ΑΠΟΔΕΙΞΗ: Η ΤΕΧΝΗ ΤΗΣ ΠΕΙΘΟΥΣ Ή ΤΗΣ ΔΙΑΦΩΤΙΣΗΣ. Η ΠΡΟΪΣΤΟΡΙΑ ΚΑΙ Ο ΚΑΡΤΕΣΙΟΣ

«Le principal est d'avoir plus soin de la certitude que de l'évidence et de convaincre l'esprit que de l'éclairer». Arnaud et Nicole, *La logique ou l'art de penser,* 1674.

I. Ἡ προϊστορία

Ὅταν στὶς ἀκτὲς τῆς Ἰωνίας συντελεῖται τὸ πέρασμα ἀπὸ τὸν μῦθο στὸν λόγο, ἡ χρήση τοῦ ἀλφαβήτου θὰ καθυποτάξει στὸ γραπτὸ σύμβολο τὸν προφορικὸ λόγο. Τότε τόσο τὸ ἀντικείμενο ὅσο καὶ ἡ ἰδέα θὰ σφυρηλατηθοῦν μὲ τὰ γράμματα τοῦ ἀλφαβήτου καὶ ὅλα θὰ τυλιχθοῦν μέσα στὴ μεγαλοσύνη τῆς γλώσσας καὶ τοῦ λόγου. Ἡ κατάκτηση τοῦ γραπτοῦ λόγου συμπίπτει καὶ μὲ τὸν ἐκδημοκρατισμὸ τῶν θεσμῶν. Μὲ αὐτὴ λοιπὸν τὴν «γλωσσολογικὴ ἐπανάσταση» ἡ ὁποία συμβαίνει στὸν ἑλληνικὸ χῶρο θὰ συνδεθοῦν καὶ ἄλλες τρεῖς μεταγενέστερες ἐπαναστάσεις: ἡ πολιτική, ἡ δικονομικὴ καὶ ἡ ἐπιστημονική[1].

Ἡ πρώτη «ἐπιστημονικὴ ἐπανάσταση», ἡ ὁποία διακρίνει τοὺς Ἴωνες ἀπὸ τοὺς Αἰγύπτιους, λαμβάνει χώρα τὴν ἐποχὴ ποὺ παρατηρεῖται ἡ μετάβαση ἀπὸ τὸν μῦθο στὸ λόγο[2]. Μάλιστα ὁ Πρόκλος μᾶς διασώζει πὼς ὁ Θαλῆς ἦταν ἕνας ἀπὸ τοὺς πρώτους ποὺ χρησιμοποίησε μαθηματικοὺς λογισμοὺς προκειμένου νὰ ἀποδείξει[3]. Ἀκόμα δὲν θὰ διστάσει νὰ ἀποδώσει στὸν Πυθαγόρα τὴν μεταστροφὴ τῆς γεωμετρίας ἀπὸ ἐμπειρικὴ γνώση σὲ θεωρητικὴ ἐπιστήμη[4].

Ἡ ἔννοια τῆς Δημοκρατίας γεννήθηκε στὴν Ἑλλάδα καὶ ἐδῶ τέθηκαν οἱ βάσεις της δίπλα μὲ τὴν ἔννοια τῆς ἐλευθερίας[5]. Σ' αὐτὴν τὴν «πολιτικὴ ἐπανάσταση» ἐντάσσεται καὶ ἡ δικονομική, ποὺ θὰ ἀπαθανατίσει ὁ Αἰσχύλος στὶς *Εὐμενίδες* καὶ στὴν *Ὀρέστεια.* Μάλιστα στὸ τέλος τῆς *Ὀρέστειας* ὑμνεῖται ἡ ἴδια ἡ ἀπονομὴ τοῦ δικαίου[6].

---

1. J. L. Gardies, *L'organisation des mathématiques grecques de Théétète à Archimède*, Paris, Vrin, 1997, σ. 270.
2. E. Moutsopoulos, *La pensée présocratique. Du Mythe à la raison,* Athènes, Grégoris, 1978.
3. Προκλου Διαδοχου, *In Primum Euclidis Elementarum Librum Commentaria,* Friedlein, Leipzig, 1873, 65: 7-11.
4. *Αὐτόθι*, 65: 16-19.
5. Πβ. Αριστοτελους, *Πολιτικά,* 1317 a 40 - b 14.
6. Πβ. Ch. Phili, Jurisprudence elements in Labdakian and Atredian Myths, στὸ *Festschrift für Kostas Beis dem Rechtdenker in Attischer Dialektik,* Athen, 2003, σσ. 1255-1271.

Παράλληλα ὅμως, καθὼς ὅλα τὰ θέματα τῆς πόλης συζητοῦνται δημόσια καὶ μὲ ἰσηγορία ἀναπτύσσεται ὁ ἔντεχνος ρητορικὸς λόγος, ὁ ὁποῖος ἐφαρμόζεται παντοῦ[7] καὶ ἔχει ὡς κύριο γνώρισμα τὴν σαφήνεια[8] καὶ τὸ *δημοσίως πείθειν*, ἀφοῦ *ὁ λόγος δυνάστης μέγας ἐστίν*[9]. Μὲ τὰ ὀρθολογικὰ ἐπιχειρήματα καὶ τὴ γραφὴ τῶν σοφιστῶν[10] ἡ τέχνη τῆς πειθοῦς μετατρέπεται σὲ ἐπιστήμη τοῦ ἀληθοῦς[11], ἀφοῦ πιὰ τὸ δικονομικὸ σύστημα γιὰ νὰ ἀπαλλάξει ἢ νὰ καταδικάσει τὸν κατηγορούμενο ἔχει ἀνάγκη ἀπὸ ἀποδείξεις. Στὴν Ἀθήνα τοῦ 5ου αἰώνα π.Χ. αὐτὴ ἡ ἀπαίτηση τῆς ἀπόδειξης, ἕνα ἀπὸ τὰ κύρια καθήκοντα τοῦ ρήτορα[12], ἐπιβάλλεται στὴν πιὸ γνωστὴ μορφὴ λόγων: στὸν δικονομικὸ καὶ στὸν ἐπιστημονικό[13]. «Σ' ἕνα κοινωνικὸ πλαίσιο ὅπου ἡ γνώση δὲν ἀνήκει πιὰ σὲ καμιὰ προνομιοῦχο τάξη ὑπεύθυνη γιὰ τὴ διατήρησή της, τὸ σημαντικότερο δὲν εἶναι ἡ ἀποκάλυψη τῆς ἐπίλυσης τῶν προβλημάτων· πρῶτα πρέπει νὰ καθιερωθεῖ ἡ ἰσχὺς αὐτῶν τῶν λύσεων βασισμένων σὲ ἀποδεδειγμένες ἀλήθειες. Μετὰ πρέπει πάνω ἀπ' ὅλα νὰ διαμορφωθεῖ ἡ γνώση σὲ προτάσεις τέτοιες ὥστε καθεμιὰ νὰ μπορεῖ ἄμεσα νὰ ἀποδείξει τὴν ἀλήθεια ἢ τὸ ψεῦδος»[14].

Φυσικά, πρὶν ἀπὸ τοὺς Ἕλληνες ὑπῆρχαν Μαθηματικά, τόσο στὴν Αἴγυπτο ὅσο καὶ στὴ Μεσοποταμία, ὅπου οἱ κάτοικοι, ἀναγκασμένοι ἀπὸ τὶς κοινωνικὲς δομὲς τους, εἶχαν νὰ ἐπιλύσουν συγκεκριμένα προβλήματα μερισμοῦ ἀγαθῶν ἢ γῆς[15]. Ἔτσι ἀπὸ τὰ στοιχεῖα ποὺ μᾶς ἔχουν διασωθεῖ (πάπυροι ἢ πήλινες πλάκες) βρίσκουμε τὰ προβλήματα καὶ τὶς λύσεις τους[16].

Ἡ διδασκαλία τῶν Μαθηματικῶν στὴν Ἀρχαία Ἑλλάδα δὲν θὰ μποροῦσε νὰ μὴν ἀνήκει στὸ πλαίσιο μιᾶς εὐρύτερης παιδείας. Ἕνας ἀπὸ τοὺς συντελεστὲς αὐτῆς τῆς παιδείας ἦταν καὶ ἡ ρητορική. Ὅμως τί ἦταν τότε ἡ ρητορική; Ἦταν «ἡ δημιουργὸς τῆς πειθοῦς»[17] καὶ ἡ ἄνθιση τοῦ εἰκότος, ἀλλὰ ἦταν καὶ τὸ ἐργαλεῖο τοῦ λόγου τὸ ὁποῖο μποροῦσε νὰ ὁδηγήσει στὴν ἀλήθεια.

---

7. A. Croiset, *Histoire de la littérature grecque*, Paris, 1899, vol. V, σ. 42.

8. Ἀριστοτελους, *Τέχνη ῥητορική*, III, 140 «ὡρίσθω λέξεως ἀρετὴ σαφῆ εἶναι».

9. Γοργιου, *Ἑλένης Ἐγκώμιον*, (εἰσαγ., μτφρ., σχόλια Α. Τάτση-Δ.-Γ. Σπαθάρας), Ἀθήνα, ἐκδ. Εἰκοστοῦ Πρώτου, 1998, § 8.

10. Πβ. J. de Romilly, Οἱ μεγάλοι σοφιστὲς στὴν Ἀθήνα τοῦ Περικλῆ, (μτφρ. Φ. Ι. Κακριδῆς), Ἀθήνα, Ἰνστιτοῦτο τοῦ Βιβλίου, Μ. Καρδαμίτσα, 1994.

11. Μ. Πρωτοπαπα-Μαρνελη, *Στωικοί. Ἡ Ἐπιστήμη τῆς Ρητορικῆς*, Ἀθήνα, Σμίλη, 2005, σ. 30.

12. Μάλιστα ὁ É. Bréhier στὸ γνωστὸ ἔργο του *Chrysippe et l'ancien stoïcisme*, Paris, P. U. F., 1971, θεωρεῖ πὼς «καὶ ἡ ρητορική τους (τῶν Στωικῶν) εἶναι ἐπίσης ὄχι τόσο τέχνη πρακτική, ἀλλὰ πιὸ πολὺ ἐπιστήμη», σ. 68, σημ. 2, πβ. Μ. Πρωτοπαπα-Μαρνελη, *ἔνθ' ἀν.*, σ. 36.

13. J. L. Gardies, *ἔνθ' ἀν.*, σ. 276.

14. *Αὐτόθι*.

15. Πβ. O. Neugebauer, *The Exact Sciences in Antiquity*, Princeton, Princeton University Press, 1951, New York, Dover, 1969; E. Bruins and M. Rutten, *Textes mathématiques de Suse*, Paris, Paul Geuthner, 1961 καθὼς καὶ R. I Gillings, *Mathematics in the Time of the Pharaohs*. Cambridge, MIT Press, 1972.

16. M. Simon, *Geschichte der Mathematik im Altertum in Verbindung mit antiker Kulturgeschichte*, Berlin, 1909, καθὼς καὶ H. Wussing, *Mathematik in der Antike*, Basel, 1965.

17. Ch. Waltz, *Rhetores Graeci*. Bd. 3, Stuttgart, 1836, σ. 19.

Μάλιστα ὁ Σταγειρίτης διακρίνει τὴ ρητορικὴ ἀπὸ τὶς ἄλλες τέχνες, ἀφοῦ ἡ ρητορικὴ ἔχει τὴ δύναμη νὰ πείθει ἐνῶ οἱ ἄλλες [ἐπιστῆμες] ἀποσκοποῦν στὴν εὕρεση τῆς ἀλήθειας, ἡ ὁποία ἔχει ἀνάγκη ἀπὸ τὴ μεθοδολογία τῆς πειθοῦς: «Ἔστω δὴ ἡ ῥητορικὴ δύναμις περὶ ἕκαστον τοῦ θεωρῆσαι τὸ ἐνδεχόμενον πιθανόν. Τοῦτο γὰρ οὐδεμιᾶς ἑτέρας ἐστὶ τέχνης ἔργον· τῶν γὰρ ἄλλων ἑκάστη περὶ τὸ αὑτῇ ὑποκείμενόν ἐστιν διδασκαλικὴ καὶ πειστική, οἷον ἰατρικὴ περὶ ὑγιεινῶν καὶ νοσερῶν, καὶ γεωμετρία περὶ τὰ συμβεβηκότα πάθη τοῖς μεγέθεσι... ὁμοίως δὲ καὶ αἱ λοιπαὶ τῶν τεχνῶν καὶ ἐπιστημῶν· ἡ δὲ ῥητορικὴ περὶ τοῦ δοθέντος ὡς εἰπεῖν δοκεῖ δύνασθαι θεωρεῖν τὸ πιθανόν»[18].

Ὅμως πέρα ἀπὸ τὰ δικαστήρια καὶ τὴν πολιτική, ὁ ρητορικὸς λόγος[19] ἀνδρώθηκε καὶ σὲ κείμενα ἐπιστημονικοῦ χαρακτήρα καὶ αὐτὴ ἡ ἐπιχειρηματολογία σταδιακὰ ὁδήγησε στὴ συλλογιστικὴ ἡ ὁποία διέπει τὴ δομὴ ἀξιώματος καὶ θεωρήματος.

Ἔτσι οἱ Ἕλληνες χρησιμοποίησαν δύο χαρακτηριστικὰ τὰ ὁποῖα ἀποκλειστικὰ τοὺς ἀνήκουν.

«1. Στὴ λύση τοῦ προβλήματος προσέθεσαν τὴν ἀπόδειξη ποὺ ἡ λύση του ἱκανοποιεῖ πλήρως τὶς ἀπαιτήσεις τοῦ προβλήματος τὸ ὁποῖο τέθηκε.

2. Στὸ εἶδος τοῦ προβλήματος θὰ συνδυάσουν τὸ διατυπωμένο στὴν ὁριστικὴ ἔγκλιση *θεώρημα* μὲ τέτοια μαθηματικὴ ἰδιότητα, στὴν ὁποίαν θέλουν νὰ προσδώσουν τὴν πιὸ γενικὴ μορφὴ ἤδη ὡς ἀληθὴ ἢ ὡς ψευδή, αὐτὸ δὲ τὸ καινούργιο γραμματικὸ εἶδος φυσικὰ θὰ συνοδευθεῖ μὲ τὴν ἀπόδειξη τῆς ἀλήθειάς τους»[20].

Ἡ ἔλλειψη πηγῶν δὲν μᾶς ἐπιτρέπει νὰ ἀνασυστήσουμε τὸ modus operandi τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων, «αὐτὸ τὸ πέρασμα ἀπὸ τὴν ἀποδεικτέα πρόταση καὶ ἀπὸ τὴν αὐστηρὴ ἀπόφαση τῆς ἀπόδειξής της, ταυτόχρονα σχεδὸν μὲ τὸ δικονομικὸ καὶ τὸ φιλοσοφικὸ ἢ μαθηματικὸ πλαίσιο»[21].

Ἀργότερα, κατὰ τὴ διάρκεια τοῦ Μεσαίωνα, οἱ νομικοὶ γιὰ νὰ ὑπερασπισθοῦν τοὺς κατηγορουμένους ἐπινοοῦν τὴ θεωρία τῆς βαθμωτῆς ἀπόδειξης[22]. Ἡ θεωρία αὐτὴ βασίζεται στὴ διάκριση μεταξὺ νόμιμης καὶ ἱκανῆς ἀπόδειξης, ποὺ θὰ ὀνομασθεῖ πλήρης καὶ ἡ ὁποία ἀποτελεῖται ἀπὸ συγκλίνουσες μαρτυρίες καὶ ἀπὸ γραπτὲς ἀποδείξεις καὶ τῆς ἁπλῆς εἰκασίας ἡ ὁποία θὰ ὀνομασθεῖ ἡμι-πλήρης ἀπόδειξη καθὼς βασιζόταν σὲ μιὰ καὶ μοναδικὴ μαρτυρία[23].

Ὅπως πρόκειται νὰ ἀναλύσουμε σὲ μιὰ ἄλλη ἐργασία, ἡ διείσδυση τῆς νομικῆς ἐπιστήμης στὰ μαθηματικὰ θὰ ἀποδειχθεῖ ἐξαιρετικὰ παραγωγική. Καθὼς τὰ ὅρια τῶν ἐπιστημῶν ἀλλὰ καὶ τῶν ἐπιστημόνων δὲν ἦσαν αὐστηρὰ καθορισμένα, ἦταν φυσικὸ νὰ ὑπάρχουν ὠσμωτικὰ φαινόμενα, ἐξαιρετικὰ ἐποικοδομητικά. Μέθοδοι

---

18. ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΟΥΣ, *Τέχνη ῥητορική*, 1355 b 25-33.

19. Πβ. A. BERNARD, Ancient Rhetoric and Greek Mathematics: A Response to a Modern Historiographical Dilemma, *Science in Context*, 16, 2003, σσ. 391-412· D. E. LOOMIS, Euclid, Rhetoric in Mathematics, *Philosophia Mathematica* II, 5, 1960, σσ. 56-72.

20. J. L. GARDIES, *ἔνθ' ἀν.*

21. *Αὐτόθι.*

22. Γιὰ περισσότερες λεπτομέρειες πβ. J. P. LEVY, Le problème de la preuve dans les droits savants du Moyen Âge, *Recueils de la Société Jean Bodin* XVII, Bruxelles, 1965, σσ. 137-167. ΤΟΥ ΙΔΙΟΥ, Les classifications des preuves dans l'histoire du droit, *La preuve en droit*, Bruxelles, 1961.

23. Πβ. καὶ τὸν κλασικὸ κανόνα τοῦ ρωμαϊκοῦ δικαίου testis unus, testis nullus.

καὶ τεχνικὲς ἀλλάζουν χέρια γονιμοποιώντας τὶς δύο αὐτὲς διακριτὲς ἐπιστῆμες μὲ ὁμοιάζουσες δομές.

Ὁ J. Peletier (Peletarius) (1517-1582) στὴν Εἰσαγωγή του γιὰ τὰ *Στοιχεῖα* τοῦ Εὐκλείδη, μᾶς παρουσιάζει μιὰ χαρακτηριστικὴ ἀναλογία μεταξὺ τῆς ἐφαρμογῆς τοῦ συλλογισμοῦ στὴ μαθηματικὴ ἀπόδειξη καὶ ἑνὸς δικηγόρου ποὺ ἐφαρμόζει στὸ δικαστήριο τοὺς κανόνες τῆς ρητορικῆς.

«Ἂν κάποιος μὲ περιέργεια ἀναζητᾶ, γιατί στὴν ἀπόδειξη τῶν προτάσεων δὲν φαίνεται ἡ μορφὴ τοῦ συλλογισμοῦ, ἀλλὰ μονάχα ἐμφανίζονται κάποια μέρη τοῦ συλλογισμοῦ ποὺ ἔγιναν ἀντιληπτά, θὰ πρέπει νὰ γνωρίζει πὼς αὐτὸ εἶναι ἐνάντιο στὴν ἀξιοπρέπεια τῆς ἐπιστήμης... Γιατὶ ὁ δικηγόρος ὅταν πηγαίνει στὰ δικαστήρια δὲν βάζει στὰ δάκτυλά του αὐτὰ ποὺ ὁ καθηγητὴς τῆς ρητορικῆς τοῦ ἔμαθε, ἀλλὰ μελετᾶ ὅσο μπορεῖ, ἀκόμα καὶ ἂν ἐπικαλεῖται τὰ διδάγματα τῆς ρητορικῆς, νὰ φανεῖ πὼς δὲν σκέπτεται τίποτα λιγότερο ἀπὸ τὴν ρητορική»[24, 25].

II. Ὁ Καρτέσιος

Ὁ 17ος αἰώνας ἀποτελεῖ ἐποχὴ ραγδαίων μεταβολῶν καὶ ἀνακατατάξεων γιὰ τὰ μαθηματικά. Ἡ ἐπιστολογραφία καὶ ἡ ἑδραίωση τῆς τυπογραφίας καθιστοῦν εὐκολότερη τὴν ἐπικοινωνία τῶν ἐπιστημόνων, οἱ ὁποῖοι πιὰ σὲ σύντομο χρονικὸ διάστημα ἐνημερώνονται γιὰ τὰ καινούργια ἐπιτεύγματα, παράλληλα ὅμως αὐξάνονται τὰ ἐπικριτικὰ δημοσιεύματα[26], οἱ ὑπομνηματισμοί, ἀλλὰ καὶ οἱ λίβελλοι[27].

---

24. J. Peletier, *De usu geometriae* liber unus, Parisiis 1557, Introductio.

25. Ἡ γνωστὴ ἐρευνήτρια Giovanna Cifoletti μελετᾶ τὶς σχέσεις νομικῶν καὶ ρητορικῆς στὴ Γαλλία τοῦ 16ου αἰώνα. Πβ. τὴ διδακτορική της διατριβὴ G. Cifoletti, *Mathematics and Rhetoric: Peletier, Gosselin and the Making of the French Algebraic Tradition*. Ph. D. Thesis, Princeton University, 1992· Τησ Αυτησ, La question de l'algèbre: Mathématiques et rhétorique des hommes de droit de la France du 16ᵉ siècle, *Annales de l'École des Hautes Études en Sciences Sociales*, τ. 6, 1995, σσ. 1385-1416.

26. Ὅπως π.χ. ὁ Ὁλλανδὸς B. Nieuwentijt ἐπικρίνει τόσο τὸν Νεύτωνα γιὰ ἔλλειψη διαυγοῦς διατύπωσης ὅσο καὶ τὸν Leibniz γιὰ τὴ χρήση διαφορικῶν μεγαλύτερης τάξης, τὰ ὁποῖα θεωρεῖ ἀνυπόστατα. Πβ. *Considerationes circa analyseos ad quantitates infinite parvos applicatae principia et calculi differentialis usum in risolvendis problematibus geometricis*, Ἄμστερνταμ, 1694; *Considerationes securidae circa calculi differentialis principia et responsio ad virum nobilissium. W. G. Leibnitium*, Amsterdam, 1696. Γενικότερα γιὰ τὸν Nieuwentijt, πβ. E. W. Beth, Nieuwentijt's Significance for the Philosophy of Science, *Synthèse* τ. 9, 1955, σσ. 447-453. Καὶ ὁ Euler ἐπικρίθηκε γιὰ τὴ θεμελίωση τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ στὴ θεώρηση τῶν ἐξαφανιζόμενων ποσοτήτων· πβ. H. W. Clemm, *Lettre sur quelques paradoxes du calcul analytique*, Tübingen, 1752.

27. Χαρακτηριστικὸ παράδειγμα ἀποτελεῖ ἡ σειρὰ τῶν δημοσιευμάτων ποὺ ἀκολούθησαν μετὰ ἀπὸ τὴν ἔκδοση τῶν ἔργων τοῦ Νεύτωνα ὅπου ἐκθέτει τὶς ἀπαρχὲς τοῦ ἀπειροστικοῦ λογισμοῦ, βασιζόμενος στὴ θεωρία τῶν ροῶν. Μιὰ σειρὰ δημοσιευμάτων καὶ λιβέλλων ἐκδόθηκαν στὴν Ἀγγλία ὅταν ὁ Berkeley ξεκίνησε τὴν ἐπίθεση ἐναντίον τοῦ Νεύτωνα. Πβ. G. Berkeley, *The Analyst or a Discource Addressed to an Infidel Mathematician. Wherein it is Examined whether the Object, Principles, and Inferences of the Modern Analysis are More Distinctly Conceived, or More Evidently Deduced, than Religious Mysteries and Points of Faith:* «First cast the beam out of Thine own eye; and then shall than see clearly to cast out the Mote out of they Brother's Eye», London, 1734. Ἀναφέρεται στὸν E. Halley, στενὸ φίλο τοῦ Νεύτωνα.

Βέβαια οἱ ἐπικρίσεις δὲν περιορίζονταν μόνο στὶς σύγχρονες θεωρίες, ὅπως π.χ. ὁ ἀπειροστικὸς λογισμός, ἀλλὰ ἐπεκτείνονταν καὶ στὰ ἀρχαιοελληνικὰ μαθηματικά, μὲ ἀποκορύφωμα τὸ 5ο εὐκλείδειο αἴτημα. Ὅμως τὸ κύριο βάρος τῶν ἐπικρίσεων στὸ ἀρχαιοελληνικὸ ἔργο ἑστιάζονταν στὴν ἀπουσία μιᾶς γενικῆς μεθοδολογικῆς ἔκθεσης, ἐνῶ «ἡ ἀνυπαρξία τοῦ τρόπου ἀνακάλυψης» ἐνοχλοῦσε.

Στοὺς ἐπικριτὲς αὐτοὺς συγκαταλέγεται καὶ ὁ Καρτέσιος, ὁ ὁποῖος δὲν διστάζει νὰ δηλώσει πὼς καμιὰ πραγματεία ἀριθμητικῆς ἢ γεωμετρίας δὲν τὸν ἱκανοποιεῖ, ἂν καὶ ἡ ἀριθμητικὴ τοῦ Πυθαγόρα καὶ ἡ γεωμετρία τοῦ Εὐκλείδη ἀποτελοῦν πρότυπα γιὰ τὴν ἀληθῆ λογική[28]. Ἔτσι στὸ ἔργο του *Regulae ad directionem ingenii* ἀναφέρει:

«Σχετικὰ μὲ τοὺς ἀριθμοὺς ἔχω διαβάσει σὲ βιβλία τόσους ὑπολογισμοὺς ποὺ μὲ ἔκαναν νὰ ἀνακαλύψω τὴν ἀλήθεια. Ὅσο γιὰ τὰ σχήματα, ὑπῆρχαν πολλὰ πράγματα ποὺ κατὰ κάποιον τρόπο βρίσκονταν μπροστὰ στὰ μάτια μου καὶ ἀποτελοῦσαν τὴ συνέχεια αὐστηρῶν συνεπειῶν. Ὅμως τὸ γιατί καὶ τὸ πῶς κατόρθωσαν νὰ τὰ βροῦν, δὲν μοῦ φαίνονταν ἀρκετὰ γιὰ νὰ τὸ ἀποδείξουν στὴν ἴδια τὴ νόηση»[29]. Ὁ μεγάλος ἀναμορφωτὴς ἀποδέχεται πὼς τὰ ἀποτελέσματα προέρχονται ἀπὸ αὐστηροὺς συλλογισμούς, ὅμως αὐτὸ δὲν τοῦ ἀρκεῖ· θέλει νὰ γνωρίζει πῶς καὶ γιατί προέκυψαν αὐτὰ τὰ ἀποτελέσματα:

«Τίποτα δὲν εἶναι πιὸ ἀναξιόπιστο ἀπὸ τὶς ἐπιφανειακὲς ἀποδείξεις, οἱ ὁποῖες συχνὰ προκύπτουν τυχαῖα παρὰ βάσει τεχνικῆς, καὶ οἱ ὁποῖες περισσότερο ἀπευθύνονται στὴν ὅραση καὶ στὴ φαντασία παρὰ στὴ νόηση, ποὺ μᾶς παραπλανοῦν ὥστε κατὰ κάποιο τρόπο ξεχνᾶμε νὰ χρησιμοποιοῦμε τὴν ἴδια τὴ λογική. Παράλληλα, τίποτα δὲν εἶναι πιὸ περίπλοκο ἀπὸ τὸ νὰ ὑπερβαίνουμε διὰ τῆς λογικῆς καινούργιες δυσκολίες, ποὺ προκαλοῦνται ἀπὸ τὴν ἀταξία τῶν ἀριθμῶν»[30].

Οὐσιαστικὰ λοιπὸν ὁ Καρτέσιος ἐπικρίνει τὸ γεγονὸς ὅτι στὶς πρότερες ἀποδείξεις δὲν ἀποκαλύπτεται τὸ πιὸ οὐσιαστικό, δηλαδὴ ἡ μέθοδος, ἄρα ὁ τρόπος μὲ τὸν ὁποῖον ἐξάγονται τὰ καινούργια ἀποτελέσματα. Καὶ φυσικὰ δὲν διστάζει νὰ παραθέσει τὰ αἴτια αὐτῆς τῆς κριτικῆς, δηλαδή: (α) τὴν ἀπουσία εὑρετικῶν μεθόδων καὶ (β) τὴν μὴ ἀποκάλυψη τῶν μεθόδων ποὺ ὁδηγοῦν στὴν ἀνακάλυψη.

Ὁπωσδήποτε ὁ μεγάλος πανεπιστήμονας ἐπαναφέρει στὸ προσκήνιο αὐτὸ τὸ προαιώνιο πρόβλημα[31]. Ἂν δηλαδὴ τὰ μαθηματικὰ δὲν προϋπάρχουν καὶ ἄρα εἶναι δημιούργημα τῆς ἀνθρώπινης νόησης ἢ προϋπάρχουν καὶ καρτερικὰ περιμένουν ἕναν Κολόμβο προκειμένου νὰ τὰ ἀνακαλύψει.

Στὸ πλαίσιο τοῦ τέταρτου κανόνα ὁ Καρτέσιος ἐπιχειρηματολογεῖ. Θεωρεῖ ἀδύνατον νὰ μὴν εἶχαν γνωρίσει οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες «τὰ ἀληθῆ μαθηματικά» τὰ ἴχνη τῶν ὁποίων θεωρεῖ πὼς διακρίνονται στὰ κείμενα τοῦ Πάππου καὶ τοῦ Διόφαντου[32]. Τὸ ἀμάλγαμα ἀριθμητικῆς καὶ γεωμετρίας θὰ δημιουργήσει «μιὰ κάποια

28. «Arithmetica et Geometria... circa objectum ita purum et simplex versantur, ut nihil plane supponant, quod experienta reddiderit incertum, sed totae consistunt in consequentiis rationabiliter deducendis», *Regulae ad directionem ingenii*, II, X, σ. 365.

29. R. Descartes, *Règles pour la direction de l'esprit*, Paris, Vrin, 1970, σ. 21.

30. *Αὐτόθι*, σ. 23.

31. Τὸ 2008 μὲ τὴν πρωτοβουλία τῆς καθηγήτριας κυρίας Christa Binder, τοῦ Πολυτεχνείου τῆς Βιέννης, ἡ Αὐστριακὴ Ἑταιρεία τῆς Ἱστορίας τῶν Μαθηματικῶν ὀργάνωσε διεθνὲς συνέδριο στὸ Miesenbach μὲ θέμα: *Entedenken oder Erfinden*.

32. Εἶναι ἄξιο ἀπορίας γιατί ὁ Καρτέσιος παραθέτει αὐτοὺς τοὺς δύο Ἕλληνες. Τὸ σωστότερο θὰ ἦταν νὰ ἀναφερθεῖ στὸν Ἀπολλώνιο καὶ στὸν Viète. Πβ. L. Brunschvicg, *Les Étapes de la Philosophie Mathématique*, Paris, Blanchard, 2e éd. 1972, σ. 106.

ἀνάλυση ποὺ ἐφήρμοσαν οἱ ἀρχαῖοι γεωμέτρες ἂν καὶ ἀρνήθηκαν νὰ ἀποκαλύψουν τὸ μυστικό. Πρόκειται γιὰ ἕνα εἶδος ἀριθμητικῆς ποὺ ὀνομάζεται ἄλγεβρα καὶ ἡ ὁποία ἐπιτρέπει νὰ ἐργάζεται κανεὶς μὲ ἀριθμοὺς ὅπως οἱ ἀρχαῖοι ἔκαναν μὲ τὰ σχήματα»[33].

Στὸ βωμὸ τῶν ἀποτελεσμάτων ἡ ἀνάλυση τῶν ἀρχαίων καὶ ἡ ἄλγεβρα τῶν συγχρόνων θυσίασε τὴν ἁπλότητα καὶ τὴν καθαρότητα τῶν principia. Γι' αὐτὸ πρέπει ἡ ἀνάλυση καὶ ἡ ἄλγεβρα νὰ ἀναδιοργανωθοῦν, νὰ σφυρηλατηθοῦν, νὰ ἀναμειχθοῦν ὥστε νὰ ἀποτελέσουν μία παγκόσμια μέθοδο, ποὺ θὰ ἐγκαταλείψει τὴ σχηματικὴ ἀπεικόνιση[34] καὶ θὰ ἐπιβάλει ὅ,τι ὑπάρχει κοινὸ «σὲ ὅλες αὐτὲς τὶς ἐπιστῆμες, ἰδιαίτερα στὰ μαθηματικά»[35].

Γιὰ νὰ τονίσει μάλιστα αὐτὴ τὴ σκόπιμη ἀπομάκρυνση ἀπὸ τοὺς ἀρχαίους διευκρινίζει:

«Πράγματι, ὅπως εἶναι γνωστό, πολλοὶ τεχνίτες ἀκριβῶς γιὰ τὸν ἴδιο λόγο, ἀποκρύπτουν τὶς ἀνακαλύψεις τους. Φοβοῦνται, ἴσως, πὼς ἐξαιτίας τῆς μεγάλης εὐκολίας μὲ τὴν ὁποία διαδίδονται οἱ ἀνακαλύψεις, κινδυνεύουν νὰ χάσουν τὴν ἀξία τους. Ἔτσι, προκειμένου νὰ διατηρήσουν ἀμείωτο τὸν θαυμασμό μας προτίμησαν στὴ θέση τῶν ἀνακαλύψεών τους νὰ παρουσιάσουν μερικὲς ἄγονες ἀλήθειες ποὺ ἀποδεικνύονται μέσω μιᾶς εὔστοχης λογικῆς αὐστηρότητας, ὡς ἐπακόλουθα τῆς τέχνης τους, παρὰ νὰ μᾶς μάθουν τὴν ἴδια τὴν τέχνη τους, ποὺ θὰ εἶχε ἐντελῶς ἐξαντλήσει τὸν θαυμασμό μας»[36].

Φυσικὰ ὁ Καρτέσιος ἀναφέρεται σὲ μιὰ συνήθη τακτικὴ τῶν ἐπιστημόνων ἀλλὰ καὶ τῶν καλλιτεχνῶν, οἱ ὁποῖοι κρατοῦσαν μυστικὲς τὶς ἀνακαλύψεις τους, γιὰ ὅσο διάστημα ἔκριναν ἱκανό. Ἔτσι «ἡ νόμιμη κατασκευή» τῆς *ἀναγεννησιακῆς προοπτικῆς* παρέμεινε ἑπτασφράγιστο μυστικό, ὅπως καὶ ἡ νευτόνια δημιουργία τῶν ροῶν, χωρὶς αὐτὸ νὰ σημαίνει πὼς αὐτὴ ἡ τακτικὴ δὲν ἐφαρμόστηκε καὶ ἀργότερα. Ὁ Monge π.χ. κράταγε μυστικὴ τὴ δημιουργία τῆς παραστατικῆς γεωμετρίας, ἐπειδὴ εἶχε ἐφαρμογὲς στὴν ὀχυρωματική. Ἄρχισε νὰ τὴν διδάσκει μόνον ὅταν ἱδρύθηκε ἡ École Polytechnique (1794).

Ὁ Καρτέσιος[37] μὲ ἕνα καὶ μόνο[38] μαθηματικὸ[39] του κείμενο, τὴ *Γεωμετρία*, ὡς ἐφαρμογὴ τῆς καρτεσιανῆς μεθόδου λογισμοῦ ποὺ κυριαρχεῖ στὸ ἔργο του *Λόγος*

33. R. Descartes, *ἔνθ' ἀν.*, σ. 373.

34. Πβ. τὸν ἀφορισμὸ στὴ *Γεωμετρία*: «Ὅμως συχνὰ δὲν ἔχουμε ἀνάγκη νὰ φέρουμε τὶς εὐθεῖες γραμμὲς στὸ χαρτί, καὶ ἀρκεῖ νὰ τὶς σχεδιάσουμε μὲ κάποια γράμματα, ὥστε σὲ κάθε μιὰ νὰ ἀντιστοιχεῖ ἕνα καὶ μόνο». AT. VI, σ. 371.

35. R. Descartes, *ἔνθ' ἀν.*, σ. 19.

36. *Αὐτόθι.*

37. Πβ. G. Milhaud, *Descartes Savant*, Paris, 1921· C. Adam, *Descartes*, Paris, 1910· J. Millet, *Descartes, sa vie, ses travaux, ses découvertes avant 1637*, Paris, 1867· D. Clarke, *Descartes: A Biography*, Cambridge University Press, 2006.

38. Στὰ μαθηματικὰ εἶναι ἐξαιρετικὰ σπάνιο φαινόμενο μ' ἕνα καὶ μόνο κείμενο νὰ ἀλλάξει κανεὶς αὐτὴ τὴν ἐπιστήμη. Στὶς ἀρχὲς τοῦ 20οῦ αἰώνα ὁ M. J. Souslin (1894-1919) μ' ἕνα καὶ μόνο κείμενο καὶ ἕνα ἐρώτημα ἔγραψε πραγματικὰ ἱστορία στὴν περιγραφικὴ θεωρία συνόλων.

39. Βέβαια στὴν πλούσια ἀλληλογραφία του ὑπάρχουν πολλὲς καὶ σημαντικὲς ἀπόψεις

περὶ μεθόδου γιὰ τὴ σωστὴ συμπεριφορὰ τοῦ συλλογισμοῦ καὶ τὴν ἀναζήτηση τῆς ἀλήθειας στὶς ἐπιστῆμες[40, 41] (1637) προκαλεῖ ἐπανάσταση στὰ μαθηματικά.

Ὅμως, αὐτὸ δὲν σημαίνει πὼς δὲν εἶχε μελετήσει ἢ δὲν εἶχε ἀσχοληθεῖ μ' αὐτὴ τὴν ἐπιστήμη. Ἡ στέρεη κλασικὴ καὶ μαθηματικὴ παιδεία ποὺ ἀπέκτησε στὸ σχολεῖο τῶν Ἰησουϊτῶν La Flèche (1604-1612), τὸν συνοδεύουν σ' ὅλη του τὴ ζωή. Ἤδη, ἀπὸ τὸ 1619, ὁ Καρτέσιος παρουσιάζει μιὰ ταξινόμηση τῶν ἐξισώσεων 3ου βαθμοῦ καὶ μερικὲς τὶς ἐπιλύει γεωμετρικὰ μὲ δικῆς του ἐπινόησης διαβῆτες. Τὴν ἴδια χρονιὰ στὸ ἔργο του, *Ἰδιωτικὲς Σκέψεις*[42] παρουσιάζει μιὰ ἐπίλυση ἐξίσωσης 3ου βαθμοῦ. Εἶναι βέβαιο ὅτι μυεῖται στὰ μαθηματικὰ ἀπὸ τὸ βιβλίο τοῦ ἰησουΐτη μοναχοῦ Ch. Clavius (1537-1612) *Πρακτικὴ Γεωμετρία*[43], ποὺ περιέχει γεωμετρικὲς κατασκευὲς γιὰ τὴν ἀπεικόνιση τῶν ριζῶν ἀλγεβρικῶν ἐξισώσεων[44] καὶ ἀπὸ τὶς ἐπεξηγήσεις τοῦ Cardano καὶ τοῦ Viète, γιὰ τὴ μέθοδο ἐπίλυσης τῆς πιὸ γενικῆς μορφῆς τῆς ἐξίσωσης 3ου βαθμοῦ, ἀπαλείφοντας τὸ x^2. Πιὸ συγκεκριμένα κατανοεῖ τὴ στερεομετρία καὶ κυρίως τὴ μεθοδολογία τοῦ Μέναιχμου μὲ τὴ χρήση κωνικῶν τομῶν ἐνῶ ἡ λατινικὴ ἔκδοση τῶν ἔργων τοῦ Ἀρχιμήδη (Βασιλεία 1544) καὶ τῶν *Κωνικῶν* τοῦ Ἀπολλωνίου τοῦ προσφέρουν γερὲς μαθηματικὲς γνώσεις.

Γιὰ τὸν Καρτέσιο, ἡ ἀριθμητικὴ καὶ ἡ γεωμετρία, ἀποτελοῦν τὰ πρότυπα τῆς ἀληθοῦς λογικῆς καὶ τὴ γονιμότητά της. Ὁ Καρτέσιος δημιούργησε ἕνα εἶδος ἀνάλυσης, ὅπως αὐτὸ ποὺ χρησιμοποιοῦσαν οἱ ἀρχαῖοι γεωμέτρες, οἱ ὁποῖοι ἀρνήθηκαν νὰ ἀποκαλύψουν τὸ μυστικό (δηλαδὴ ἕνα εἶδος ἀριθμητικῆς ποὺ ὀνομάζεται ἄλγεβρα). Αὐτὴ τοῦ ἐπέτρεψε νὰ κάνει πράξεις μὲ τοὺς ἀριθμούς, ὅπως οἱ ἀρχαῖοι ἔκαναν μὲ τὰ σχήματα»[45].

Αὐτὲς οἱ δύο ἐπιστῆμες–πρότυπα τὸν ὁδήγησαν νὰ βασίσει στὴ *Γεωμετρία* μιὰ γενικὴ μέθοδο ἐπίλυσης γεωμετρικῶν προβλημάτων, τὰ ὁποῖα ἀνάγονται στὴν ἐπίλυση μιᾶς ἀλγεβρικῆς ἐξίσωσης. Ὅμως ἕνα γεωμετρικὸ πρόβλημα τὸ ὁποῖο ἔχει ἐπιλυθεῖ μέσω μιᾶς ἀλγεβρικῆς ἐξίσωσης ἔχει ἀποδειχθεῖ; Ἂν, ὅπως ἀναφέρει ὁ Καρτέσιος, «τὰ πράγματα τὰ ὁποῖα συλλαμβάνουμε ὡς πολὺ κατανοητὰ καὶ πολὺ διακριτὰ εἶναι ὅλα ἀληθῆ»[46] καὶ ἂν ἡ ἀπόδειξη ἔχει σκοπὸ νὰ εἶναι διαυγὴς καὶ προφανής, τότε τὰ προκύπτοντα ἀποτελέσματα μὲ τὴ «μέθοδο τῆς ἀνακάλυψης» ἔχουν ἀποδειχθεῖ. Τελικὰ ὅμως ποιός εἶναι ὁ στόχος τῆς ἀπόδειξης; νὰ πείθει ἢ νὰ διαφωτίζει;

Ὁ ἴδιος ὁ Descartes, στὸ ἔργο του, *Ἀπαντήσεις στὶς δεύτερες ἀντιρρήσεις γιὰ τοὺς μεταφυσικοὺς διαλογισμοὺς* ἀναφέρει: «Ὑπάρχουν δύο τρόποι ἀπόδειξης: ὁ

του γιὰ τὰ μαθηματικά, τὰ ὁποῖα τὰ προσέγγιζε μὲ τρεῖς διαφορετικὲς ἰδιότητες: ὡς φιλόσοφος, ὡς μελετητὴς τῆς φύσης καὶ ὡς ἄνθρωπος ἐνδιαφερόμενος γιὰ τὴν χρηστικότητα τῆς ἐπιστήμης· φυσικὰ εἶναι πολὺ δύσκολο νὰ διαχωρίσουμε αὐτοὺς τοὺς τρεῖς τρόπους σκέψης του.

40. *Discours de la Méthode pour bien conduire sa raison et chercher la vérité dans les sciences*, 1637· πβ. *Œuvres*, τ. 6, σσ. 1-78.

41. *Ὁ Λόγος περὶ μεθόδου...* περιέχει τρία γνωστὰ προσαρτήματα: *τὴ Γεωμετρία, τὰ Διοπτρικὰ καὶ τὰ Μετέωρα...*

42. *Cogitationes Privatae.*

43. *Geometrica practica,* Mayence, 1611.

44. Στὴν ἀρχὴ τῆς *Γεωμετρίας* ὁ Descartes ἀσχολεῖται μὲ αὐτὰ τὰ θέματα.

45. R. Descartes, *Discours de la Méthode...* X, σ. 376.

46. *Αὐτόθι.*

πρῶτος γίνεται μὲ τὴν ἀνάλυση καὶ ὁ ἄλλος μὲ τὴ σύνθεση. Ἡ ἀνάλυση δείχνει τὴν ἀληθὴ ὁδὸ μὲ τὴν ὁποία ἕνα πράγμα ἔχει μεθοδικὰ εὑρεθεῖ καὶ πῶς τὰ ἀποτελέσματα ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὶς αἰτίες[47], ἔτσι ὥστε, ἂν ὁ ἀναγνώστης θέλει νὰ ἀκολουθήσει τὴν ἀνάλυση καὶ νὰ ἐξετάσει λεπτομερειακὰ ὅ,τι περιέχεται σ' αὐτὴν δὲν θὰ τὴν κατανοήσει λιγότερο οὔτε θὰ τὴν ἀποδεχθεῖ λιγότερο ἀπ' ὅ,τι ἂν τὴν εἶχε ὁ ἴδιος ἀνακαλύψει. Ὅμως αὐτοῦ τοῦ εἴδους ἡ ἀνάλυση δὲν εἶναι ἱκανὴ νὰ πείσει οὔτε τοὺς ἐπίμονους οὔτε τοὺς λιγότερο προσεκτικοὺς ἀναγνῶστες... Ἀντίθετα ἡ σύνθεση, ποὺ ἐκκινεῖ ἀπὸ μιὰ ἐντελῶς διαφορετικὴ ὁδό... χρησιμοποιώντας μιὰ ἐπιμήκη ἀκολουθία ὁρισμῶν, ἀξιωμάτων, θεωρημάτων, προβλημάτων... ἔχει τὴ συγκατάθεση τοῦ ἀναγνώστη, ἀλλὰ δὲν προσφέρει, ὅπως ἡ ἄλλη, μιὰ πλήρη ἱκανοποίηση γιὰ ὅσους θέλουν νὰ μάθουν, διότι δὲν διδάσκει τὴ μέθοδο μὲ τὴν ὁποίαν αὐτὸ τὸ πράγμα ἔχει ἀνακαλυφθεῖ. Οἱ ἀρχαῖοι γεωμέτρες συνήθιζαν νὰ χρησιμοποιοῦν μόνο τὴ σύνθεση ὄχι γιατί ἀγνοοῦσαν ἐντελῶς τὴν ἀνάλυση, ἀλλὰ γιατί, κατὰ τὴ γνώμη μου, ἀναφερόμενοι τόσο πολὺ σ' αὐτήν, τὴν φύλαξαν γιὰ τοὺς ἑαυτούς τους, σὰν ἕνα σημαντικὸ μυστικό»[48].

Ὡς ἐκ τούτου, ἡ ἀνάλυση ἐπιτρέπει στὸν ἀναγνώστη νὰ κατανοήσει τὴν ἀπόδειξη, δηλαδὴ τὸν διαφωτίζει, ἡ δὲ σύνθεση τὸν πείθει μόνο, ἀφοῦ δὲν μπορεῖ νὰ τὸν διαφωτίσει, καθὼς δὲν τοῦ ἀποκαλύπτει τὴν εὑρετικὴ ὁδό.

Φυσικὰ ὁ 17ος αἰώνας εἶχε πληρωθεῖ τόσο ἀπὸ τὶς πρότερες ἀρχαιοελληνικὲς γνώσεις ὅσο καὶ ἀπὸ τὰ σύγχρονα ἐπιτεύγματα. Σ' αὐτὴ τὴ συσσώρευση γνώσεων, οἱ ὁποῖες ἔπειθαν καὶ ἀποτελοῦσαν τὸ ἕνα ἄκρο τοῦ δίπολου, ἀντιτίθεται τὸ ἄλλο, τὸ ὁποῖο φέρει καὶ αὐτὸ γνώσεις, ὅμως γνώσεις παραγόμενες μέσα ἀπὸ μιὰ διαδικασία, ἡ ὁποία ἀναγκαστικὰ ὠθεῖ τὸν λόγιο τοῦ 17ου αἰώνα νὰ ἐπιλύει προβλήματα, νὰ εὑρίσκει λύσεις. Αὐτὸ ἀκριβῶς ἀποτελεῖ κατὰ τὸν Καρτέσιο καὶ τὸ ἀληθὲς ἀντικείμενο τῆς γνώσης.

Ἐξάλλου στὸν 10ο κανόνα τῶν *Regulae ad directionem ingenii* δὲν διστάζει νὰ ἀποκαλύψει τὴν εὐχαρίστηση μὲ τὴν ὁποία τὸν γεμίζει ἡ ἀναδημιουργία, ὅταν μέσω τῶν δικῶν του νοητικῶν διεργασιῶν, προσεγγίζει τὶς ἀνακαλύψεις τῶν ἄλλων[49].

Χ. ΦΙΛΗ
(Ἀθῆναι)

---

47. Οἱ αἰτίες εἶναι οἱ λόγοι τῶν μεγεθῶν.

48. R. DESCARTES, *Réponses aux secondes objections faites sur les Méditations métaphysiques*, Paris, P. U. F. 1961, σ. 175.

49. R. DESCARTES, *Règles pour la direction...*, σ. 403. Πβ. ἐπίσης *Cogitationes privatae*: «τὴν ἐποχὴ τῆς νιότης μου, ὅταν ἔβλεπα ἔξυπνες ἀνακαλύψεις, ἀναριωτόμουνα ἂν δὲν μποροῦσα νὰ ἐφεύρω κι ἐγὼ ὁ ἴδιος, χωρὶς νὰ βασιστῶ στὰ κείμενα ἑνὸς συγγραφέα», σ. 214.