾗ ποσόν, μέρος λέγεται ἐκείνου, ὣν τῶν τριῶν τὰ δύο μέρος λέγεταί πως, ἄλλον δὲ τρόπον τὰ καταμετροῦντα ὧν τοιούτων μόνον· διὸ τὰ δύο τῶν τριῶν ἔστι μὲν ὡς λέγεται μέρος, ἔστι δ' ὡς οὔ»[73].	«μέρος ἐπὶ μέγεθος μεγέθους τὸ ἐλάσσον τοῦ μείζονος, ὅταν καταμετρῇ τὸ μεῖζον»[72].
«τοῦ δ' ὅμοιον εἶναι χρῶμα χρώματι καὶ σχῆμα σχήματι ἄλλο... ὁμώνυμον γὰρ τὸ ὅμοιον ἐπὶ τούτων. ἔνθα μὲν γὰρ ἴσως τὸ ἀνάλογον ... τὰς πλευρὰς καὶ ἴσας τὰς γωνίας»[74].	«ὅμοια σχήματα εὐθύγραμμά ἐστιν, ὅσα τάς τε γωνίας ἴσας ἔχει κατὰ μίαν καὶ τὰς περὶ τὰς ἴσας γωνίας πλευρὰς ἀνάλογον»[75, 76].

Oxford, 1921, Vol. I, σ. 293. Πβ. ἐπίσης «τὸ γὰρ χρῶμα ἢ ἐν τῷ πέρατί ἐστιν ἢ πέρας, διὸ καὶ οἱ Πυθαγόρειοι τὴν ἐπιφάνειαν χροιὰν ἐκάλουν» ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΟΥΣ, *Περὶ Αἰσθ.*, 439α30. Στὸν *Μένωνα* ὁ Σωκράτης θὰ ὁρίσει τὸ σχῆμα βασιζόμενος στὶς ἔννοιες τοῦ στερεοῦ καὶ τοῦ πέρατος:

«Κατὰ γὰρ παντὸς σχήματος τοῦτο λέγω, εἰς ὃ τὸ στερεὸν περαίνει, τοῦτ' εἶναι σχῆμα. ὅπερ ἂν συλλαβὼν εἴποιμι στερεοῦ πέρας σχῆμα εἶναι». *Μένων* 75c - 75e.

70. ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΟΥΣ, *Περὶ Οὐρανοῦ*, 286ᵇ13.

71. ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ, *Στοιχεῖα*, Βιβλίο I, ὁρσ. 15.

72. *Αὐτόθι*, Βιβλίο 5, ὁρσ. 1.

73. ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΟΥΣ, *Μετὰ τὰ Φυσικὰ* Δ, 1023ᵇ 15-16.

74. ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΟΥΣ, *'Αναλ. Ὕστερα*, Β. 99ᵃ 11.

75. ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ, *Στοιχεῖα*, Βιβλίο 6, ὁρσ. 1.

76. Πβ. καὶ τὸν ὁρισμὸ τῆς ὁμοιότητας γιὰ τὰ στερεά: «Ὅμοια στερεὰ σχήματα ἐστι τὰ ὑπὸ ὁμοίων ἐπιπέδων περιεχόμενα ἴσων τὸ πλῆθος», *Στοιχεῖα*, Βιβλίο 11, ὁρσ. 2.

Ἐνδιαφέρον παρουσιάζει καὶ ὁ ὁρισμὸς τῆς διάστασης[77] προερχόμενος ἀπὸ τὸ σῶμα[78], ἔκφραση τὴν ὁποία δὲν θὰ χρησιμοποιήσει ὁ Εὐκλείδης ἀφοῦ χρησιμοποιεῖ πιὰ τοὺς ὅρους τὸ στερεὸν καὶ τὸ στερεὸν σχῆμα, ἀλλὰ καὶ ὁ ὁρισμὸς τοῦ στερεοῦ ἀπὸ τοῦ πέρατος:

«διαστήματα μὲν οὖν ἔχει τρία, μήκους καὶ πλάτους καὶ βάθος, οἷς ὁρίζεται σῆμα πᾶν»[79]. «τὸ σῶμα βάθος ἔχει, τοῦτο δ' ἐστὶ τὸ τρίτον μέγεθος»[80].	«στερεόν ἐστι τὸ μῆκος καὶ πλάτος καὶ βάθος ἔχουν»[81].
«εἰσὶ δὲ τινές, οἳ ἐκ τοῦ πέρατος εἶναι καὶ ἔσχατα τὴν στιγμήν... γραμμῆς, ταύτην δ' ἐπιπέδου, τοῦτο δὲ τοῦ στερεοῦ»[82].	«στεροῦ δὲ πέρας ἐπιφάνεια»[83].

Φυσικὰ δὲν θὰ πρέπει νὰ ἀποσιωπήσουμε πὼς ἡ τρίτη διάσταση ἔχει νωρίτερα καθορισθεῖ ἀπὸ τὸν Πλάτωνα:

«ἔστι δέ που τοῦτο περὶ τὴν τῶν κύβων αὔξην καὶ τοῦ βάθους μετέχον»[84].

«Τὸ δὲ τοῦ σώματος εἶδος πᾶν καὶ βάθος ἔχει»[85].

Ἀπὸ αὐτὴ τὴ συγκριτικὴ παρουσίαση δὲν θὰ μποροῦσε νὰ ἀπουσιάζει ὁ κοινὸς «γνώριμός» τους, ὁ Εὔδοξος, τοῦ ὁποίου ἡ θεωρία ἀναλογιῶν του, ἀριστούργημα τῆς ἀρχαιοελληνικῆς σκέψης, ἐπέζησε μέχρι τὸν 19ο αἰῶνα.

«Ἔστι δ' ἡ μὲν καθόλου (ἀπόδειξις) τοιαύτη· προϊόντες γὰρ δεικνύουσιν, ὥσπερ περὶ τοῦ ἀνὰ λόγον,	«ἐναλλάξ λόγος ἐστὶ λῆψις τοῦ ἡγουμένου πρὸς τὸ ἡγούμενον καὶ τοῦ ἑπομένου

77. Τὴν ἔννοια τοῦ ὄγκου ὡς στερεοῦ σώματος ἀπαντᾶμε στὸν Παρμενίδη: «αὐτὰρ ἐπεὶ πεῖρας πύματον τετελεσμένον ἐστὶ πάντοτε, εὐκύκλου ἐναλίγκιον ὄγκῳ, μεσσόθεν ἰσοπαλὲς πάντῃ». H. Diels, *Fragmente der Vorsokratiker* 18 B 8.

78. Πολλοὺς αἰῶνες ἀργότερα ὁ Κλαύδιος Πτολεμαῖος σὲ χαμένη πραγματεία του ἀπέδειξε, ὅπως ἀναφέρει ὁ Σιμπλίκιος, πὼς ὁ χῶρος ἔχει τρεῖς διαστάσεις. Πβ. Σιμπλικιου, *Περὶ Οὐρανοῦ*, ἐκδ. Heiberg, σ. 710.

79. Αριστοτελους, *Φυσικά*, 209a 4.

80. Αριστοτελους, *Περὶ Ψυχῆς*, 423a 22.

81. Ευκλειδου, *Στοιχεῖα*, Βιβλίο 11, ὁρσ. 1.

82. Αριστοτελους, *Μετὰ τὰ Φυσικά*, 1090^{b} 5.

83. Ευκλειδου, *Στοιχεῖα*, Βιβλίο 11, ὁρσ. 2.

84. Πλατωνος, *Πολιτεία*, z, 528 b.

85. Πλατωνος, *Τίμαιος*, 53 c.

εἶναι ὅτι, ὃ ἂν ᾖ τι τοιοῦτον, ἔσται ἀνὰ λόγον, ὃ οὔτε γραμμὴ οὔτ' ἀριθμὸς οὔτε στερεὸν οὔτ' ἐπίπεδον, ἀλλὰ παρὰ ταῦτά τι»[86].

πρὸς τὸ ἑπόμενον»[87, 88].

Καθὼς ὁ ἀριθμός, θεωρεῖ ὁ Σταγειρίτης, πὼς λαμβάνεται πάντα μὲ τὴν πρόσθεση μιᾶς μονάδας στὸν προηγούμενο: «διὸ καὶ ὁ μὲν μαθηματικὸς ἀριθμὸς ὅς ἂν ᾖ τινῶν ἐστίν, ἢ πύρινος ἢ γήινος ἢ μοναδικός· ἀλλ' ἡ οὐσία τὸ τοσόνδ' εἶναι πρὸς τοσονδὰ κατὰ τὴν μίξιν· τοῦτο δ' οὐκέτι ἀριθμὸς ἀλλὰ λόγος μίξεως ἀριθμῶν σωματικῶν ἢ ὁποιωνοῦν»[89]. Ἀπ' αὐτὸ τὸ ἀπόσπασμα διαφαίνεται πὼς ὁ Σταγειρίτης διακρίνει τὸν ἀριθμὸ ἀπὸ τὸν λόγο.

«ἡ γὰρ ἀναλογία... ἐν τέτταρσιν ἐλαχίστοις»[90].

«ἀναλογία δὲ ἐν τρισὶν ὅροις ἐλαχίστη ἐστίν»[91].

Ὅμως καὶ ἡ ἔννοια τῆς ἐξάντλησης βρίσκεται στὸν Ἀριστοτέλη, ἡ ὁποία μετὰ τὸν «δανεισμό» της στὸν Εὐκλείδη, πέρασε στὰ χέρια τοῦ Συρακούσιου[92] καὶ ἔμελλε νὰ παίξει σημαντικὸ ρόλο στὴ διαμόρφωση τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ.

«πρὸς πεπερασμένον γὰρ ἀεὶ προστεθεὶς ὑπερβαλῶ παντὸς ὡρισμένου καὶ ἀφαιρῶν ἐλλείψω ὡσαύτης»[93].

«δύο μεγεθῶν ἀνίσων ἐκκειμένων, ἐὰν ἀπὸ τοῦ μείζονος ἀφαιρεθῇ μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ καὶ τοῦ καταλειπομένου μεῖζον ἢ τὸ ἥμισυ, καὶ τοῦτο ἀεὶ γίγνηται, λειφθήσεταί τι μέγεθος, ὃ ἔσται ἔλασσον τοῦ ἐκκειμένου ἐλάσσονος μεγέθους»[94].

Ὁ Ἀριστοτέλης διακρίνει τὰ ἀντικείμενα τῆς ἀριθμητικῆς καὶ τῆς γεωμετρίας[95] καὶ παραμένει πιστὸς στὴν πυθαγόρεια ἀντίληψη τοῦ ἀριθμοῦ, ἡ

---

86. ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΟΥΣ, *Ἀναλυτικὰ Ὕστερα*, Α΄, 85ª 36.
87. ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ, *Στοιχεῖα*, Βιβλίο 5, ὁρσ. 12.
88. Ὁ ὁρισμὸς ἔχει ἔννοια μόνο στὴν περίπτωση δύο λόγων.
89. ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΟΥΣ, *Μετὰ τὰ Φυσικά*, 1092β 15.
90. ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΟΥΣ, *Ἠθικὰ Νικομάχεια* Ε΄, 1131ª 31.
91. ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ, *Στοιχεῖα*, Βιβλίο 5, ὁρσ. 8.
92. «Τῶν ἀνίσων χωρίων τὰν ὑπεροχάν, ᾇ εἶμεν αὐτὰν ἑαυτᾷ συντεθειμέναν παντὸς ὑπερέχειν τοῦ προστεθέντος πεπερασμένου χωρίου». *Τετραγωνισμὸς ὀρθογωνίου κώνου τομῆς.*
93. ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΟΥΣ, *Φυσικῆς Ἀκροάσεως*, 266ᵇ 2.
94. ΕΥΚΛΕΙΔΟΥ, *Στοιχεῖα*, Βιβλίο Χ, ὁρσ. 1.
95. «οἷον μονάδας ἡ ἀριθμητική, ἡ δὲ γεωμετρία σημεῖα καὶ γραμμάς», ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΟΥΣ, *Ἀναλυτικὰ Ὕστερα*, 76ᵇ4.

ὁποία εἶναι μιὰ συλλογὴ μονάδων, τὴν ὁποία ἀκολουθεῖ καὶ ὁ Ἀλεξανδρινός:

«εἴπερ ἐστὶν ὁ ἀριθμὸς σύνθεσις μονάδων, ὥσπερ λέγεται ἐπὶ τινῶν»[96].	«ἀριθμὸς δὲ τὸ ἐκ μονάδων συγκείμενον πλῆθος»[97].

ὅμοιος σχεδὸν εἶναι καὶ ὁ ὁρισμὸς ἄρτιου-περιττοῦ:

«περιττὸν τὸ μονάδι μεῖζον ἀρτίου»[98].	«περισσὸς δὲ ὁ μὴ διαιρούμενος δίχα ἢ μονάδι διαφέρων ἀρτίου ἀριθμοῦ»[99].

Ὅσο ὁ Ἀριστοτέλης τόσο καὶ ὁ Εὐκλείδης δὲν θεωροῦν τὴ μονάδα ἀριθμό. Χαρακτηριστικὴ εἶναι καὶ ἡ παρακάτω διάκριση: «ἀντίκειταί πως τὸ ἓν καὶ ἀριθμός, οὐχ ὡς ἐναντίον, ἀλλ᾽ ὥσπερ εἴρηται εἰς πρός τι ἔνια· ᾗ γὰρ μέτρον, τὸ δὲ μετρητόν, ταύτῃ ἀντίκειται»[100]. Αὐτὴ ἡ ἀντίληψη θὰ διαπεράσει ὅλη τὴν ἀρχαιοελληνικὴ κληρονομιά, θὰ διατηρηθεῖ μέχρι τὴν Ἀναγέννηση καὶ μονάχα ὁ Stevin τὸ 1585 στὸ βιβλίο του ἡ *Ἀριθμητικὴ* θὰ διακηρύξει μὲ κεφαλαία γράμματα στὴν πρώτη σελίδα τοῦ ἔργου του πὼς Η ΜΟΝΑΔΑ ΕΙΝΑΙ ΑΡΙΘΜΟΣ[101]. Βέβαια ὀφείλουμε νὰ ὑπογραμμίσουμε πὼς ὁ Εὐκλείδης δὲν κατασκευάζει τὴν ἀριθμητική του μὲ ἀξιωματικὸ τρόπο ὅπως κατασκευάζει τὴ γεωμετρία. Ἡ προσέγγισή του δὲν εἶναι ἀξιωματική[102].

Ἡ ἔννοια τῆς ἰσότητας γεωμετρικῶν σχημάτων[103], ἡ ὁποία ἐξουσίαζε τόσο θεοὺς ὅσο καὶ ἀνθρώπους[104], βασιζόταν στὴν ἐφαρμογή, στὴν ἐπί-θεση. Ἡ θεώρηση τοῦ *ἐφαρμόζειν ἐπὶ τι*[105] θὰ χρησιμοποιηθεῖ συχνὰ ἀπὸ τὸν

---

96. Αριστοτελους, *Μετὰ τὰ Φυσικά*, 1039^a 12.

97. Ευκλειδου, *Στοιχεῖα*, Βιβλίο 7, ὁρσ. 2.

98. Αριστοτελους, *Τοπικὰ* Ζ. 142^b 8.

99. Ευκλειδου, *Στοιχεῖα*, Βιβλίο 7, ὁρσ. 7.

100. Αριστοτελους, *Μετὰ τὰ Φυσικά*, 1057^a 4.

101. S. Stevin, *L'Arithmétique*, στὸ *The Principal Works* of Simon Stevin, vol. II, ἐκδ. Dirk J. Struik Amsterdam, Swets and Zeitlinger, 1958. Πβ. Γενικότερα τὴ διδακτορικὴ διατριβὴ τοῦ Ch. Jones, *On the Concept of One as Number*, University of Toronto, 1978.

102. Γιὰ περισσότερες λεπτομέρειες πβ. τὸ διαχρονικὸ ἄρθρο τῆς S. A. Yanofskaya, Ἀπὸ τὴν ἱστορία τῆς ἀξιωματικῆς, *Ist. Math. Issl.* 1958, t. XI, σσ. 63-96 (στὰ ρωσικά).

103. Θυμίζουμε καὶ τὸν ὁρισμὸ ποὺ δίδει ὁ J. Hadamard: «Ὀνομάζουμε ἴσα σχήματα δύο σχήματα τὰ ὁποῖα μποροῦμε νὰ μεταφέρουμε τὸ ἕνα πάνω στὸ ἄλλο, ἔτσι ὥστε ὅλα τὰ μέρη τους νὰ συμπέσουν. Δηλαδὴ δύο ἴσα σχήματα ἀποτελοῦν ἕνα καὶ μόνο σχῆμα σὲ δύο διαφορετικὲς θέσεις»: J. Hadamard, *Leçons de Géométrie élémentaire*, Paris 1920, I, introduction, σ. 3.

104. Πλατωνος, *Γοργίας* 508a «ἡ ἰσότης ἡ γεωμετρικὴ καὶ ἐν θεοῖς καὶ ἐν ἀνθρώποις μέγα δύναται».

105. Ὁ H. Poincaré θεωρεῖ πὼς ὁ ὁρισμὸς τοῦ ἐφαρμόζειν δὲν ὁρίζει τίποτα: «Καθὼς δὲν ἔχει καμιὰ ἔννοια γιὰ ἕνα πλάσμα ποὺ θὰ κατοικοῦσε σ᾽ ἕναν κόσμο ὅπου θὰ ὑπῆρχαν μόνον ὑγρά. Αὐτὸς ὁ ὁρισμὸς μοῦ φαίνεται σαφής, γιατὶ εἴμαστε συνηθισμένοι στὶς

Εὐκλείδη[106] ἀφοῦ δὲν δίδει κανέναν ὁρισμὸ τῆς ἰσότητας.

Ὅμως ὁ Σταγειρίτης πρὶν ἀπὸ τὸν Εὐκλείδη θὰ δώσει τὸν ὁρισμὸ τῆς ἰσότητας ὡς ταύτισης, αὐτὴν ποὺ θὰ ὁρίσει ὡς ἡ ἰσότης ἑνότης:

«ἔτι δ' ἐὰν ὁ λόγος ὁ τῆς πρώτης οὐσίας εἷς ᾖ, οἷον αἱ ἴσαι γραμμαὶ εὐθεῖαι αἱ αὐταί, καὶ τὰ ἴσα καὶ ἰσογώνια τετράγωνα καίτοι πλείω. ἀλλ' ἐν τούτοις ἡ ἰσότης ἑνότης»[107].

Αὐτὴν τὴν ἰσότητα ἑνότητα θὰ ἀκολουθήσει ὁ Εὐκλείδης καὶ στὸ 4^{ο} «καὶ πάσας τὰς ὀρθὰς γωνίας ἴσας ἀλλήλους εἶναι» καὶ στὸ 7^{ο} ἀξίωμα «καὶ τὰ ἐφαρμόζοντα ἐπ' ἄλληλα ἴσα ἀλλήλοις ἐστίν» ἀλλὰ καὶ στὸν ὁρισμὸ τῆς ὀρθῆς γωνίας: «ὅταν δὲ εὐθεῖα ἐπ' εὐθεῖαν σταθεῖσα τὰς ἐφεξῆς γωνίας ἀλλήλαις ποιῇ, ὀρθὴ ἑκατέρα τῶν ἴσων γωνιῶν ἐστί»[108].

IV. Ἐπίλογος

Τὰ μαθηματικὰ ὅταν παύουν νὰ εἶναι ἀποκλεισμένα στὴ Σχολὴ τοῦ Κρότωνα, γύρω στὰ μέσα τοῦ 5ου π. Χ. αἰώνα ἀρχίζουν νὰ δημιουργοῦνται οἱ πρῶτες πραγματεῖες «στοιχείων» καθὼς τὸ ἐνδιαφέρον γιὰ τὰ μαθηματικὰ ἀρχίζει νὰ ἀναπτύσσεται καὶ νὰ διαχέεται σὲ λιγότερο αὐστηρὰ κλειστὲς κοινότητες.

Μαθητεύοντας στὴν Ἀκαδημία ὁ Ἀριστοτέλης κατανόησε τὶς «συνθῆκες» ποὺ δὲν κάλυψε ὁ πλατωνισμός, ἀλλὰ θὰ πληρώσει ἡ καινούργια λογική. Γι' αὐτὸ δὲν διστάζει νὰ ἀπορρίψει ὅ,τι στὸ πλατωνικὸ ἔργο ἦταν διαλεκτικὸ «διαλεκτικῶς καὶ κενῶς»[109] ἢ λογικὸ «λογικῶς καὶ κενῶς»[110].

Ἡ λογικὴ τοῦ Σταγειρίτη καὶ τὰ *Στοιχεῖα* τοῦ Ἀλεξανδρινοῦ γεννήθηκαν[111] ἀπὸ τὸ ἴδιο πνεῦμα[112].

ἰδιότητες τῶν φυσικῶν στερεῶν οἱ ὁποῖες δὲν διαφέρουν πολὺ ἀπὸ τὶς ἰδιότητες τῶν ἰδεατῶν στερεῶν τῶν ὁποίων οἱ διαστάσεις εἶναι ἀμετάβλητες». H. Poincaré, Les Géométries non-euclidiennes, *Revue générale des Sciences pures et appliquées*, t. 2, 1891, σ. 770.

106. Ἀργότερα ὁ Ἀρχιμήδης θὰ χρησιμοποιήσει τὸ ἴδιο ῥῆμα στὴν πραγματεία του *Περὶ κέντρου βάρους ἐπιπέδων σχημάτων*.

107. Ἀριστοτελους, *Μετὰ τὰ Φυσικά*, 1054a 35.

108. Ευκλειδου, *Στοιχεῖα*, Βιβλίο 1, ὁρσ. 10.

109. Ἀριστοτελους, *Περὶ Ψυχῆς* I, 403 α 2.

110. Ἀριστοτελους, *Ἠθικὰ Εὐδήμεια* I, 8, 1217 b 21.

111. L. Brunschvicg, *ἔνθ' ἀν.*, σ. 85.

112. Μιὰ ἐκτεταμένη μελέτη αὐτοῦ τοῦ ἀντικειμένου ἀποτελεῖ ἀντικείμενο διδακτορικῆς διατριβῆς. Τὸ θέμα αὐτὸ πάντως ἀπασχόλησε καὶ πολλοὺς ρώσσους ἐρευνητὲς πβ. M. Ya. Vigodskii, Στοιχεῖα Εὐκλείδου, *Istor. Math. Issled.* n. 1, Μόσχα-Λένινγκραντ, 1948, σσ. 217-295 (στὰ ρωσικά). L. E. Maistrov, γιὰ τὸ ἄρθρο τοῦ M. Ya. Vigodskii Στοιχεῖα Εὐκλείδου, *Istor. Math Issl.*, No 2, Μόσχα-Λένινγκραντ, 1949, σσ. 505-507 (στὰ ρωσικά). B. N. Molodchii, Ὁ Εὐκλείδης ὑπῆρξε ἐπίγονος τοῦ Πλάτωνα; *Istor. Math. Issl*, No 2, Μόσχα-Λένινγκραντ, 1949, σσ. 499-504 (στὰ ρωσικά).

Ἡ ἀρχαιοελληνικὴ γεωμετρία κωδικοποιήθηκε ἔχοντας ὡς πρότυπο τὰ *Ἀναλυτικὰ* τοῦ Σταγειρίτη «ὁ μὲν γὰρ πεπαιδευμένος περὶ πάντα κριτικὸς φησὶν Ἀριστοτέλης, ὁ δὲ περὶ τὰ μαθήματα πεπαιδευμένος τῶν ἐν τούτοις λόγων ἔσται κριτικὸς τῆς ὀρθότητας»[113].

Χ. ΦΙΛΗ
(Ἀθῆναι)

ARISTOTLE THE PREDECESSOR OF EUCLID

Summary

Thanks to Proclus' *Commentary* to Book I of Euclid's *Elements*, as well as the *Summary* of Eudemus, we can devise a relatively clear image of Greek mathematics during the 4th century B.C.

Thus we know that the first writer who composed the elements of Geometry before Euclid, is Hippocrates of Chios. On the other hand in the Platonic Academy they employed the treatise of Theudios. Although we do not have any particular references it is most probable that they developped essays of geometric elements. Nonetheless in the Platonic Dialogues we notice an attempt to elucidate certain primary considerations from which follow all the remaing concepts.

We do not know what Aristotle gained from the first and second generation of the Platonic Academy, the notion of "elements" are familiar to him. Although the organization regarding the "elements" does not constitue a particulat treatise of Aristotle, we can distinguish in numerous fragments, definitions and methods, which comprise a part of the Euclidean *Elements*.

The Aristotelian *Analytics* includ an universal system of concepts from which dominates a theory of reasoning.

Moreover beyond this solid foundation Aristotle absorbs the doctrines of Platonic knowledge. He adopted some of the doctrines and bestows his own definitions for basic geometric concepts. From these Euclid receives and includes them in his *Elements*. The Aristotelian definitions appeared in the eternal dialectical model of the centuries.

In this essay the presence of Aristotelian and Euclidean definitions, proves that ancient Greek geometry was codified based on the model of Aristotelian *Analytics*.

Christine Phili

113. Προκλου Διαδοχου, ἔνθ᾽ ἀν., 32. 24-26.