ΦΙΛΩΝ ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ, τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΓΙΑ ΤΗ ΦΥΣΗ ΤΟΥ ΣΥΝΕΧΟΥΣ

1. Ἡ ἔννοια τοῦ συνεχοῦς ἔχει πρωταρχικὴ σημασία γιὰ τὴ Φιλοσοφία τῶν Μαθηματικῶν. Γιὰ τὸν λόγο αὐτὸν ἡ διακρίβωση τῆς οὐσίας του, τόσο ἀπὸ μαθηματικὴ ὅσο καὶ ἀπὸ φιλοσοφικὴ ἄποψη, ἀπετέλεσεν ἀπὸ τὴν ἀρχαιότητα τὸ ἀντικείμενο τῆς προσπαθείας ἀλλὰ καὶ τῆς δοκιμασίας γιὰ ἕνα πλῆθος ἐρευνητῶν. Ἂν καὶ ἡ ἔννοια τοῦ συνεχοῦς φαίνεται ἀπὸ τὴν ἐποπτεία ἀρκετὰ σαφὴς καὶ ἁπλῆ, στὴν πραγματικότητα ὁ ἀκριβὴς καθορισμός της, ἀπηλλαγμένος ἀπὸ ἐνορατικὰ στοιχεῖα, ἦταν πάντοτε δυσεπίλυτο πρόβλημα. Ὑπῆρξε ἐποχή, ποὺ ἡ ἔννοια αὐτὴ θεωρήθηκε ἀδύνατο νὰ ἀναλυθῆ σὲ ἁπλούστερες ἔννοιες. Ἀκόμη περισσότερο· θεωρήθηκε πὼς δὲν ἔπρεπε νὰ καταλεχθῆ κὰν στὶς μαθηματικὲς ἢ στὶς λογικὲς ἔννοιες καὶ ὅτι ἔπρεπε νὰ χαρακτηρισθῆ ὡς ἕνα εἶδος καθαροῦ δόγματος. Ἐξ ἄλλου, ἐπίστευσαν ἄλλοτε ὅτι ἡ ἔρευνα γιὰ τὴν ἀποκάλυψη τοῦ μυστηρίου ποὺ ἔκρυβε τὸ συνεχὲς ἦταν κάτι τὸ μὴ ἐπιτρεπτὸ καὶ ὅτι γι' αὐτὸ ἡ σχετικὴ ἔρευνα ἔπρεπε νὰ καταδικασθῆ ὁλότελα[1]. Γεγονὸς εἶναι πὼς καὶ σήμερα ἀκόμη τὸ συνεχὲς εἶναι μιὰ ἀπὸ τὶς πιὸ δύσκολες καὶ πιὸ δυσεξιχνίαστες ἔννοιες σ' ὅλα τὰ Μαθηματικά.

Πρῶτοι οἱ ἀρχαῖοι Ἕλληνες ἐπέτυχαν νὰ πλησιάσουν στὴ σύλληψη μιᾶς ἀριθμητικῆς ἰδέας τοῦ γεωμετρικοῦ συνεχοῦς μὲ τὴν ἐπινόηση ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν. Τὴν θεωρία τῶν Ἑλλήνων κατώρθωσαν νὰ συμπληρώσουν οἱ μαθηματικοὶ ὕστερα ἀπὸ δύο ὁλόκληρες χιλιετίες[2]. Ὡστόσο ὅ,τι

1. G. Cantor, *Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten,* Math. Ann. 5 (1883) καὶ A. Fraenkel, *Einleitung in die Mengenlehre,* Wien 1928, 125.

2. Ἡ αὐστηρὴ δόμηση τοῦ ἀσυμμέτρου ἔγινε μὲ τὴν θεωρία τῶν Λόγων τοῦ μαθητοῦ τοῦ Πλάτωνος Εὐδόξου. Ἡ θεωρία αὐτὴ συμπληρώθηκε τὸ 1887 ἀπὸ τὸν R. Dedekind μὲ τὴν δημιουργία τῶν τομῶν, οἱ ὁποῖες εἰσάγουν τὴν γενικὴ ἔννοια τῶν ἀσυμμέτρων ἀριθμῶν. Στὴν συμπλήρωση αὐτὴ βασικὲς εἶναι οἱ ἔννοιες τῆς διατάξεως, τῆς πυκνότητος καὶ τοῦ μετρησίμου ἑνὸς συνόλου. Ἀπὸ τὶς δύο πρῶτες ὁρίζει ὁ Dedekind, μὲ βάση τὴν τομή, τὴν ἔννοια τῆς συνεχείας. Διατεταγμένα καὶ μετρήσιμα σύνολα εἶναι ἐκεῖνα, ποὺ στὴν οὐσία θεώρησε ὁ Εὔδοξος ὡς βάση τῆς θεωρίας του. Ἀξίζει νὰ παρατηρηθῆ, ὅτι ἡ διάκριση μεταξὺ πυκνοῦ καὶ συνεχοῦς γίνεται ἀπὸ τὸν ἴδιο τὸν Εὐκλείδη στὸ 10ο βιβλίο τῶν *Στοιχείων*. Λεπτομέρειες γιὰ τὴν δόμηση τοῦ γενικοῦ ἀσυμμέτρου σύμφωνα μὲ τὴν θεωρία τοῦ Εὐδόξου βλ. Φ. Βασιλείου, *Ἐπὶ τῆς οὐσίας τῶν Μαθηματικῶν,* Ἀθῆναι 1965.

ἐπέτυχαν τότε οἱ μαθηματικοὶ δὲν ἦταν τίποτε περισσότερο ἀπὸ μιὰ ἁπλῆ ἀ π ε ι κ ό ν ι σ η τοῦ γεωμετρικοῦ συνεχοῦς μέσα στὴν περιοχὴ τῶν ἀριθμῶν. Λίγο ἀργότερα —στὸ τελευταῖο τέταρτο τοῦ περασμένου αἰῶνος— μὲ τὴν δημιουργία τῆς Θ ε ω ρ ί α ς τ ῶ ν Σ υ ν ό λ ω ν ἔγινε ἡ προσπάθεια γιὰ τὴν προσπέλαση τοῦ συνεχοῦς μὲ τὸ δ ι α κ ε κ ρ ι μ έ ν ο. Ἡ μέθοδος ποὺ ἐγκαινιάσθηκε μὲ τὸν τρόπο αὐτὸν εἶχεν ὡς στόχο τὴν γεφύρωση τοῦ χάσματος ποὺ χωρίζει τὶς δύο αὐτὲς βασικὰ διαφορετικὲς ἔννοιες, δηλαδὴ τὴν ἔννοια τοῦ διακεκριμένου καὶ ἐκείνη τοῦ συνεχοῦς, χάσματος ποὺ δὲν διαφέρει οὐσιαστικὰ ἀπὸ ἐκεῖνο μεταξὺ τῆς Γεωμετρίας καὶ τῆς Ἀριθμοθεωρίας. Διάφορες ἀπόψεις ἔχουν διατυπωθῆ ἀπὸ τότε ἀναφορικὰ μὲ τὴν πραγμάτωση τῆς γεφυρώσεως αὐτῆς. Ἀπὸ τὸ ἕνα μέρος οἱ δυσκολίες ποὺ ἐνυπάρχουν στὴν ἴδια τὴν ἔννοια τοῦ σ υ ν ό λ ο υ, ποὺ ἔγιναν καὶ ἀφορμὴ γιὰ τὴν ἐμφάνιση διαφόρων ἀ ν τ ι φ ά σ ε ω ν ἢ ἀ ν τ ι ν ο μ ι ῶ ν[3], ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος οἱ σοβαρὲς ἀμφιβολίες γιὰ τὴ νομιμότητα τῶν μεθόδων, ποὺ σχετικὰ ἀκολουθήθηκαν, κατέστησαν τὴν γεφύρωση σὲ μεγάλο βαθμὸ προβληματική.

Ἐξ ἄλλου, ἡ ἀνάγκη γιὰ τὴν εἰσαγωγὴ στὴ Θεωρία τῶν Συνόλων νέων αἰτημάτων καθὼς καὶ ἡ ἀπὸ μέρους μερικῶν τροποποίηση αὐτῶν τῶν κανόνων τῆς Λογικῆς, ποὺ ἀκόμη καὶ ἐξ ἀρχῆς δὲν ἔτυχαν τῆς γενικῆς παραδοχῆς, ἔδωσαν ἀφορμὴ στὸ νὰ γεννηθοῦν ριζικὲς διαφωνίες μεταξὺ τῶν μαθηματικῶν, διαφωνίες ποὺ καὶ σήμερα δὲν ἔχουν καθ' ὁλοκληρίαν κατασταλῆ. Ὅπως, ὅμως, συνέβη καὶ μὲ τόσα ἄλλα δυσεπίλυτα προβλήματα στὸ παρελθόν, ἔτσι καὶ τώρα οἱ διαφωνίες ποὺ ἀνεφύησαν ἀναφορικὰ μὲ τὴ φύση τοῦ συνεχοῦς ἔδωσαν μεγάλη ὤθηση γιὰ τὴν δημιουργία νέων ἐννοιῶν καὶ μεθόδων, σὲ τρόπο ὥστε νὰ πλουτισθοῦν τὰ Μαθηματικὰ περισσότερο ἴσως ἀπ' ὅ,τι θὰ συνέβαινε μὲ τὴν ἀπ' ἀρχῆς πλήρη καὶ ὁριστικὴ ἐπίλυση τοῦ προβλήματος.

2. Ἡ ἔννοια τοῦ συνεχοῦς ἐμφανίζεται κατὰ τὴν ἀρχαιότητα στὸν φιλόσοφο Παρμενίδη[4]. Ἡ συστηματικὴ χρήση της ὀφείλεται κυρίως στὸν

---

3. Ἡ ἐπινόηση τῶν ἀντινομιῶν προκάλεσε τὴν δυσπιστία τοῦ τότε μαθηματικοῦ κόσμου ἀναφορικὰ μὲ τὴν ὀρθότητα τοῦ παραδοσιακοῦ τρόπου τοῦ διαλογίζεσθαι στὴν Θεωρία τῶν Συνόλων. Ἀντὶ ὅμως νὰ ἐγκαταλειφθῆ ἡ νέα αὐτὴ θεωρία, συνέβη ἀκριβῶς τὸ ἀντίθετο, δηλαδὴ προκλήθηκε τὸ γενικὸ ἐνδιαφέρον καὶ ἡ ἀρχικὴ διστακτικότης μετεβλήθη σὲ ἀγῶνα δρόμου γιὰ τὴν ἀνάπτυξη τῆς θεωρίας αὐτῆς.

4. Παρμενίδης, ἀπόσπ. 8,1-10 καὶ 22-25 (VS 1, 235, 2 ἑπ. καὶ 237, 2 ἑπ.): *Ἐξ ἐμέθεν ῥηθέντα. Μόνος δ' ἔτι μῦθος ὁδοῖο | λείπεται ὡς ἔστιν· ταύτῃ δ' ἐπὶ σήματ' ἔασι | πολλὰ μαλ', ὡς ἀγένητον ἐὸν καὶ ἀνώλεθρόν ἐστιν· | ἔστι γὰρ οὐλομελές τε καὶ ἀτρεμὲς ἠδ' ἀτέλεστον· | οὐδὲ ποτ' ἦν οὐδ' ἔσται, ἐπεὶ νῦν ἔστιν ὁμοῦ πᾶν, | ἕν, σ υ ν ε χ έ ς· τίνα γὰρ γένναν διζήσεαι αὐτοῦ; πῇ πόθεν αὐξηθέν; οὐδ' ἐκ μὴ ἐόντος ἐάσσω | φάσθαι σ' οὐδὲ νοεῖν·*

μαθητὴ τοῦ Παρμενίδη, τὸν Ζήνωνα τὸν Ἐλεάτη (περ. 450 π.Χ.). Ἀπὸ τὰ ἀποσπάσματα τοῦ Ζήνωνος, ποὺ διεσώθησαν ἀπὸ μαρτυρίες τοῦ σχολιαστοῦ τοῦ Ἀριστοτέλους Σιμπλικίου (ἀρχὲς τοῦ 6ου αἰῶνος μ.Χ.), ἐκεῖνο ποὺ εἶναι λιγώτερο γνωστό, ἀλλὰ γι' αὐτὸ δὲν εἶναι καὶ λιγώτερο φημισμένο, εἶναι τὸ ἀναφερόμενο στὰ π ο λ λ ά. Ἡ μεγάλη σημασία ποὺ ἀποδόθηκε στὸ ἀπόσπασμα αὐτὸ δικαιολογεῖται ἀπὸ τὴ στενὴ σχέση ποὺ τὸ συνδέει μὲ τὸ συνεχές. Μὲ ὅ,τι ἐκφράζει σ' αὐτὸ ὁ Ζήνων θέλει νὰ καταρρίψη τὸν ἰσχυρισμὸ γιὰ τὴ δυνατότητα διαιρέσεως τοῦ συνεχοῦς σὲ ἄ τ ο μ α χωρὶς καμμιὰ μεταξύ τους συνοχή. Γνωρίζομε, βέβαια, ὅτι ἡ ἔννοια τοῦ συνεχοῦς ἐνυπάρχει, κατὰ μὴ ἐκπεφρασμένο τρόπο, καὶ σὲ ὅλα τὰ π α ρ ά δ ο ξ α τοῦ Ζήνωνος. Ὅμως, ἐκεῖνο ποὺ διακρίνει τὸ ὑπ' ὄψει ἀπόσπασμα ἀπὸ τὰ ἄλλα πρέπει ν' ἀποδοθῆ στὴν ἄμεση ἐφαρμογή του στὸ λεγόμενο γ ρ α μ μ ι κ ὸ σ υ ν ε χ έ ς, αὐτὸ ποὺ ἀποτελεῖ τὴν πιὸ ἁπλῆ μορφὴ ἑνὸς συνεχοῦς. Λέγει ὁ Ζήνων στὸ ἀπόσπασμα 1: *εἰ πολλά ἐστιν, ἀνάγκη αὐτὰ μικρά τε εἶναι καὶ μεγάλα· μικρὰ μὲν ὥστε μὴ ἔχειν μέγεθος, μεγάλα δὲ ὥστε ἄπειρα εἶναι*[5]. Ἡ ὄχι καὶ τόσο σαφὴς αὐτὴ πρόταση ἑρμηνεύεται[6], σὲ συνδυασμὸ καὶ μὲ ἄλλα ἀποσπάσματα τοῦ Ζήνωνος ποὺ ἀποτελοῦν ἐπιχειρήματα γιὰ τὴν ὑποστήριξη τοῦ ἰσχυρισμοῦ του, κατὰ τὸν ἀκόλουθο τρόπο: Κάτι ποὺ ἔχει ἔκταση ἠμπορεῖ πρῶτα νὰ θεωρηθῆ συνιστάμενο ἀπὸ ἄ π ε ι ρ α μέρη. Πραγματικά, λέγει ὁ Ζήνων σὲ ἄλλο ἀπόσπασμα: *εἰ πολλά ἐστιν, ἄπειρα τὰ ὄντα ἐστίν· ἀεὶ γὰρ ἕτερα μεταξὺ τῶν ὄντων ἐστί, καὶ πάλιν ἐκείνων ἕτερα μεταξύ· καὶ οὕτως ἄπειρα τὰ ὄντα ἐστί*[7].

Πρέπει ἐδῶ νὰ παρατηρηθῆ πώς, ὅ,τι κάνει στὸ ἀπόσπασμα αὐτὸ ὁ Ζήνων εἶναι μιὰ καθαρὰ ν ο η τ ι κ ὴ διαίρεση –ἂς τὴν ποῦμε πρώτου εἴδους– ποὺ δὲν καταστρέφει τὴν συνοχὴ τῶν μερῶν τοῦ ὅλου καὶ ποὺ γιὰ τὸν λόγο αὐτὸν πρέπει νὰ τὴν διακρίνωμε ἀπὸ ἐκείνη τοῦ Παρμενίδη (διαίρεση δευτέρου εἴδους), αὐτὴν ποὺ πιὸ πάνω μνημονεύσαμε. Εἶναι φανερὸ πὼς μὲ τὴν κατάρριψη τῆς δυνατότητος γιὰ τὴ διαίρεση τοῦ πρώτου εἴδους, ποὺ ἐπιχειρεῖ ὁ Ζήνων, καταρρίπτεται καὶ ἐκείνη τοῦ δευτέρου εἴδους. Ὥστε ἑρμηνεύοντες τὸν ἀρχικὸ ἰσχυρισμὸ τοῦ Ζήνωνος, βλέπομε ὅτι εὑρισκόμεθα μπροστὰ σὲ δύο δυνατὲς περιπτώσεις:

Πρώτη περίπτωση· τὰ ἔσχατα, ἄπειρα τὸ πλῆθος, ἀδιαίρετα μέρη ποὺ φθάνομε μὲ τὴ γενόμενη διαίρεση, δὲν ἔχουν μέγεθος. Αὐτὸ ὅμως ἀποκλεί-

---

οὐ γὰρ φατὸν οὐδὲ νοητὸν | ἔστιν ὅπως οὐκ ἔστι... καὶ ...*οὐδὲ διαιρετόν ἐστιν, ἐπεὶ πᾶν ἐστιν ὁμοῖον· | οὐδέ τι τῇ μᾶλλον, τό κεν εἴργοι μιν συνέχεσθαι, | οὐδέ τι χειρότερον, πᾶν δ' ἔμπλεόν ἐστιν ἐόντος. | τῷ ξ υ ν ε χ ὲ ς πᾶν ἐστιν· ἐὸν γὰρ ἐόντι πελάζει.*

5. VS 1, 255, 21 ἑπ.

6. H. D. P. Lee, *Zeno of Elea*, Amsterdam 1967 (1936), 19, 21.

7. Σιμπλίκιος, *Εἰς Φυσικὴν* 140, 31-34 Diels (VS 1, 258, 3-5).

εται κατὰ τὸν Ζήνωνα, ἐπειδὴ *εἰ μὴ ἔχοι μέγεθος τὸ ὄν, οὐδ' ἂν εἴη*[8]. Ἐξ ἄλλου, *εἰ γὰρ ἄλλῳ ὄντι προσγένοιτο, οὐδὲν ἂν μεῖζον ποιήσειεν· μεγέθους γὰρ μηδενὸς ὄντος, προσγενομένου δέ, οὐδὲν οἷόν τε εἰς μέγεθος ἐπιδοῦναι· καὶ οὕτως ἂν ἤδη τὸ προσγινόμενον οὐδὲν εἴη. Εἰ δὲ ἀπογινομένου τὸ ἕτερον μηδὲν ἔλαττόν ἐστι μηδὲ αὖ προσγινομένου αὐξήσεται, δῆλον ὅτι τὸ προσγενόμενον οὐδὲν ἦν οὐδὲ τὸ ἀπογενόμενον*[9]. Δεύτερη περίπτωση· τὰ ἐν λόγῳ ἄτομα ἔχουν μέγεθος. Τότε ὁ Ζήνων συμπεραίνει ὅτι τὸ ἄθροισμα ἀπείρου πλήθους μεγεθῶν, ποὺ δὲν εἶναι μηδενικά, εἶναι ἄπειρον: *εἰ δὲ ἔστιν, ἀνάγκη ἕκαστον μέγεθός τι ἔχειν καὶ πάχος καὶ ἀπέχει αὐτοῦ τὸ ἕτερον ἀπὸ τοῦ ἑτέρου. Καὶ περὶ τοῦ προύχοντος ὁ αὐτὸς λόγος· καὶ γὰρ ἐκεῖνο ἕξει μέγεθος καὶ προέξει αὐτοῦ τι. Ὅμοιον δή τοῦτο ἅπαξ τε εἰπεῖν καὶ ἀεὶ λέγειν· οὐδὲν γὰρ αὐτοῦ τοιοῦτον ἔσχατον ἔσται οὔτε ἕτερον πρὸς ἕτερον οὐκ ἔσται. Οὕτως εἰ πολλά ἐστιν, ἀνάγκη αὐτὰ μικρά τε εἶναι καὶ μεγάλα· μικρὰ μὲν ὥστε μὴ ἔχειν μέγεθος, μεγάλα δὲ ὥστε ἄπειρα εἶναι*[10]. Ἔτσι φθάνομε σὲ ἄτοπο, καὶ τὸ ἄτοπο αὐτὸ ἀποδεικνύει κατὰ τὸν Ζήνωνα τὸν ἰσχυρισμό του.

Οἱ Hasse καὶ Scholz[11] διασαφηνίζουν ἀκόμη περισσότερο τὸ ἀρχικὸ ἀπόσπασμα τοῦ Ζήνωνος, σχετίζοντάς το μὲ τὸ γραμμικὸ συνεχὲς καὶ παραφράζοντάς το μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο: «Ἂν εἶναι παραδεκτὸ νὰ θεωρήσωμε ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα ὡς ἄθροισμα ἀπὸ ἀπείρως πολλά, ἀπείρως μικρὰ στοιχειώδη τμήματα (ἀπειροστά), τότε δύο καὶ μόνον περιπτώσεις εἶναι δυνατές. Ἢ τὰ στοιχειώδη ἐκεῖνα τμήματα ἔχουν ἕνα πεπερασμένο διάφορο ἀπὸ τὸ μηδὲν μέγεθος, περίπτωση κατὰ τὴν ὁποία καὶ τὸ συντιθέμενο ἀπὸ αὐτὰ τμῆμα εἶναι ἀπείρως μεγάλο, γιατὶ ἕνα ἄθροισμα ἀπὸ ἀπείρως πολλὰ στοιχειώδη τμήματα μὲ πεπερασμένο τὸ καθένα μέγεθος ὑπερβαίνει κάθε πεπερασμένο τμῆμα[12], ἢ τὰ ἐν λόγῳ στοιχειώδη τμήματα εἶναι μηδενικά, περίπτωση κατὰ τὴν ὁποία καὶ τὸ συνιστάμενο ἀπὸ αὐτὰ εἶναι μηδενικό»[13]. Παραδεχόμεθα φυσικά, πὼς τὰ στοιχειώδη τμήματα εἶναι ἴ σ α μεταξύ τους, ἀφοῦ, σὲ ἐναντία περίπτωση, ἕνα τέτοιο τμῆμα ποὺ θὰ διαφέρει ἀπὸ ἄλλο καὶ θὰ εἶναι μεγαλύτερο (μικρότερο) ἐκείνου, κατ' ἀνάγκην θὰ τὸ περιλαμβάνη (θὰ περιλαμβάνεται σ' ἐκεῖνο), ἄρα δὲν θὰ ἦταν στοιχειῶδες, παρὰ τὴν παραδοχή μας.

8. Ὁ.π. 141, 1-2.
9. Ὁ.π. 139, 11-15.
10. Ὁ.π. 141, 2-8.
11. H. Hasse - H. Scholz, *Die Grundlagenkrisis der Griechischen Mathematik*, Charlottenburg 1928, 11 (Ἑλλην. μτφρ. μὲ Πρόλ. Φ. Βασιλείου, «Δελτίον Ε.Μ.Ε.» 1934).
12. Πρόκειται γιὰ Ἀρχιμήδειο (ὀρθότερα Εὐδόξειο) σύστημα μεγεθῶν.
13. Βλ. καὶ παράγρ. 15.

Πρέπει νὰ σημειωθῆ ὅτι τὰ ἀναφερόμενα ἀποσπάσματα τοῦ Ζήνωνος φαίνεται νὰ εἶναι περισσότερο αὐθεντικὰ ἀπὸ ἄλλα ποὺ ἀναφέρονται στὰ *παράδοξα* τοῦ Ἐλεάτου καὶ ποὺ μνημονεύει ὁ Ἀριστοτέλης. Καὶ τοῦτο γιατὶ ὁ Σιμπλίκιος, στὴ μαρτυρία τοῦ ὁποίου τὰ ὀφείλομε, δηλώνει πὼς εἶναι κατὰ λέξη ἀπόδοση κειμένου τοῦ Ζήνωνος.

3. Ἕνα ἀκόμη ἐπιχείρημα τοῦ Ζήνωνος ἀναφερόμενο στὰ πολλά, ποὺ περικλείει τὴν ἀντίφαση τοῦ μικρά τε καὶ μεγάλα, διεσώθη ἀπὸ τὸν Σιμπλίκιο[14]: *Καὶ τί δεῖ πολλὰ λέγειν, ὅτε καὶ ἐν αὐτῷ φέρεται τῷ τοῦ Ζήνωνος συγγράμματι; πάλιν γὰρ δεικνύς, ὅτι εἰ πολλά ἐστι, τὰ αὐτὰ πεπερασμένα ἐστὶ καὶ ἄπειρα, γράφει ταῦτα κατὰ λέξιν ὁ Ζήνων· «εἰ πολλά ἐστιν, ἀνάγκη τοσαῦτα εἶναι ὅσα ἐστὶ καὶ οὔτε πλείονα αὐτῶν οὔτε ἐλάττονα. Εἰ δὲ τοσαῦτά ἐστιν ὅσα ἐστί, πεπερασμένα ἂν εἴη. Εἰ πολλά ἐστιν, ἄπειρα τὰ ὄντα ἐστίν...»*. Συναφὲς πρὸς τὸ παράδοξο τῶν πολλῶν εἶναι καὶ τὸ λεγόμενο τῆς διχοτομίας. Γιὰ τὸ παράδοξο αὐτὸ ἔχομε τὸ ἀκόλουθο χωρίο, ποὺ ὁ Πορφύριος ἀποδίδει στὸν Παρμενίδη, ἀλλ' ὁ Σιμπλίκιος παρατηρεῖ πὼς εἶναι πιθανώτερα τοῦ Ζήνωνος: *ἕτερος δὲ ἦν λόγος τῷ Παρμενίδῃ ὁ διὰ τῆς διχοτομίας οἰόμενος δεικνύναι τὸ ὂν ἓν εἶναι μόνον καὶ τοῦτο ἀμερὲς καὶ ἀδιαίρετον· εἰ γὰρ εἴη, φησί, διαιρετόν, τετμήσθω δίχα, ...ὡς ἤτοι ὑπομενεῖ τινὰ ἔσχατα μεγέθη ἐλάχιστα καὶ ἄτομα, πλήθει δὲ ἄπειρα, καὶ τὸ ὅλον ἐξ ἐλαχίστων, πλήθει δὲ ἀπείρων συστήσεται... ἅπερ ἄτοπα. Οὐκ ἄρα διαιρεθήσεται, ἀλλὰ μενεῖ ἕν· καὶ γὰρ δὴ ἐπεὶ πάντῃ ὅμοιόν ἐστιν, εἴπερ διαιρετὸν ὑπάρχει, πάντῃ ὁμοίως ἔσται διαιρετόν, ἀλλ' οὐ τῇ μέν, τῇ δὲ οὔ. διῃρήσθω δή πάντῃ· δῆλον οὖν πάλιν ὡς οὐδὲν ὑπομενεῖ, ἀλλ' ἔσται φροῦδον, καὶ εἴπερ συστήσεται, πάλιν ἐκ τοῦ μηδενὸς συστήσεται· εἰ γὰρ ὑπομενεῖ τι, οὐδέ πω γενήσεται πάντῃ διῃρημένον. Ὥστε ἐκ τούτων φανερόν, φησί, ὡς ἀδιαίρετόν τε καὶ ἀμερὲς καὶ ἓν ἔσται τὸ ὄν*[15].

4. Κατὰ τὴν μαρτυρία τοῦ ἰδίου τοῦ Πλάτωνος, στὴν ἀρχὴ τοῦ διαλόγου *Παρμενίδης* (128 b), τὰ παράδοξα τὰ ἐπενόησεν ὁ Ζήνων γιὰ νὰ ὑποστηρίξη τὴν θεωρία τοῦ διδασκάλου του ἀναφορικὰ μὲ τὸ ἑνιαῖο τῆς πραγματικότητος ὡς ἀμετάβλητης καὶ ἀμετάκλητης ὀντότητος—θεωρία ποὺ ὁ Ζήνων μὲ πίστη καὶ ἀφοσίωση ἀκολούθησε σὲ ὅλη του τὴ ζωή. Ἐξ ἄλλου εἶναι φυσικὸ νὰ παραδεχθοῦμε ὅτι ὁ Ζήνων, ὅπως καὶ πολλοὶ μεταγενέστεροι φιλόσοφοι, ἠρνεῖτο νὰ παραδεχθῆ τὴ σύσταση μεγέθους, ποὺ ἔχει ἔκταση, ἀπὸ στοιχεῖα δίχως ἔκταση. Βέβαιο εἶναι πὼς ὅ,τι ἀπασχολοῦσε τὸν Παρμενίδη καὶ τὸν Ζήνωνα δὲν ἦταν ἡ μαθηματικὴ ἀλλὰ ἡ φυσικὴ θεώρηση

---

14. Σιμπλίκιος, *Εἰς Φυσικὴν* 140, 27-32.
15. Ὁ.π. 139, 26 - 140, 6 καὶ Lee, *Zeno* 12.

τοῦ χώρου (καὶ τοῦ χρόνου). Ὅμως ἂς μὴ λησμονοῦμε, πὼς ἡ ἐνόραση τοῦ φυσικοῦ χώρου χρησίμευσε καὶ γιὰ τὴ δόμηση τοῦ γεωμετρικοῦ χώρου. Σ' ἕνα πρότυπο μαθηματικῆς Γεωμετρίας ἐνυπάρχει πάντοτε ἡ ἰδέα τοῦ φυσικοῦ χώρου.

Ἡ ἐπιχειρηματολογία ποὺ ἀναφέραμε καὶ ποὺ ἀποτελεῖ ἕνα εἶδος πολεμικῆς τοῦ Ζήνωνος, στρέφεται κυρίως ἐναντίον ἐκείνων ποὺ ὑπεστήριζαν ὅτι ὁ χῶρος (καὶ ὁ χρόνος) συνίσταται ἀπὸ ἄ τ ο μ α. Γιὰ τὸν Ζήνωνα τὰ ἄτομα αὐτὰ θὰ πρέπει κατ' ἀνάγκην νὰ εἶναι ἄπειρα τὸ πλῆθος. Τοῦτο, ἀκριβῶς, εὑρίσκετο σὲ ἀντίθεση πρὸς τὴ διδασκαλία τοῦ Παρμενίδη γιὰ τὸ ἑνιαῖο τοῦ κόσμου. Ἀκόμη καὶ ἀπὸ τὴ μαρτυρία τοῦ Πλάτωνος, ποὺ ἀναφέραμε, προκύπτει ὅτι, πραγματικά, ὁ Ζήνων μὲ τὰ *παράδοξά* του ἤθελε νὰ κτυπήσῃ τοὺς π ο λ υ α ρ χ ι κ ο ὺ ς ποὺ ἔσκωπταν τὸν ἑ ν ι σ μ ὸ τοῦ διδασκάλου του, δείχνοντας τὰ ἄτοπα, ὅπου ὡδηγοῦσαν οἱ δοξασίες ἐκείνων. Εἶναι ὅμως δύσκολο ν' ἀπαντήσῃ κανεὶς στὸ ἐρώτημα, ποιοὺς ἄραγε ἐννοοῦσε ὁ Πλάτων μὲ τὸν χαρακτηρισμὸ πολυαρχικοί. Ἦσαν οἱ Πυθαγόρειοι, ποὺ ἀνήγαγαν τὰ πάντα στοὺς ἀριθμοὺς ἢ οἱ ὀπαδοὶ κάποιας ἄλλης φιλοσοφικῆς θέσεως μὲ παρόμοιες ἀ τ ο μ ι σ τ ι κ ὲ ς τάσεις; Στὸ ἀναφερόμενο βιβλίο των, οἱ Hasse καὶ Scholz ἐκφράζουν τὴν εἰκασία πὼς πρόκειται γιὰ τοὺς Πυθαγορείους, ποὺ ἡ μεταφυσική τους γιὰ τοὺς ἀριθμοὺς ἐνεῖχε πολυαρχικὴ κοσμοθεωρία.

Εἶναι πολὺ ἐνδιαφέρον νὰ παρακολουθήσῃ κανεὶς τὴ διένεξη, ποὺ ἀνεφύη μεταξὺ τοῦ Ζήνωνος καὶ τοῦ Μελίσσου, παρὰ τὸ ὅτι καὶ οἱ δύο ἦσαν ὄχι μόνον μαθηταὶ τοῦ Παρμενίδη ἀλλὰ καὶ θερμοὶ ὑποστηρικταὶ τῶν δοξασιῶν τοῦ διδασκάλου. Ἡ διένεξη αὐτὴ εἶχε ὡς ἀφορμὴ τὴν χρήση, στὴν ἐπιχειρηματολογία τοῦ Ζήνωνος, διαιρέσεων τοῦ ὄντος, πρᾶγμα ποὺ ὁ Μέλισσος κατεδίκαζε πλήρως, πιστεύοντας πὼς κάθε διαίρεση ἀντετίθετο στὴ θέση τῆς θεωρίας τοῦ Παρμενίδη. Ἀπ' ὅσα, ὅμως, ἐκθέσαμε στὰ προηγούμενα, βλέπομε ὅτι οἱ διαιρέσεις ποὺ χρησιμοποιοῦσε ὁ Ζήνων ἦσαν αὐτὲς ποὺ ἐκεῖ καλέσαμε τοῦ πρώτου εἴδους, ἐνῶ ἐκεῖνες στὸν Παρμενίδη ἦσαν τοῦ δευτέρου εἴδους. Κατὰ τὸν E. Beth[16], φαίνεται πὼς ἡ διάσταση γνώμης μεταξὺ τῶν δύο μαθητῶν προῆλθε εἴτε ἀπὸ παράβλεψη τοῦ Μελίσσου, ποὺ συνέχεε τὰ δύο εἴδη διαιρέσεων, εἴτε ἀπὸ τὴ θέση πὼς καὶ ἡ ὑπόθεση ἀκόμη κάθε εἴδους διαιρέσεως στὰ ὄντα ἦταν ἀσυμβίβαστη πρὸς τὸ πνεῦμα τοῦ διδασκάλου των. Ἂς σημειωθῇ ἐδῶ ὅτι ὁ Πλάτων στὸν διάλογο *Θεαίτητος* ἀσπάζεται τὴ ἄποψη τοῦ Μελίσσου, ἐνῶ στοὺς διαλόγους *Παρμενίδης* καὶ *Σοφιστὴς* ὁ Ζήνων φέρεται ὡς ὁ ρήτωρ τοῦ διδασκάλου[17].

---

16. E. Beth, *The Foundations of Mathematics*, Amsterdam 1968².
17. Ὅ.π. 7.

5. Ἀντίθετα πρὸς μία παλαιότερα ἐπικρατήσασα δοξασία, ὅτι δηλαδὴ τὰ *παράδοξα* τοῦ Ζήνωνος διακρίνει κάποια σοφιστικὴ διάθεση[18] καὶ ὅτι αὐτὰ δὲν εἶναι ἀπαλλαγμένα ἀπὸ στοιχειώδη λογικὰ καὶ μαθηματικὰ σφάλματα, σήμερα ὕστερα ἀπὸ μιὰ πιὸ ἐπισταμένη ἔρευνα κανεὶς πιὰ δὲν ἀμφιβάλλει γιὰ τὴν ὀξύνοια καὶ τὴ βαθύτητα σκέψεως ποὺ τὰ χαρακτηρίζουν, καθὼς καὶ γιὰ τὴν καρποφόρα ἐπίδραση ποὺ ἤσκησαν στὴ μαθηματικὴ ἔρευνα. Ὁ γνωστὸς σύγχρονος φιλόσοφος καὶ μαθηματικὸς Bertrand Russell (1872-1970) ἐκφράζεται γιὰ τὰ παράδοξα μὲ τὰ ἀκόλουθα[19]: «Τὰ ἐπιχειρήματα τοῦ Ζήνωνος παρέχουν, κατὰ κάποιο τρόπο, ἔδαφος γιὰ ὅλες σχεδὸν τὶς θεωρίες γιὰ τὸν χῶρο, τὸν χρόνο καὶ τὸ ἄπειρο, ποὺ δημιουργήθηκαν ἀπὸ τὴν ἐποχή του μέχρι σήμερα». Ἀπὸ τό ἄλλο μέρος, στὴν ἔκδοση *Zeno's Paradoxes*, ποὺ ἀποτελεῖ μιὰ συλλογὴ τῶν πιὸ σημαντικῶν ἄρθρων ποὺ γράφηκαν στοὺς τελευταίους χρόνους ἐπάνω στὰ ἐπιχειρήματα τοῦ Ζήνωνος, ὁ ἐκδότης του W. Salmon λέγει στὴν Εἰσαγωγή[20]: «Τὰ παράδοξα τοῦ Ζήνωνος τοῦ Ἐλεάτου εἶναι ἀντικείμενο ὀμορφιᾶς καὶ γοητείας καὶ πηγὴ γιὰ μιὰ ἔντονη πνευματικὴ ἔξαρση». Γεγονὸς εἶναι, πὼς τίποτε δὲν εἶχεν ἄλλοτε παραγνωρισθῆ σὲ τόσο μεγάλο βαθμό, ἀναφορικὰ μὲ τὴν κριτικὴ ἀξία καὶ τὴν ἐπιστημονικὴ γονιμότητά των, ὅσο τὰ παράδοξα αὐτὰ πού, οὔτε λίγο οὔτε πολύ, ἐξισώθηκαν μὲ καθαρὲς σοφιστεῖες. Θὰ ἀναφερθοῦμε καὶ πάλιν στὴν Εἰσαγωγὴ τοῦ τελευταίου αὐτοῦ βιβλίου[21]: «Ἂν καὶ λίγοι φιλόσοφοι νομίζουν ὅτι τὰ παράδοξα τοῦ Ζήνωνος ἀποδεικνύουν ἐγκύρως τὴν ἀνυπαρξία τῆς πολλότητος, τῆς κινήσεως καὶ τῆς μεταβολῆς, ὅμως ὁ ἀπόλυτος ἰδεαλισμὸς τοῦ δεκάτου ἐνάτου καὶ τῶν ἀρχῶν τοῦ εἰκοστοῦ αἰῶνος ἔχει μεγάλη ὁμοιότητα μὲ τὶς ἀπόψεις τοῦ Παρμενίδη, τόσο στὰ ἐπιχειρήματα ὅσο καὶ στὰ συμπεράσματα». Ἐξ ἄλλου ὁ F. H. Bradley,[22] χωρὶς νὰ κάνη μνεία τοῦ Ζήνωνος, χρησιμοποιεῖ πέρα γιὰ πέρα ἐλεατικὰ ἐπιχειρήματα γιὰ νὰ ὑποστηρίξη ὅτι χῶρος καὶ χρόνος, κίνηση καὶ μεταβολή, εἶναι πράγματα ἀνύπαρκτα. Ὁ χῶρος, ὅπως ὁ χρόνος, ἀπεδείχθη καταφανῶς, πὼς δὲν εἶναι πραγματικοί, ἀλλ' ὅτι ἔχουν ἀντιφατικὴ ἐμφάνιση.

Σκοπός μας ἐδῶ δὲν εἶναι νὰ εἰσέλθωμε σὲ γενικὴ κριτικὴ τῆς ἐπιχειρηματολογίας τῶν Ἐλεατῶν, θεωρουμένης ἀπὸ μιὰ σύγχρονη μαθηματικὴ σκοπιά. Γιὰ μιὰ τέτοια κριτικὴ παραπέμπομε στὸ πιὸ σύγχρονο γιὰ τὸ θέμα αὐτό βιβλίο τοῦ Salmon, ποὺ μνημονεύσαμε. Θεωροῦμε, παρὰ ταῦτα, σκόπιμο νὰ τονίσωμε στὸ σημεῖο αὐτὸ πὼς μὲ τὴ σύγχρονη ἄποψη, ὅπου τὸ γραμμικὸ

---

18. Hasse-Scholz, ὅ.π. 13.
19. B. Russel, *The Problem of Infinity considered historically.*
20. W. C. Salmon (Ed.), *Zeno's Paradoxes,* New York 1970, 5.
21. Ὅ.π. 16.
22. Στὸ βιβλίο του *Appearance and Reality,* Oxford 1930, 36.

συνεχὲς συντίθεται ἀπὸ σημεῖα, καὶ τὴ γενίκευση τοῦ μήκους ἑνὸς διαστήματος, ποὺ πραγματοποίησε ἡ νεώτερη Θεωρία τοῦ Μέτρου, αἴρεται, ἀπὸ μαθηματικὴ ἄποψη, πλήρως τὸ ἐπιχείρημα τοῦ Ζήνωνος πὼς στοιχεῖα μὲ μηδενικὸ μέγεθος δὲν ἠμποροῦν νὰ συνθέσουν μέγεθος μὲ ἔκταση. Ἀργότερα, στὴ παράγρ. 15, θὰ ἰδοῦμε ὅτι τὸ τελευταῖο αὐτὸ δὲν συμβαίνει σὲ πλεῖστα σημειοσύνολα μὲ μὴ «ἀπαριθμητὸ» πλῆθος σημείων.

6. Τὴν οὐσία τοῦ συνεχοῦς χαρακτηρίζει καὶ ἕνα ἀπόσπασμα τοῦ τελευταίου Ἴωνος φιλοσόφου, τοῦ Ἀναξαγόρα (500; - 428), ποὺ ἔχομε ἀπὸ μαρτυρία τοῦ Σιμπλίκιου: *οὔτε γὰρ τοῦ σμικροῦ ἐστι τό γε ἐλάχιστον, ἀλλ' ἔλασσον ἀεὶ (τὸ γὰρ ἐὸν οὐκ ἔστι τὸ μὴ οὐκ εἶναι), ἀλλὰ καὶ τοῦ μεγάλου ἀεί ἐστι μεῖζον* (ἀπόσπ. 3.).

Ἀντίθετα πρὸς τὴν ἄποψη ποὺ ἐπικρατοῦσε γενικῶς στὸν δέκατο ἔνατο αἰῶνα, καὶ ποὺ ἐξακολουθεῖ νὰ ἔχῃ ὀπαδούς, ὅτι δηλαδὴ τὸ συνεχὲς εἶναι μιὰ ὁλότητα ἀπὸ καθ' ἑαυτὰ ὑπαρκτὰ σημεῖα, ἔχομε καὶ τὴν ἄποψη ὅτι τὸ συνεχὲς δὲν συντίθεται ἀπὸ σημεῖα, ἀλλ' ἀπὸ μέρη, ποὺ καθένα τους εἶναι καὶ αὐτὸ συνεχές. Σύμφωνα μὲ τὴν τελευταία αὐτὴ ἄποψη, ὁ χῶρος δὲν εἶναι μόνον πρὸς τὰ ἔξω ἄπειρος, ἀλλὰ καὶ σὲ κάθε θέση του εἶναι πρὸς τὰ ἔσω ἄπειρος σὲ τρόπο, ὥστε σὲ μιὰ ἄπειρη πρόβαση ὁ ἐσωτερικὸς ὁρίζων νὰ μᾶς ἀποκαλύπτεται ὁλονὲν νέος, δίχως τέλος. Φαίνεται πὼς μιὰ παραπλήσια δοξασία μὲ αὐτὴν ποὺ θὰ συναντήσωμε παρακάτω στὸν Ἀριστοτέλη καὶ κατὰ τὸν δέκατο ἕβδομο αἰῶνα στοὺς ἐπινοητὰς τοῦ Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ, εἶχε τὴν πηγή της στὴν διδασκαλία τοῦ Ἀναξαγόρα. Ὡστόσο καὶ σήμερα, στὴν λεγομένη Ἐνορατικὴ Σχολὴ (μὲ τὶς ἀκολουθίες ἐλεύθερης ἐκλογῆς) βλέπομε κυριαρχοῦσες ἰδέες ποὺ δὲν ἀπέχουν πολὺ ἀπὸ ἐκεῖνες τοῦ Ἀναξαγόρα καὶ τοῦ Ἀριστοτέλους.

7. Καὶ ὁ Πλάτων συμμεριζόταν ἀρχικὰ τὴ δοξασία τοῦ ἑνιαίου τοῦ συνεχοῦς. Ὁπωσδήποτε ἡ υἱοθέτηση ἀπὸ μέρους τοῦ Πλάτωνος τῆς διδασκαλίας τοῦ Παρμενίδη φαίνεται νὰ ἀπετέλεσε τὴν κατευθυντήρια γραμμὴ μόνον κατὰ τὰ πρῶτα στάδια τοῦ φιλοσοφικοῦ του ἔργου. Ὁ Πλάτων ἔδωκε καὶ μιὰ παραλλαγὴ γιὰ τὸ παράδοξο τῆς διχοτομίας τοῦ Ζήνωνος, σύμφωνα μὲ τὸ ὁποῖον ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα οὔτε ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ συνιστάμενο ἀπὸ τὰ σημεῖα του, ἀλλ' οὔτε ἠμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὑφιστάμενο δίχως αὐτά. Ἡ δυνατότης διαιρέσεως ἑνὸς τέτοιου τμήματος χωρὶς τέλος, ὡδήγησε τὸν Πλάτωνα στὸ νὰ θεωρήσῃ τὸ ἄπειρον ὡς ἕνα συστατικὸ στοιχεῖο τοῦ συνεχοῦς. Τὴν πλατωνικὴ παραλλαγὴ ζητεῖ ὁ Σιμπλίκιος νὰ τὴν ἐκφράσῃ μὲ τὰ ἑξῆς: «Ἂν διχοτομήσῃ κανεὶς ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα, καὶ ὁποιοδήποτε ἀπὸ τὰ δύο μέρη τὸ διχοτομήσῃ πάλιν,

καὶ ἂν προσθέση (συνάψη) τὸ ἕνα ἀπὸ τὰ δύο μέρη τῆς τελευταίας διαιρέσεως στὸ μὴ διαιρεθὲν μέρος καὶ συνεχίση μὲ τὸ ἄλλο τὶς ἴδιες ἐργασίες διχοτομήσεως καὶ προσθήκης, εἰς τὸ ἄπειρον, τότε οὔτε μὲ τὶς διαδοχικὲς διχοτομήσεις θὰ φθάση ποτὲ σὲ μὴ διαιρετὰ τμήματα οὔτε μὲ τὶς διαδοχικὲς προσθῆκες θὰ συμπληρώση ὁλόκληρο τὸ ἀρχικὸ τμῆμα. Μὲ τὸν τρόπο αὐτὸν λαμβάνουν χώραν στὸ γραμμικὸ συνεχὲς δύο ἄπειρες προβάσεις, ἡ εἰς τὸ ἄπειρον διχοτόμησις καὶ ἡ εἰς τὸ ἄπειρον προσέγγισις τοῦ εὐθύγραμμου τμήματος»[23].

Φαίνεται ὅτι ὁ Πλάτων ἐζήτησε καὶ μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν νὰ εἰσαγάγη, γιὰ τὴν παραγωγὴ τοῦ συνεχοῦς καὶ γενικώτερα γιὰ τὴν παραγωγὴ τῶν ὄντων, μαζὶ μὲ τὴν ἀρχὴ τοῦ Ἑνός, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ σημεῖον, καὶ τὴν ἀρχὴ τῆς ἀορίστου Δυάδος, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ «μέγα καὶ μικρόν»[24].

8. Ἀπὸ τὸ γεγονός, ὅτι ὁ Ἀριστοτέλης δὲν συμφωνεῖ σὲ πλεῖστα σημεῖα μὲ τὴν θεωρία τοῦ Πλάτωνος ἀναφορικὰ μέ τὶς ἀρχὲς καὶ τὴν εὕρεσή τους, δὲν πρέπει νὰ νομισθῆ, ὅτι οἱ ἀπόψεις τῶν δύο φιλοσόφων ἀποκλίνουν βασικά. Ὁ Ἀριστοτέλης δέχεται πὼς κάθε συνεχὲς εἶναι ἐπ' ἄπειρον διαιρετό: *φανερὸν δὲ καὶ ὅτι πᾶν συνεχὲς διαιρετὸν εἰς αἰεὶ διαιρετά*[25]. Ὡστόσο, ὁ

---

23. Σιμπλ. *Εἰς Φυσ.* 453, 36 ἐπ., P. Wilpert, *Zwei aristotelische Frühschriften*, Regensburg 1949, 179.

24. Ὁ Πλάτων ὁδηγεῖται στὶς ἀρχὲς Ἓν καὶ ἀόριστος Δυὰς μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο: Ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὴν διάκριση (διαίρεση) τῶν ὄντων (ἀντικειμένων) σὲ δύο τάξεις. Ἡ πρώτη τάξη περιέχει τὰ *ὄντα καθ' ἑαυτὰ* (ὅπως ἄνθρωπος) καὶ λέγεται τάξη τῶν ἀπολύτως νοουμένων ὄντων, σύντομα ἀπόλυτη τάξη. Ἡ δεύτερη περιέχει τὰ *πρός τι ὄντα* καὶ λέγεται σχετικὴ τάξη. Τὰ σχετικὰ ἀντικείμενα τὰ διακρίνει ὁ Πλάτων πάλιν στὰ μεταξύ των ἀντίθετα (ὅπως ἴσον - ἄνισον) καὶ στὰ ὑπὸ στενὴ ἔννοια σχετικά, ἀλλιῶς κυρίως σχετικὰ (ὅπως μέγα - μικρόν). Τὴν διάκριση αὐτὴ τὴν κάνει ὡς ἑξῆς: Στὰ ζεύγη ἀπὸ ἀντιθέτους ὅρους κάθε ὅρος γεννιέται μὲ τὴν καταστροφὴ τοῦ ἄλλου, ἐνῶ σ' ἕνα κυρίως σχετικὸ ζεῦγος οἱ ὅροι γεννιοῦνται ἢ καταστρέφονται μαζί. Πέρα ἀπ' αὐτὸ σὲ κάθε ζεῦγος ἀντιθέτων ὅρων, μόνον γιὰ τὸν ἕναν ὅρον δὲν εἶναι ἐπιτρεπτὸς ὁ χαρακτηρισμὸς «πιὸ πολὺ ἢ πιὸ λίγο», ἐνῶ ὁ χαρακτηρισμὸς αὐτὸς ἐπιτρέπεται καὶ γιὰ τοὺς δύο ὅρους σὲ ζεῦγος κυρίως σχετικῶν ὅρων. Ὁ Πλάτων ὀνομάζει ὡρισμένους τοὺς ὅρους γιὰ τοὺς ὁποίους δὲν ἐπιτρέπεται ὁ ἄνω χαρακτηρισμός, ἀορίστους ἐκείνους γιὰ τοὺς ὁποίους ἐπιτρέπεται, καὶ μορφώνει δύο ὁλότητες, τὴν μιὰ ἀπὸ τοὺς ὡρισμένους ὅρους, στοὺς ὁποίους συνυπολογίζει καὶ τοὺς ἀπολύτους, καὶ τὴν ἄλλη ἀπὸ τοὺς ἀορίστους ὅρους. Κατὰ τὸν Πλάτωνα ὑπάρχουν ἀπόλυτες ὀντότητες *(ἰδέες)* ποὺ ἀντιστοιχοῦν καὶ στὶς δύο θεωρούμενες ὁλότητες. Ἡ ἀπόλυτη ὀντότητα ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν πρώτη ὁλότητα εἶναι τὸ Ἓν καὶ ἐκείνη ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν δεύτερη ὁλότητα εἶναι ἡ ἀόριστη Δυάς. (Σιμπλ. Φυσ. 247, 30 - 248, 15 καὶ E. Beth, The Foundations of Mathematics, Amsterdam 1968, 16).

25. Ἀριστοτέλης, *Φυσικὴ ἀκρόασις* Z 231b 15 - 16.

ἴδιος ἀπορρίπτει τὸ ὅτι μιὰ γραμμὴ ἠμπορεῖ νὰ διαιρεθῆ χωρὶς ὑπόλοιπο σὲ σημεῖα: *ἀδύνατον ἐξ ἀδιαιρέτων εἶναί τι συνεχές, οἷον γραμμὴν ἐκ στιγμῶν, εἴπερ ἡ γραμμὴ μὲν συνεχές, ἡ στιγμὴ δὲ ἀδιαίρετον*[26].

Λαμβάνοντες ὑπ' ὄψει τὸ κῦρος τοῦ Ἀριστοτέλους, ἠμπορεῖ κανεὶς νὰ πιθανολογήση τὸν λόγο ποὺ ἡ σύγχρονη Θεωρία τῶν Συνόλων, τόσο κοντὰ στὸ ἑλληνικὸ πνεῦμα τῆς ἀρχαιότητος, δὲν ἀναπτύχθηκε στὴν ἐποχὴ τῶν Ἑλλήνων, οὔτε ἀκόμη καὶ στὶς δύο χιλιετίες ποὺ ἀκολούθησαν, στὶς ὁποῖες ἀδιαφιλονίκητα κυριαρχοῦσε ἡ μορφὴ τοῦ Ἀριστοτέλους. Οἱ μαθηματικὲς ἀντιλήψεις τοῦ Ἀριστοτέλους τὸν δείχνουν, κατὰ τὸν W. D. Ross[27], νὰ ἔχη πολὺ περισσότερη μαθηματικὴ εὐστροφία ἀπ' ὅ,τι κοινῶς πιστεύεται[28]. Πρέπει νὰ τονισθῆ ὅτι ὁ Ἀριστοτέλης ἐπιχειρεῖ νὰ δώση ὁρισμὸ τοῦ συνεχοῦς βασίζοντάς τον στοὺς ὅρους *ἐφεξῆς, ἁπτόμενον ἢ ἐχόμενον, ἅμα, ἕν*. Ἡ διατύπωση τοῦ ὁρισμοῦ αὐτοῦ, ποὺ ἀφορᾶ εἰς τὸ φυσικὸ συνεχές, ἔχει ὡς ἑξῆς: *ἅμα μὲν οὖν λέγω ταῦτ' εἶναι κατὰ τόπον, ὅσα ἐν ἑνὶ τόπῳ ἐστὶ πρώτῳ, χωρὶς δὲ ὅσα ἐν ἑτέρῳ, ἅπτεσθαι δὲ ὧν τὰ ἄκρα ἅμα (ἐπεὶ δὲ πᾶσα μεταβολὴ ἐν τοῖς ἀντικειμένοις, τὰ δὲ ἀντικείμενα τά τε ἐναντία καὶ τὰ κατὰ ἀντίφασιν, ἀντιφάσεως δ' οὐδὲν ἀνὰ μέσον, φανερὸν ὅτι ἐν τοῖς ἐναντίοις ἔσται τὸ μεταξύ)... ἐφεξῆς δὲ οὗ μετὰ τὴν ἀρχὴν ὄντος ἢ θέσει ἢ εἴδει ἢ ἄλλῳ τινὶ οὕτως ἀφορισθέντος, μηδὲν μεταξύ ἐστι τῶν ἐν ταὐτῷ γένει... ἐχόμενον δὲ ὃ ἂν ἐφεξῆς ὂν ἅπτηται· τὸ δὲ συνεχὲς ἔστι μὲν ὅπερ ἐχόμενόν τι... καὶ ὥσπερ σημαίνει τοὔνομα συνέχηται*[29].

Ἐξ ἄλλου, εἰς τὸν Σιμπλίκιο συναντοῦμε τὸ ἑξῆς ὑπόμνημα: *ὥσπερ*

---

26. Ζ 231a 24 - 26.

27. W. D. Ross, *Aristotle's Physics,* Oxford 1936, 70.

28. Πρέπει νὰ τονισθῆ ὅτι γιὰ τὸν Ἀριστοτέλη, ὅπως καὶ γιὰ τὸν Ζήνωνα, τὸ συνεχὲς θεωρεῖται στὸν πραγματικὸ κόσμο. Εἶναι γνωστόν, ὅτι γιὰ τὸν Ἀριστοτέλη ἡ ἐσωτερικὴ δομὴ τοῦ πραγματικοῦ κόσμου βασίζεται σὲ ἀρχὲς ποὺ πρέπει νὰ ἐξαχθοῦν ἀπὸ τὸν ἴδιο τὸν κόσμο. Τὰ Μαθηματικὰ δὲν εἶναι πάντοτε τόση πιστὴ ἀπεικόνιση τῆς πραγματικότητος. Μεταξὺ αὐτῶν καὶ τῆς τελευταίας εὑρίσκονται οἱ Φυσικὲς Ἐπιστῆμες. Σὲ ἀντίθεση μὲ τὴν ἀντίληψη αὐτὴ εὑρίσκεται ἐκείνη, κατὰ τὴν ὁποία ὁ κόσμος, σὲ κάποια ἀπὸ τὶς θεωρήσεις του, προσαρμόζεται σὲ πλαίσιο ἀξιωμάτων ποὺ τὸν περιγράφουν κατὰ πεπλεγμένο τρόπο. Στὸ πλαίσιο αὐτὸ ἠμποροῦν ἐξ ἄλλου νὰ προσαρμοσθοῦν καὶ πολλοὶ ἄλλοι κόσμοι. Βλ. H. Freudenthal, *The implicit Philosophy of Mathematics today,* εἰς *Contemporary Philosophy* 1, Firenze 1972, 349.

29. Ὁ Ross ἀποδίδει τὸν ὁρισμὸ αὐτὸν ὡς ἑξῆς: Ἕνα ἀντικείμενο εἶναι ἐφεξῆς ἄλλου, ὅταν ἕπεται ἐκείνου σὲ κάποια ἀλληλουχία, χωρὶς νὰ ὑπάρχη τίποτε μεταξύ των τοῦ αὐτοῦ εἴδους. Δύο ἀντικείμενα εἶναι ἁπτόμενα ἢ ἐχόμενα ὄχι μόνον ὅταν δὲν ὑπάρχη κανένα ἄλλο τοῦ αὐτοῦ εἴδους μεταξύ των, ἀλλὰ καὶ ὅταν τὰ παρακείμενα ἄκρα τῶν δύο εἶναι ἅμα, δηλαδὴ δὲν ἔχουν τίποτε μεταξύ των. Ἕνα ἀντικείμενο εἶναι συνεχές, ὅταν τὰ συγκλίνοντα ἄκρα τῶν μερῶν του ὄχι μόνον εἶναι ἅμα ἀλλὰ ἕν. Βλ. καὶ τὴν μετάφραση τοῦ Κ. Γεωργούλη, *Ἀριστοτέλους Φυσικὴ ἀκρόαση,* Ἀθῆναι 1973, 150 (*Φυσ. ἀκρ.* Ε 226b 21 ἑπ.).

ἀπὸ τοῦ ἐφεξῆς καὶ τοῦ ἅπτεσθαι ἐγίνετο τὸ ἐχόμενον, οὕτως ἀπὸ τοῦ ἐχομένου τὸ συνεχές, ὅταν ἡ ἀφὴ τῶν ἐχομένων γένηται ἕνωσις· τοῦτο δὲ γίνεται, ὅταν τῶν ἁπτομένων τὰ πέρατα, δύο τέως ὄντα, συμφυέντα ἓν γένηται· τότε γὰρ οὐκέτι μένει ἁπτόμενα. δεῖ δὲ καὶ τὰ ἅπτεσθαι μέλλοντα ἀλλήλων συνεχῆ εἶναι· μεριστὰ γάρ, διότι τὰ ἀμερῆ οὐχ ἅψεται ἀλλήλων. φανερὸν οὖν ὅτι ἐν τούτοις ἐστὶ τὸ συνεχές, ἐξ ὧν ἕν τι πέφυκε γίνεσθαι κατὰ τὴν συναφήν[30].

9. Ἐτονίσαμε στὰ προηγούμενα, πὼς οἱ δοξασίες τοῦ Ἀριστοτέλους γιὰ τὸ συνεχές, ὅπως καὶ τὰ παράδοξα τοῦ Ζήνωνος, δὲν ἀφοροῦσαν στὰ καθαρὰ Μαθηματικά. Ὡστόσο, οἱ δοξασίες αὐτὲς ἦσαν ἀρκετὲς γιὰ νὰ θέσουν σὲ σοβαρὴ ἀμφιβολία τὴ θέση τῶν Μαθηματικῶν ὡς μιᾶς καθαρὰ παραγωγικῆς ἐπιστήμης. Τὸ ἀρχικὸ ἰδεῶδες τῶν Πυθαγορείων, ὅτι τὸ π ᾶ ν ε ἶ ν α ι (ἀκέραιος) ἀ ρ ι θ μ ό ς, βρέθηκε σὲ κ α τ α σ τ ρ ο φ ι κ ὴ κ ρ ί σ η μὲ τὴν ἐπινόηση ἀσυμμέτρων ποσοτήτων. Τὸ ἰδεῶδες αὐτὸ ἦλθαν νὰ διασώσουν, κατὰ τοὺς Hasse καὶ Scholz, ὁ Ἀντιφῶν (περ. 430 π.Χ.) καὶ ὁ Δημόκριτος (460; - 370;) μὲ τὴν εἰσαγωγὴ τῆς μ ε θ ό δ ο υ ἐ ξ α ν τ λ ή σ ε ω ς καὶ τῶν ἀ π ε ι ρ ο σ τ ῶ ν. Ὡστόσο, πρὸς τὴν ἄποψη αὐτή, ὅτι δηλαδὴ εἰσήχθη τότε ἕνα σύστημα Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ, φέρονται διαφωνοῦντες ἀρκετοὶ μαθηματικοί, παραδεχόμενοι μόνον ὅτι, στοὺς ἀντιπάλους αὐτοὺς τοῦ Ζήνωνος, ἠμπορεῖ κανεὶς νὰ ἀποδώση μιὰ ἀτομιστικὴ ἀντίληψη τοῦ συνεχοῦς. Ἀκριβῶς τὶς πολυαρχικὲς αὐτὲς τάσεις ἐπεδίωξε νὰ καταρρίψη ὁ Ζήνων ὁ Ἐλεάτης μὲ τὰ *παράδοξά* του, ὅπως καὶ στὰ προηγούμενα ἐτονίσαμε. Ἀκολουθεῖ ὁ Εὔδοξος (408; - 355;), ὁ ὁποῖος, μὲ τὴν Θεωρία τῶν Λόγων του, ἐζήτησε νὰ δαμάση τοὺς ἀσυμμέτρους μὲ τὴ βοήθεια τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Μὲ τὸν τρόπο αὐτὸν ἡ πρώτη κρίση γιὰ τὰ θεμέλια τῶν Μαθηματικῶν φάνηκε νὰ εἶχε παρακαμφθῆ.

Πολὺ ἀργότερα, ἀπὸ τὸ τέλος τοῦ 18ου μέχρι καὶ τὰ μέσα τοῦ 19ου αἰῶνος, ἐμφανίζεται ἡ δ ε ύ τ ε ρ η κ ρ ί σ η μὲ ἀφορμὴ τὴν πραγμάτευση τοῦ συνεχοῦς στὸν καθαυτὸ Ἀπειροστικὸ Λογισμό, ἡ ἐπινόηση τοῦ ὁποίου ἀποδίδεται ἀπὸ πολλοὺς στοὺς φιλοσόφους καὶ μαθηματικοὺς Leibniz (1646 - 1716) καὶ Newton (1642 - 1727). Πρέπει ἐδῶ γιὰ τὴν ἱστορικὴ ἀλήθεια νὰ τονισθῆ, πὼς ἀληθὴς πρωτοπόρος γιὰ τὸ μέρος ἐκεῖνο τοῦ Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ ποὺ λέγεται Ὁλοκληρωτικὸς (Ὡρισμένο Ὁλοκλήρωμα), ὑπῆρξε ὁ ἴδιος ὁ Ἀρχιμήδης (287; - 212), ἐνῶ ἡ συμβολὴ στὸν Λογισμὸ αὐτὸν τῶν Leibniz καὶ Newton πρέπει νὰ χαρακτηρισθῆ ὡς σημαντικὴ γενίκευση καὶ συστηματοποίηση τῶν μεθόδων τοῦ Ἀρχιμήδους. Ὡστόσο, ὅπως ἄλλοτε ἔτσι καὶ τώρα, στὸ ἐπίκεντρο τῆς νέας κρίσεως εὑρίσκεται ἡ συζήτηση γύρω ἀπὸ τὴ φύση τοῦ συνεχοῦς. Στὶς μακρὲς συζητήσεις, ποὺ

30. *Εἰς Φυσικὴν* 878, 13-19 Diels.

ἀκολούθησαν, τὸ στοιχεῖο ποὺ κυριαρχεῖ εἶναι βασικὰ ἡ κάθε φορὰ διάφορη τοποθέτηση τῶν συζητητῶν. Μὲ τὸν τρόπο αὐτόν, ἡ θεμελίωση τοῦ Ἀπειροστικοῦ παρουσιαζόταν ὡς ἕνα καθαρὰ φιλοσοφικὸ πρόβλημα, ἀπαράλλακτα ὅπως καὶ σήμερα ἡ θεμελίωση τῆς θεωρίας τῶν Συνόλων ἀποτελεῖ περισσότερο φιλοσοφικὸ παρὰ μαθηματικὸ πρόβλημα.

10. Ἀνάλογα μὲ ὅ,τι συνέβη στὴν ἀρχαιότητα, ἡ εἰσαγωγὴ ἀπείρως μικρῶν ποσοτήτων ἀπετέλεσε καὶ τώρα κατ' ἀρχὰς τὸ μέσον θεραπείας κατὰ τὴν ἵδρυση τοῦ Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ. Εἶναι ἐνδιαφέρον νὰ ἰδῆ κανεὶς τί ἀντιλήψεις ἐπικρατοῦσαν τότε γιὰ τὶς ποσότητες αὐτές, ποὺ ὅπως ξεύρομε ἀντιφάσκουν στὸ γνωστὸ αἴτημα τοῦ Ἀρχιμήδους (ἱστορικὰ ὀρθότερο τοῦ Εὐδόξου). Γιὰ τὸν Leibniz οἱ ἀπειροστὲς ποσότητες δὲν εἶναι πραγματικές, ὅπως εἶναι οἱ πραγματικοὶ ἀριθμοί, ἀλλὰ ἰδεατές, ὅπως οἱ φανταστικοὶ (κατὰ τὴν ἔκφραση τοῦ ἴδιου τοῦ Leibniz). Ὡστόσο, οἱ ἰδεατὲς αὐτὲς ποσότητες ὑπακούουν στοὺς νόμους τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν χάρη σὲ μιὰ μεταφυσικὴ ἀρχὴ διατηρήσεως τῶν νόμων. Παρὰ ταῦτα, γιὰ τὸν Leibniz ἡ μέθοδός του δὲν διαφέρει στὴν οὐσία ἀπ' ἐκείνη τῶν ἀρχαίων Ἑλλήνων κατὰ τὶς πρῶτες προσπάθειες κατανικήσεως τῆς πρώτης κρίσεως, δηλαδὴ ἀπὸ τὴ μέθοδο ἐξαντλήσεως. Ἡ μέθοδος αὐτή, μαζὶ μὲ τὴ θεωρία τῶν Λόγων, ἔδωσε στοὺς Ἕλληνας τὸ μέσον γιὰ τὴν ἀντιμετώπιση τοῦ προβλήματος τοῦ συνεχοῦς. Ὁ Leibniz, γιὰ νὰ δώση ἕνα μεταφυσικὸ στοιχεῖο ὡς βάση ἑνὸς κόσμου ἀπολύτων ὄντων, συνέλαβε τὴν ἰδέα τῶν μονάδων. Ὁ ἴδιος λέγει σὲ μιὰ ἐπιστολή του: «Στὸ ἰδεατὸ ἢ τὸ συνεχὲς τὸ ὅλον προηγεῖται τοῦ μέρους... Τὰ μέρη εἶναι ἐδῶ μόνον δυνάμει. Στὰ πραγματικὰ ὅμως ἀντικείμενα (δηλαδὴ σ' αὐτὰ ποὺ ἔχουν ὑπόσταση) τὸ ἁπλὸ προηγεῖται τῆς ὁλότητος καὶ τὰ μέρη εἶναι ἐνεργείᾳ, διδόμενα πρὸ αὐτῆς τῆς ὁλότητος. Οἱ σκέψεις αὐτὲς αἴρουν τὶς δυσκολίες ἀναφορικὰ μὲ τὸ συνεχὲς — δυσκολίες ποὺ προκύπτουν στὴν περίπτωση μόνο ποὺ ἤθελε θεωρήση κανεὶς τὸ συνεχὲς σὰν κάτι πραγματικό πού, προτοῦ διαιρεθῆ ἀπὸ μᾶς, ἔχει πραγματικὰ μέρη»[31]. Ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος, ὁ Newton χρησιμοποιεῖ ἄλλοτε τὴν ἔννοια τῆς ροῆς, ἄλλοτε τὶς διαρκῶς ἐξαφανιζόμενες ποσότητες γιὰ νὰ χαρακτηρίση τὶς ἀπειροστὲς ποσότητες, παίρνοντας γιὰ τὸν σκοπὸ αὐτὸ μιὰ φυσικὴ ἔννοια. Ὡστόσο, πρόκειται καὶ ἐδῶ γιὰ ποσότητες ποὺ κεῖνται μεταξὺ τοῦ μηδενὸς καὶ ἑνὸς ὁποιουδήποτε θετικοῦ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ, πρᾶγμα ποὺ ἀντίκειται στὸ μνημονευθὲν αἴτημα τοῦ Ἀρχιμήδους.

Βέβαια, πρέπει νὰ παραδεχθοῦμε πὼς καὶ ὁ Leibniz καὶ ὁ Newton διαι-

31. Leibniz, *Philosophische Schriften* 3, 622.

σθάνονταν, ὅτι κατὰ τὴν μόρφωση τέτοιων ἀσαφῶν ἐννοιῶν, ποὺ τελικὰ ὁδηγοῦν σὲ ἄτοπα, ὑπῆρχαν πολλὰ σκοτεινὰ καὶ λογικῶς τρωτὰ σημεῖα. Ὅμως γιὰ τὴ διασάφησή των καὶ τὴ θεμελίωση τοῦ Ἀπειροστικοῦ σὲ ἀσφαλῆ βάση, κανεὶς ἀπὸ τοὺς δύο αὐτοὺς μαθηματικοὺς δὲν ἠμπόρεσε νὰ ἐπιτύχη ὅ,τι πρὸ αὐτῶν ὁ Εὔδοξος γιὰ τὴν ἔξοδο ἀπὸ τὴν πρώτη κρίση. Πολὺ πιθανὴ εἶναι ἡ εἰκασία πὼς ἡ συνείδηση γιὰ τὴν ὕπαρξη τέτοιων ἀντιφάσεων καὶ τρωτῶν ἔκαμε τὸν Newton πολὺ διστακτικὸ γιὰ τὴ δημοσίευση τῶν ἰδεῶν του πού, ὡς γνωστόν, πραγματοποιήθηκε ὕστερα ἀπό μεγάλη καθυστέρηση.

11. Τὴ θέση τοῦ Εὐδόξου γιὰ τὴν ὑπερνίκηση τῆς δεύτερης αὐτῆς κρίσεως παίρνουν, στὸν 19ο αἰῶνα, κυρίως οἱ μαθηματικοὶ A. L. Cauchy (1789 - 1857) καὶ C. Weierstrass (1815-1897), ποὺ ἐπεχείρησαν τὴν αὐστηρὴ ἵδρυση τῶν ἀσυμμέτρων στὴ γενική τους ἔκταση. Γιὰ ἕνα μικρὸ διάστημα ἀπὸ τότε ἡ ἀριθμοποίηση τοῦ γεωμετρικοῦ συνεχοῦς, ποὺ ἔγινε ἀπὸ τὴν ἐργασία τῶν δύο αὐτῶν μαθηματικῶν, θεωρήθηκε ὡς τὸ ἀποφασιστικὸ βῆμα γιὰ τὴν ὁριστικὴ ἀπαλλαγὴ τοῦ συνεχοῦς ἀπὸ τὰ ἀνεπιθύμητα ἐνορατικὰ στοιχεῖα του. Δὲν ἄργησαν, ὡστόσο, νὰ ἐκδηλωθοῦν καὶ πάλιν ἀμφιβολίες σχετικὰ μὲ τὴν ὀρθότητα καὶ τῶν νέων μεθόδων, ποὺ σέ τελευταία ἀνάλυση ἐπιζητοῦσαν τὴν πραγμάτευση τοῦ ἀπείρου μὲ τὸ πεπερασμένο.

Ὁπωσδήποτε, καὶ ἡ πλήρης ἀριθμοποίηση τοῦ συνεχοῦς, ποὺ ἐπετεύχθηκε μὲ τὸν γενικὸ ὁρισμὸ τοῦ ἀσυμμέτρου, στὴν πραγματικότητα δὲν ἦταν παρὰ μιὰ ἁπλῆ ἀριθμητικὴ ε ἰ κ ό ν α τοῦ γεωμετρικοῦ συνεχοῦς σὲ τρόπο, ὥστε στὸ βάθος νὰ παραμείνη τὸ γεωμετρικὸ ὑπόστρωμα. Ὁ Γάλλος μαθηματικὸς J. Cavaillès λέγει σχετικά: «Φάνηκε πὼς ἡ ἀριθμοποίηση ποὺ ἔγινε στὸν 19ο αἰῶνα ἐπέτυχε νὰ δώση ἕνα ὁρισμὸ (τοῦ συνεχοῦς) ἀπαλλαγμένο ἀπὸ κάθε ἐνορατικὸ στοιχεῖο. Γιὰ μιά, ὅμως, πιὸ ἐπισταμένη κριτικὴ ἐξέταση παραμένει ἡ ἀμφιβολία, ἀπὸ τὸ ἕνα μέρος ἂν ἕνας τέτοιος ἰσχυρισμὸς εἶναι δικαιολογημένος, δηλαδὴ κατὰ πόσον ἡ πραγματικὴ ἔννοια τοῦ ὁρισμοῦ δὲν χρησιμοποιεῖ συγκεκαλυμμένως ἐνορατικὰ στοιχεῖα τῆς ἀμέσου ἐποπτείας καί, ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος, ἂν δὲν ὑπάρχη στὸν ὁρισμὸ αὐτὸν περισσότερο ἀ π ε ι κ ό ν ι σ η παρὰ ἀ ν α γ ω γ ή, δηλαδὴ κατὰ πόσον πραγματικὰ δὲν βρίσκεται στὴν βάση μιὰ λανθάνουσα γεωμετρικὴ εἰκόνα, ποὺ θεμελιώνει τὴν μοναδικότητα καὶ τὴν ἑνότητα ἐκείνου ποὺ παριστάνει, σὲ ἀναφορὰ μὲ ἀριθμητικὲς σχέσεις παρμένες τυχαῖα σὲ μιὰ ἐξωγενῆ δέσμευση»[32]. Ἡ ἀποφυγὴ τέτοιων γεωμετρικῶν εἰκόνων ὑπῆρξε ἀκριβῶς ὁ σκοπὸς τοῦ R. Dedekind (1831 - 1916), ποὺ προσπάθησε νὰ ἑδραιώση τοὺς πραγματι-

32. J. Cavaillès, *Philosophie mathematique,* Paris (Histoire de la Pensée) 1963, 255.

κοὺς ἀριθμοὺς ἐπάνω σὲ ἔννοιες τῆς Λογικῆς, καὶ ὁ στόχος τοῦ G. Cantor (1845 - 1918), ποὺ τὸν ἴδιο σκοπὸ τὸν ἀνεζήτησε στὴν Θεωρία τῶν Συνόλων, αὐτῆς ποὺ ὁ ἴδιος ὑπῆρξε ὁ δημιουργός.

Ἀπὸ τὸ ἕνα μέρος γιὰ τὸν Dedekind ἡ ἀνάλυση τῶν σχέσεων τοῦ χώρου (καὶ τοῦ χρόνου) ἔπρεπε, κατ' ἀντίθετη φορά, νὰ ζητηθῇ στὸ λογικὸ οἰκοδόμημα τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν καὶ μ' αὐτὸ στὴν ἔννοια τοῦ συνεχοῦς, ὡς τῆς ὁλότητος τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν. Ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος γιὰ τὸν Cantor ἡ ἀνάλυση τοῦ συνεχοῦς ἔπρεπε νὰ γίνῃ μὲ γενικώτερες μεθόδους, ὅπως ἡ διαγώνιος μέθοδος κ.ἄ., καὶ μὲ βάση τὶς ἔννοιες τῆς διατάξεως καὶ τοῦ πλήθους τῶν σημείων ἀπὸ τὰ ὁποῖα ὑποτίθεται συνιστάμενο ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα στὸν εὐκλείδειο χῶρο.

12. Πῶς ὅμως ἔπρεπε νὰ ὁρισθοῦν ἡ διάταξη καὶ τὸ πλῆθος γιὰ ἕνα ὄχι πεπερασμένο σύνολο σημείων; Ὁ Cantor, γενικεύοντας ὅ,τι συμβαίνει στὰ πεπερασμένα σημειοσύνολα, ἐργάσθηκε ὡς ἑξῆς: Τὴν ἔννοια τῆς διατάξεως τὴν ἐστήριξε στὴ σχέση τοῦ προηγεῖσθαι (ἢ τοῦ ἕπεσθαι), ποὺ ὑπακούει στοὺς νόμους τῆς ἀσυμμετρίας, τῆς ἀναντανακλαστικότητος, τῆς μεταβατικότητος καὶ τῆς ἀντικαταστάσεως. Ὅταν ὁρίζεται μιὰ τέτοια σχέση γιὰ κάθε ζεῦγος στοιχείων ἑνὸς συνόλου—ποὺ ἠμπορεῖ ἀδιαφόρως νὰ εἶναι ἕνα ἀφηρημένο σύνολο, ἕνα σημειοσύνολο ἢ ἀριθμοσύνολο—τότε ὁ Cantor λέγει τὸ σύνολο διατεταγμένο. Δύο διατεταγμένα σύνολα εἶναι ὅμοια στὴν περίπτωση ποὺ ἠμπορεῖ νὰ βρεθῇ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν στοιχείων τους[33], τέτοια ποὺ νὰ διατηρῇ τὴ σχέση τοῦ προηγεῖσθαι. Ἡ τάξη (κλάση) τῶν μεταξύ τους ὁμοίων συνόλων, ὅπως καὶ κάθε ἀντιπρόσωπος τῆς τάξεως, φέρει τὸ ὄνομα τύπος τοῦ συνόλου. Τὸν τύπο τοῦ συνόλου τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν γραμμένων κατὰ τὴ φυσικὴ διάταξη (μὲ προηγούμενο τὸν μικρότερο) τὸν συμβολίζει ὁ Cantor μὲ τὸ ἑλληνικὸ γράμμα ω. Ὁ τύπος αὐτὸς διαφέρει ἀπὸ ἐκεῖνον τοῦ ἰδίου συνόλου μὲ διάταξη ὅμως τὴν ἀντίστροφη τῆς φυσικῆς (τύπος ἀντίστροφος τοῦ ω). Ἕνα διατεταγμένο σύνολο εἶναι καλῶς διατεταγμένο στὴν περίπτωση ποὺ κάθε ὄχι κενὸ ὑποσύνολό του ἔχει στοιχεῖο πρῶτο, δηλαδὴ τέτοιο ποὺ νὰ μὴν προηγεῖται αὐτοῦ ἄλλο στὸ ὑποσύνολο. Ἔτσι καλῶς διατεταγμένα εἶναι τὰ σύνολα τοῦ τύπου ω, ἐνῶ δὲν εἶναι τοῦ ἀντιστρόφου τύπου. Τακτικὸ ἀριθμό, σύντομα ἁπλῶς τακτικό, ὀνομάζει ὁ Cantor τὴν τάξη τῶν μεταξύ τους ὁμοίων καὶ καλῶς διατεταγμένων συνό-

33. Ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία τῶν στοιχείων δύο συνόλων λέμε τὴν ἀντιστοιχία, ὅταν σὲ κάθε στοιχεῖο τοῦ ἑνὸς συνόλου ἀντιστοιχῇ ἕνα στοιχεῖο τοῦ ἄλλου συνόλου καί, ἀντιστρόφως, κάθε στοιχεῖο τοῦ τελευταίου αὐτοῦ συνόλου εἶναι ἀντίστοιχο ἑνὸς μόνον στοιχείου τοῦ πρώτου συνόλου.

λων. Εὔκολα βλέπει κανεὶς πὼς οἱ φυσικοὶ ἀριθμοὶ εἶναι, μὲ αὐτὴ τὴν ἔννοια, τακτικοὶ ἀριθμοί· εἶναι οἱ πεπερασμένοι τακτικοὶ σὲ ἀντιδιαστολὴ πρὸς τοὺς ὑπερπεπερασμένους (transfinite). Σ' αὐτοὺς φθάνει ὁ Cantor μὲ βάση τὴν ἀρχή: Ἂν ἔχομε σύνολο ἀπὸ τακτικοὺς ἀριθμούς, ποὺ ἔχει τὴν ἰδιότητα μαζὶ μὲ ἕνα τακτικὸ νὰ ὑπάρχουν στὸ σύνολο καὶ ὅλοι οἱ μικρότεροί του, τότε τὸ σύνολο αὐτό, διατεταγμένο κατὰ τὸ «μέγεθος τῶν τακτικῶν», εἶναι καλῶς διατεταγμένο καὶ ὁ τακτικὸς ἀριθμὸς ποὺ ἀνήκει στὸ ἐν λόγω σύνολο εἶναι ὁ ἐλάχιστος τακτικὸς ποὺ εἶναι μεγαλύτερος ἀπὸ κάθε τακτικὸ τοῦ συνόλου. Ἀναφορικὰ μὲ τὸ μέγεθος τῶν τακτικῶν, ποὺ μνημονεύσαμε, αὐτὸ ὁρίζεται ὡς ἑξῆς: Σ' ἕνα καλῶς διατεταγμένο σύνολο, τὸ ὑποσύνολο τῶν στοιχείων του ποὺ προηγοῦνται ἀπὸ δοθὲν στοιχεῖον τοῦ συνόλου, τὸ λέμε ἀπόκομμα τοῦ (καλῶς διατεταγμένου) συνόλου (ποὺ ἀνήκει στὸ δοθὲν στοιχεῖο), Τὸν τακτικὸ τοῦ ὑπ' ὄψει συνόλου τὸν λέμε μεγαλύτερο ἀπὸ τὸν τακτικὸ κάθε ἀποκόμματος, ὅπως καὶ ἀντιστρόφως τὸν τακτικὸ κάθε ἀποκόμματος τοῦ συνόλου τὸν λέμε μικρότερο ἀπὸ τὸν τακτικὸ τοῦ συνόλου. Ἀμέσως μεγαλύτερος τακτικοῦ εἶναι ὁ τακτικὸς τοῦ συνόλου ὅλων τῶν τακτικῶν ποὺ εἶναι μικρότεροι ἐκείνου (συμπεριλαμβανομένου τοῦ 0 ὡς τακτικοῦ τοῦ κενοῦ συνόλου) καὶ ποὺ μὲ τὴν διάταξη μεγέθους εἶναι καλῶς διατεταγμένο σύνολο.

Μὲ βάση τὴν ἔννοια τῆς διατάξεως καὶ ἐκείνην τῆς τομῆς ἔχομε τὸν κατὰ Dedekind χαρακτηρισμὸ τοῦ κλειστοῦ γραμμικοῦ συνεχοῦς σημειοσυνόλου μὲ τὶς ἑξῆς ἰδιότητες: Εἶναι τὸ διατεταγμένο σημειοσύνολο, μὲ πρῶτο καὶ τελευταῖο σημεῖο, ὅπου κάθε τομὴ δὲν παρουσιάζει κενὸ ἢ πήδημα καὶ ὅπου ὑπάρχει ἀριθμήσιμο ὑποσύνολό του τέτοιο ὥστε μεταξὺ δύο ὁποιωνδήποτε σημείων τοῦ συνόλου νὰ ὑπάρχῃ πάντοτε σημεῖο τοῦ ὑποσυνόλου.

13. Γιὰ τὴν ἄλλη βασικὴ ἔννοια τοῦ πλήθους, ἀλλιῶς τοῦ πληθικοῦ ἀριθμοῦ (σύντομα ἁπλῶς πληθικοῦ), ὁ Cantor ἀνεχώρησε ἀπὸ τὴν ἔννοια τῆς ἰσοδυναμίας. Δύο σύνολα τὰ ὠνόμασε ἰσοδύναμα, ὅταν μεταξὺ τῶν στοιχείων τους ἠμπορεῖ νὰ βρεθῆ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία. Ἡ ἰσοδυναμία ποὺ ὁρίζεται μὲ τὸν τρόπο αὐτὸν (ἀνεξάρτητη ἀπὸ τὴν τυχὸν ὑπάρχουσα διάταξη τῶν στοιχείων τοῦ συνόλου), εἶναι φανερὸν πὼς ἔχει τὶς ἰδιότητες τῆς ἰσότητος, δηλαδὴ τὴν ἀντανακλαστική, τὴν συμμετρικὴ καὶ τὴν μεταβατική. Εἶναι ἀκόμη φανερὸν πὼς στὴν ἔννοια τῆς ὁμοιότητος «περιέχεται» ἐκείνη τῆς ἰσοδυναμίας. Μὲ βάση τὴν ἰσοδυναμία, ἕνα σύνολο εἶναι ἄπειρο στὴν περίπτωση ποὺ ὑπάρχει κύριο ὑποσύνολό του ἰσοδύναμο μὲ τὸ ἀρχικό. Στὴν ἐναντία περίπτωση τὸ σύνολο εἶναι πεπερασμένο. Ὡς πληθικὸ ἀριθμὸ ἐκάλεσεν ὁ Cantor τὴν τάξη τῶν μεταξύ τους ἰσοδυνάμων συνόλων, ποὺ ἀντιπροσωπεύεται ἀπὸ κάθε σύνολο τῆς

τάξεως. Σὲ πεπερασμένα σύνολα πληθικὸς εἶναι, ὡς φανερόν, ὁ φυσικὸς ἀριθμὸς ποὺ δηλώνει τὸ σύνηθες πλῆθος τῶν στοιχείων του, σὲ τρόπο ὥστε ὁ πληθικὸς ἀποτελεῖ γενίκευση τοῦ τελευταίου αὐτοῦ πλήθους. Ἡ σύγκριση ὡς πρὸς τὸ μέγεθος τῶν πληθικῶν γίνεται μὲ βάση τὸν ὁρισμό : Ὁ πληθικὸς συνόλου εἶναι μικρότερος ἀπὸ τὸν πληθικὸ ἄλλου συνόλου, ὅταν τὸ πρῶτο σύνολο εἶναι ἰσοδύναμο μὲ ὑποσύνολο τοῦ δευτέρου, ἀλλὰ τὸ δεύτερο δὲν εἶναι ἰσοδύναμο μὲ ὑποσύνολο τοῦ πρώτου.

Ἕνα σύνολο ἰσοδύναμο μὲ τὸ σύνολο τῶν φυσικῶν λέγεται ἀριθμήσιμο, ἀλλιῶς ἀπαριθμητό, καὶ ὁ πληθικός του παριστάνεται μὲ τὸ ἀρχικὸ γράμμα τοῦ φοινικικοῦ-ἑβραϊκοῦ ἀλφαβήτου ἄλεφ, μὲ δείκτη κάτω δεξιὰ τὸ μηδέν, προφέρεται δὲ σύντομα ἄλεφ-μηδέν. Τὸ ἀριθμητικὸ συνεχές, ὡς σύνολο τῶν πραγματικῶν μεταξὺ δύο ὡρισμένων πραγματικῶν, ἀποδεικνύεται πὼς δὲν εἶναι ἀριθμήσιμο· ἔχει πληθικὸ μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ ἄλεφ-μηδὲν γιατὶ περιέχει τοὺς φυσικούς, ἐνῶ δὲν εἶναι ἀριθμήσιμο. Τὸν πληθικὸ τοῦ συνεχοῦς, τὸν παρέστησεν ὁ Cantor μὲ τὸ ἄλεφ, δίχως δείκτη.

14. Τὰ καλῶς διατεταγμένα σύνολα εἶναι συγκρίσιμα ὄχι μόνον ὡς πρὸς τοὺς τακτικούς των (δύο τέτοια σύνολα ἢ εἶναι ὅμοια ἢ τὸ ἕνα εἶναι ὅμοιο μὲ ἀπόκομμα τοῦ ἄλλου) ἀλλὰ καὶ ὡς πρὸς τοὺς πληθικούς των (δύο τέτοια σύνολα ἢ ἔχουν ἴσους πληθικοὺς ἢ ὁ ἕνας εἶναι μικρότερος τοῦ ἄλλου). Μένει ὅμως ἀκόμη ἀνοικτὸ τὸ ἐρώτημα, ἂν σὲ κάθε μὴ πεπερασμένο σύνολο ἠμπορεῖ νὰ εὑρεθῇ ἰσοδύναμό του καλῶς διατεταγμένο σύνολο. Τὴν θετικὴ ἀπάντηση στὸ ἐρώτημα αὐτὸ τὴν δίνει ἡ λεγομένη «πρόταση τῆς καλῆς διατάξεως», ποὺ λέγει πὼς κάθε σύνολο ἠμπορεῖ νὰ διαταχθῇ καλῶς. Ἀκριβῶς γιὰ τὴν ἀπόδειξη τῆς προτάσεως αὐτῆς εἰσήγαγε ὁ E. Zermelo (1871 - 1953) τὴν ἀρχὴ τῆς ἐπιλογῆς[34]. Μὲ βάση τὴν πρόταση τῆς καλῆς διατάξεως διαπιστώνομε, πὼς δύο σύνολα εἶναι πάντοτε συγκρίσιμα ὡς πρὸς τὴ σχέση τῆς ἰσοδυναμίας καὶ πὼς σὲ κάθε πληθικὸ ὑπάρχει ὁ ἀμέσως μεγαλύτερός του, πρᾶγμα ποὺ σημαίνει πὼς δὲν ὑπάρχει πληθικὸς ἐνδιάμεσός τους. Ἔτσι, ὁ πληθικὸς κάθε συνόλου βρίσκεται στὴν καταγραφὴ τῶν πληθικῶν ποὺ θὰ κάναμε κατὰ τὴν τάξη μεγέθους τους καὶ ποὺ συνήθως κάνομε ἐπὶ γραμμῆς ἀπὸ τὰ ἀριστερὰ πρὸς τὰ δεξιά.

Ἡ εἰκασία τοῦ Cantor ὅτι δὲν ὑπάρχει πληθικὸς μεταξὺ τοῦ ἄλεφ-μηδὲν καὶ τοῦ ἄλεφ (μεγαλύτερος τοῦ πρώτου καὶ μικρότερος τοῦ δευτέ-

34. Πρέπει νὰ σημειωθῇ ὅτι ἀπὸ τὸν K. Goedel ἀποδείχθηκε τὸ 1954, πὼς ἡ ἀρχὴ τῆς ἐπιλογῆς, ἀπαραίτητη γιὰ τὴν ἀπόδειξη τῆς προτάσεως αὐτῆς, εἶναι ἀξίωμα συμβιβαστὸ μὲ ὅλα τὰ λοιπὰ ἀξιώματα τῆς θεωρίας τῶν Συνόλων γιὰ τὰ ὁποῖα θὰ ὁμιλήσωμε στὰ παρακάτω (ὑπὸ τὴν προϋπόθεση φυσικά, ὅτι συμβιβαστὰ εἶναι τὰ λοιπὰ αὐτὰ ἀξιώματα).

ρου), ἔλαβε τὴν ὀνομασία ὑ π ό θ ε σ η, ἀλλιῶς π ρ ό β λ η μ α τ ο ῦ σ υ ν ε χ ο ῦ ς καὶ ἀπετέλεσεν ἕνα ἀπὸ τὰ πιὸ περίφημα προβλήματα τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων. Γιατί, μὲ τὴν ὑπόθεση αὐτὴ θὰ εἴχαμε ἕνα τρόπο νὰ προσπελάσωμε τὸ συνεχὲς μὲ τὸ διακεκριμένο καὶ ἡ γεφύρωση μεταξὺ συνεχοῦς καὶ ἀσυνεχοῦς θὰ εἶχε πραγματοποιηθῆ — γεφύρωση γιὰ τὴν ὁποία εὐθὺς ἀπὸ τὴν ἀρχὴ ἐκάναμε λόγο. Τὸ ἴδιο πρόβλημα τοῦ συνεχοῦς ἐπιδέχεται καὶ τὴν ἰσοδύναμη διατύπωση, ὅτι δηλαδὴ ἕνα μὴ πεπερασμένο ὑποσύνολο τοῦ συνεχοῦς ἔχει πληθικὸ ἢ τὸ ἄλεφ-μηδὲν ἢ τὸ ἄλεφ. Γιὰ δοθὲν σύνολο ἀποδεικνύεται ὅτι ὁ πληθικὸς τοῦ συνόλου ὅ λ ω ν τῶν ὑποσυνόλων του εἶναι πάντοτε μεγαλύτερος ἀπὸ αὐτὸν τὸν πληθικὸ τοῦ συνόλου, ὅπως καὶ ὅτι ὁ πληθικὸς ποὺ λαμβάνεται μὲ τὸν τρόπο αὐτὸν ἀπὸ ἕνα ἀπαριθμητὸ σύνολο εἶναι ἴσος μὲ ἄλεφ.

Σὲ ποιὰ ὅμως σχέση εὑρίσκεται ἡ καταγραφή, κατὰ τάξη μεγέθους, τῶν πληθικῶν, ποὺ λαμβάνομε μὲ βάση τὴν πρόταση τῆς καλῆς διατάξεως, συγκρινόμενη μὲ τὴν καταγραφὴ τῶν πληθικῶν γιὰ τὰ σύνολα ποὺ λαμβάνομε ἀρχίζοντες π.χ. ἀπὸ τὸ ἀπαριθμητὸ σύνολο τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν καὶ μορφώνοντες, κάθε φορά, τὸ σύνολο ὅλων τῶν ὑποσυνόλων τοῦ προηγουμένου συνόλου; Τὴν ἀπάντηση στὸ ἐρώτημα γιὰ τοὺς δύο πρώτους ὅρους τῆς ἐν λόγω καταγραφῆς θὰ τὴν ἔδινε ἡ ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς, στὴν περίπτωση φυσικὰ ποὺ τυχὸν ἡ ὑπόθεση αὐτὴ ἦταν ἀληθής. Ἡ ἀπάντηση θὰ εἶχε τότε ὡς ἑξῆς: Ὁ πληθικὸς ποὺ εἶναι ἀμέσως μεγαλύτερος ἀπὸ τὸ ἄλεφ-μηδὲν εἶναι ὁ πληθικὸς τοῦ συνόλου ὅλων τῶν ὑποσυνόλων τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν, δηλαδὴ ἄλεφ. Γιὰ τοὺς λοιποὺς ὅρους τῆς καταγραφῆς θὰ χρησίμευε ἡ λεγομένη γ ε ν ι κ ε υ μ έ ν η ὑ π ό θ ε σ η (ἀλλιῶς π ρ ό β λ η μ α) τ ο ῦ σ υ ν ε χ ο ῦ ς, ὅτι δηλαδὴ ὁ πληθικὸς τοῦ συνόλου ὅλων τῶν ὑποσυνόλων γιὰ ἕνα ὁποιοδήποτε σύνολο μὲ πληθικὸ ἄλεφ μὲ κάποιο δείκτη, εἶναι τὸ ἄλεφ μὲ δείκτη κατὰ μονάδα μεγαλύτερο τοῦ δείκτου ἐκείνου, καὶ αὐτὸ πάλιν στὴ περίπτωση ποὺ καὶ ἡ γενικευμένη αὐτὴ ὑπόθεση θὰ ἦταν ἀληθής.

15. Προτοῦ δώσωμε ἀπάντηση γιὰ τὸ ὀρθὸ ἢ ὄχι τῆς γενικευμένης ὑποθέσεως τοῦ συνεχοῦς, θεωροῦμε σκόπιμο νὰ συσχετίσωμε τὴν σύγχρονη ἄποψη γιὰ τὸ μ έ τ ρ ο ἑνὸς σημειοσυνόλου μὲ ἐκείνη τοῦ Ζήνωνος, σύμφωνα μὲ τὴν ὁποία, ὅπως εἴπαμε στὴν παράγ. 2, «ἄθροισμα» ἀπὸ μηδενικὰ μεγέθη δὲν ἠμπορεῖ νὰ δώση μέγεθος διάφορο ἀπὸ τὸ μηδέν. Ἔτσι θὰ ἰδοῦμε πῶς μὲ τὴν παραδοχὴ τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων (ὅτι ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα συντίθεται ἀπὸ σημεῖα, καὶ τὴν γενίκευση τῆς ἐννοίας τοῦ μ ή κ ο υ ς διαστήματος σὲ ὁποιαδήποτε σημειοσύνολα) ἐπιτυγχάνομε νὰ ἄρωμε[35] τὸ ἄτοπο ὅπου ὁδηγεῖ ἡ ἐπιχειρηματολογία τοῦ Ἐλεάτου.

35. Βλ. παραγρ. 15.

Τὴν γενίκευση γιὰ τὸ μῆκος, τὴν δίνει ἡ ἐπινόηση ποὺ ἔκανε τὸ 1902 ὁ Γάλλος μαθηματικὸς H. Lebesgue (1875 - 1941) μὲ τὴ Θεωρία τοῦ Μέτρου καὶ πού, σὲ συντομία, θὰ ἠμποροῦσε νὰ σκιαγραφηθῆ ὡς ἑξῆς: Θεωροῦμε ἕνα σημειοσύνολο (σύντομα σύνολο) ποὺ περιέχεται σὲ κλειστὸ διάστημα (εὐθύγραμμο τμῆμα μαζὶ μὲ τὰ ἄκρα του), καὶ ἕνα σύστημα ἀπὸ ἀπαριθμητὰ τὸ πολὺ διαστήματα (μὲ μερικὴ τυχὸν ἐπικάλυψη) ἔτσι, ὥστε κάθε σημεῖο τοῦ συνόλου νὰ εἶναι στοιχεῖο τοῦ συστήματος. Γιὰ τὸν λόγο αὐτόν, τὸ σύστημα διαστημάτων τὸ λέμε σύστημα ἐπικαλύψεως. Παίρνομε ὕστερα τὸ ὁλικὸ μῆκος τῶν διαστημάτων ποὺ ἀπαρτίζουν τὸ σύστημα ἐπικαλύψεως. Τὸ ὁλικὸ αὐτὸ μῆκος εἶναι πεπερασμένο ἢ ἄπειρο. Τὸ κάτω πέρας[36] τῶν ὁλικῶν μηκῶν γιὰ ὅλα τὰ δυνατὰ συστήματα ἐπικαλύψεως τὸ λέμε ἐξωτερικὸ μέτρο τοῦ συνόλου ποὺ θεωροῦμε. Τὸ ἐσωτερικὸ μέτρο, γιὰ τὸ ἴδιο σύνολο, τὸ ὁρίζομε ὡς τὴν διαφορὰ τοῦ ἐξωτερικοῦ μέτρου τοῦ συμπληρωματικοῦ συνόλου (αὐτοῦ ποὺ ἔχει σημεῖα ὅλα τὰ σημεῖα τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος ποὺ δὲν ἀνήκουν στὸ ἀρχικὸ σύνολο), ἀφαιρουμένου ἀπὸ τὸ μῆκος τοῦ εὐθυγράμμου τμήματος.

Εἶναι εὔκολο νὰ ἰδῆ κανεὶς πὼς τὸ ἐσωτερικὸ μέτρο συνόλου εἶναι πάντοτε μικρότερο ἢ τὸ πολὺ ἴσον μὲ τὸ ἐξωτερικὸ μέτρο τοῦ αὐτοῦ συνόλου. Στὴν περίπτωση ποὺ τὰ δύο μέτρα εἶναι ἴσα (τὸ ἐξωτερικὸ μὲ τὸ ἐσωτερικό), τότε τὸ σύνολο τὸ λέμε μετρήσιμο καὶ τὴν κοινὴ τιμή, κατὰ Lebesgue, μέτρο τοῦ συνόλου. Μιλώντας γιὰ μέτρο συνόλου ἐξυπακούεται πὼς τὸ σύνολο εἶναι μετρήσιμο. Σύμφωνα μὲ τὸν ὁρισμὸ ποὺ δώσαμε, τυχὸν διάστημα (ἀνοικτὸ ἢ κλειστὸ) ἔχει μέτρο καὶ αὐτὸ εἶναι τὸ σύνηθες μῆκος του. Ἰσχύει καὶ ὅτι τὸ συνένωμα πεπερασμένου ἢ ἀπαριθμητοῦ πλήθους ἀπὸ μετρήσιμα σύνολα εἶναι πάλιν μετρήσιμο· στὴν περίπτωση ποὺ τὰ ἐν λόγω μετρήσιμα σύνολα εἶναι ἀνὰ δύο ξένα, τότε τὸ μέτρο τοῦ συνενώματός τους εἶναι ἴσον μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν μέτρων τῶν ὅρων τοῦ συνενώματος.

Μὲ βάση τὴν τελευταία πρόταση καὶ τὸ γεγονὸς ὅτι ἕνα σημεῖο ἔχει μέτρο τὸ 0, συμπεραίνουμε ὅτι κάθε πεπερασμένο ἢ ἀπαριθμητὸ σύνολο ἔχει μέτρο τὸ 0. Σύνολα ἄρα μὲ μέτρο διάφορο τοῦ 0 πρέπει νὰ εἶναι μὴ ἀπαριθμητά, χωρὶς ὅμως νὰ συμβαίνη καὶ τὸ ἀντίστροφο. Στὸ ἐρώτημα τώρα, ἂν ὅλα τὰ σύνολα ἔχουν μέτρο, ἡ ἀπάντηση εἶναι ἀρνητικὴ καὶ γιὰ τὴν ἀπάντηση αὐτὴν χρησιμεύει τὸ ἀξίωμα ἐπιλογῆς τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων. Ὅπως βλέπομε, στὴ Θεωρία Μέτρου ποὺ ἐκθέσαμε ἀποφεύγεται τὸ παράδοξο τοῦ Ζήνωνος γιὰ τὰ πολλά, ἂν τὸ θεωρήσωμε ἀπὸ καθαρὰ μαθηματικὴ ἄποψη.

---

36. Φ. Βασιλείου, *Μαθήματα Ἀνωτέρων Μαθηματικῶν* 1, Ἀθῆναι 1950, 12.

16. Θεωροῦμε τώρα ἀπαραίτητες μερικὲς κριτικὲς παρατηρήσεις στὴ θεωρία τοῦ Cantor. Στὴ βασικὴ ἔννοια τῆς θεωρίας, τὴν ἔννοιαν τοῦ συνόλου ὡς πρωταρχικήν, δὲν ἠμπορεῖ νὰ δοθῆ ἀκριβὴς ὁρισμός, σὲ τρόπο ὥστε τὸ νόημά της δὲν εἶναι μονοσήμαντα καθωρισμένο. Αὐτὸ συμπεραίνεται καὶ ἀπὸ τὶς ἀποκλίνουσες σημασίες ποὺ ἀποδόθηκαν στὸ σύνολο, ἀκόμη καὶ ἐξ ἀρχῆς ποὺ ἀναπτύχθηκε ἡ θεωρία[37]. Πρῶτος ὁ Zermelo, παρακάμπτοντας τὸ ἀνέφικτο ἑνὸς ἀμέσου ὁρισμοῦ γιὰ τὴν πρωταρχικὴ αὐτὴ ἔννοια, εἰσήγαγε τὴν ἀ ξ ι ω μ α τ ι κ ὴ δόμηση τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων μὲ τὴν νεώτερη ἐκδοχὴ τῶν ἀξιωμάτων, ὅπως αὐτὴ διαμορφώθηκε ἀπὸ τὸν D. Hilbert (1862 - 1943), καὶ μὲ τὸν τρόπο αὐτὸν ἐγκαινίασε τὶς ἔρευνες πρὸς τὴν κατεύθυνση αὐτή. Ἡ ἀξιωματικοποίηση αὐτὴ χρησίμευσε καὶ γιὰ τὴν ἀποφυγὴ τῆς ἄλλης δυσυπέρβλητης δυσκολίας ποὺ παρουσιάσθηκε, στὰ πρῶτα σχεδὸν βήματα τῆς θεωρίας, μὲ τὴν ἐμφάνιση τῶν π α ρ α δ ό ξ ω ν ἢ ἀ ν τ ι ν ο μ ι ῶ ν. Ὕστερα ἀπὸ τὰ παράδοξα τοῦ Ζήνωνος τοῦ Ἐλεάτου, εὑρισκόμεθα στὴν πρώτη σοβαρὴ κατάσταση ποὺ δημιούργησαν οἱ νέες καὶ πολὺ πιὸ οὐσιώδεις ἀ ν τ ι φ ά σ ε ι ς στὴν ἱστορία τῆς σκέψεως. Γιατὶ οἱ ἀντινομίες τοῦ καθαροῦ λόγου τοῦ Kant (1724 - 1804), καὶ τὰ παράδοξα τοῦ ἀπείρου τοῦ B. Bolzano (1781 - 1848), ποὺ προηγήθηκαν, ἦσαν στὴν πραγματικότητα πολὺ μικρότερης σημασίας.

Παρὰ ταῦτα σήμερα κανένα ἀπὸ τὰ συστήματα ἀξιωμάτων, ποὺ ἔκτοτε ἐπροτάθησαν γιὰ τὴ δόμηση τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων, δὲν ἔγινε γενικὰ παραδεκτό. Ἐξ ἄλλου, ὅπως θὰ ἰδοῦμε, ὑπάρχουν ὁλόκληρες Σχολὲς ποὺ ἀντιμετωπίζουν τὴν θεωρία ἀπὸ τελείως διάφορη σκοπιά. Ἂς μὴ νομισθῆ, ὅμως, πὼς ἀπὸ τὶς ἀποκλίσεις αὐτὲς ἐπηρεάσθηκε, τὸ παραμικρό, ἡ μεγάλη σημασία ποὺ δίκαια ἀποδόθηκε στὴ Θεωρία τῶν Συνόλων. Πολλοὶ διεῖδαν σ' αὐτὴν τὴν ἀποκλειστικὴ δυνατότητα γιὰ τὴν ἀσφαλῆ θεμελίωση ὁλοκλήρου τοῦ οἰκοδομήματος τῶν Μαθηματικῶν. Εἶναι ἰδιαίτερα ἀξιοσημείωτο τὸ γεγονός, ὅτι πολλὲς μαθηματικὲς ἔννοιες δημιουργοῦνται καὶ ἑρμηνεύονται μέσα στὸ πλαίσιο τῆς θεωρίας αὐτῆς.

Ἡ πρώτη ἀξιωματικοποίηση τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων ἀπὸ τὸν Zermelo συμπληρώθηκε ἀργότερα ἀπὸ τὸν A. Fraenkel (1891 - 1967) (τὸ συμπληρωμένο σύστημα ἀξιωμάτων παριστάνεται σύντομα μὲ τὰ ἀρχικὰ ZF). Ἀκολούθησαν ὅμως καὶ ἄλλα συστήματα τέτοιων ἀξιωμάτων, ὅπως π.χ. ἐκεῖνο τῶν Neumann - Bernays (σύντομα NB). Πρέπει νὰ παρατηρηθῆ, πὼς ἐκεῖνο ποὺ κυρίως ἐπεδίωξεν ὁ Cantor μὲ τὴν θεω-

---

37. O. Becker, *Grundlagen der Mathematik in geschichtlicher Entwicklung*, München 1954, 316. Στὴν ἀλληλογραφία μεταξὺ Cantor καὶ Dedekind βλέπομε, ὅτι ὁ πρῶτος ἔδινε στὸ σύνολο τὸ μεταφυσικὸ νόημα μιᾶς ἀβύσσου, ἐνῶ ὁ δεύτερος τὸ θεωροῦσε σὰν «ἕνα σάκκο μὲ ἄγνωστα πράγματα».

ρία του ἦταν ἡ ἐξερεύνηση τοῦ ἐνεργείᾳ ἀπείρου, αὐτοῦ ποὺ μὲ τόση ἐπιμονὴ ἀπέκλειαν, ἀπὸ τὸν Ἀριστοτέλη καὶ ἔπειτα, ὅλοι οἱ πρὶν ἀπὸ τὸν Cantor μαθηματικοί. Καὶ πάλιν, ἐκεῖνο ποὺ προέχει στὴν ἐπιδίωξη αὐτὴν εἶναι τὸ πρόβλημα γιὰ τὴ φύση τοῦ συνεχοῦς. Ἀφετηρία εἶναι τὸ ἕτοιμο, τὸ τελειωμένο, σύνολο ἀπὸ ἄπειρα τὸ πλῆθος στοιχεῖα. Τὸ πρόβλημα συνίσταται ἀκριβῶς στὸν τρόπο ποὺ θὰ τὸ εἰσαγάγη κανεὶς στὰ Μαθηματικά. Ἐκτὸς ἀπὸ τὴν Ἀξιωματικὴ σημειώσαμε πιὸ πάνω ὅτι δημιουργήθηκαν καὶ ἄλλες μέθοδοι γιὰ τὸν λόγο αὐτόν.

Ὅπως καὶ στὰ προηγούμενα ἐτονίσαμε, τὸ πρόβλημα γιὰ τὸ συνεχὲς ἔχει ὡς ἀντικείμενο τὴ γεφύρωση τοῦ χάσματος ποὺ τὸ χωρίζει ἀπὸ τὸ διακεκριμένο. Ὁ Cantor μὲ τὴ θεωρία του ἐπεζήτησε τὴν προσπέλαση τοῦ πρώτου μὲ τὸ δεύτερο. Ὑπάρχει ὅμως καὶ ἡ δυνατότης τῆς ἀντίθετης πορείας, νὰ θεωρήση δηλαδὴ κανεὶς τὸ συνεχὲς ὡς πρωταρχικὴ ἔννοια καὶ ξεκινώντας ἀπ' αὐτὴν νὰ ζητήση νὰ δομήση τὸ ἀσυνεχές. Τέτοιες τάσεις δὲν ἔλειψαν ὁλότελα ἀπὸ τὴν ἀρχαιότητα καὶ τὰ ἴχνη τους τὰ ἐπισημαίνομε σαφῶς σήμερα στὴν λεγόμενη Ἐνορατικὴ Σχολή.

17. Ὅπως παρατηρήσαμε ἤδη, ἕνα σύστημα ἀπὸ ἀξιώματα γιὰ τὴ Θεωρία τῶν Συνόλων πρέπει νὰ ἀποβλέπη, μεταξὺ ἄλλων, στὴ μετάβαση ἀπὸ τὸ πεπερασμένο στὸ ὑπερπεπερασμένο, δηλαδὴ στὸ ἐνεστωτικὸ ἄπειρο. Ἔτσι, κοντὰ στὰ λεγόμενα κατασκευαστικὰ ἀξιώματα, ποὺ περιλαμβάνουν καὶ τὸ ἀξίωμα τῆς ἐπιλογῆς, ἔχομε τὰ ἀξιώματα γιὰ τὸ ἄπειρο. Μὲ τὰ ἀξιώματα αὐτὰ εἰσάγονται, ἀπὸ τὸ ἕνα μέρος ἡ ὑποθετικὴ ὕπαρξη γιὰ ὡρισμένα, κατάλληλα κατασκευασμένα, σύνολα, ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος ἡ ὑπαρξιακὴ παραδοχή, ποὺ ἐξασφαλίζει τὴν ὕπαρξη κάποιου συνόλου ἐνεργείᾳ ἀπείρου. Συνήθως παριστάνομε μὲ ZF′ τὸ σύστημα ἀξιωμάτων Zermelo - Fraenkel δίχως τὸ ἀξίωμα ἐπιλογῆς καὶ μὲ ΥΣ ἢ ΓΥΣ τὴν ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς ἀντιστοίχως τὴν γενικευμένη ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς.

Εἶναι γενικὰ παραδεκτό, πὼς ἕνα ἀπὸ τὰ μεγάλα γεγονότα γιὰ τὴ Θεωρία τῶν Συνόλων, κι' ἕνα ἀπὸ τὰ πιὸ σημαντικὰ κατὰ τὴν τελευταία δεκαετία γιὰ ὅλα τὰ Μαθηματικά, ἦταν ἡ ἀπόδειξη ποὺ ἐπέτυχε τὸ 1963 ὁ P. J. Cohen, ὅτι ἡ γενικευμένη ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς ἀποτελεῖ πρόταση ἀνεξάρτητη ἀπὸ τὰ ἄλλα ἀξιώματα, δηλαδὴ μὴ ἀποδείξιμη ἀπὸ αὐτά[38]. Ἡ ἀπόδειξη αὐτὴ στάθηκε ἡ ἀφορμὴ στὸ νὰ δοθῆ (Μόσχα 1966) στὸν ἐπινοητή της τὸ Fields - Medaille, ἡ πιὸ μεγάλη διάκριση ποὺ δίνεται σὲ μαθηματικοὺς ἐρευνητὰς στὰ διεθνῆ μαθηματικὰ συνέδρια καὶ ποὺ γιὰ τὰ Μαθηματικὰ εἶναι τὸ ἀνάλογο τοῦ βραβείου Nobel. Ἔτσι βρῆκε τὴ

38. P. J. Cohen, *The independence of the continuum hypothesis* 1 (Proceedings of the National Academy of Sciences of the USA, 50) 1963, 1143-8 καὶ 2 (51) 1964, 105-110.

λύση του ἕνα ἀκόμη ἀπὸ τὰ περίφημα προβλήματα, ποὺ στὴν ἀρχὴ τοῦ αἰῶνος μας, μὲ τὴν εὐκαιρία τοῦ πρώτου διεθνοῦς μαθηματικοῦ Συνεδρίου (Παρίσιοι 1900), ἐξήγγειλεν ὁ D. Hilbert (1862 - 1943) ὡς τὰ κατ' ἐξοχὴν πρὸς λύσιν προτεινόμενα.

Τὸ ἐπίτευγμα τοῦ Cohen ἀποτελεῖ ἕνα παράδειγμα γιὰ τὸ γνωστὸ γεγονὸς ὅτι ὁποιαδήποτε ἀξιώματα τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων, ἐφ' ὅσον περιλαμβάνουν τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς, δὲν εἶναι π λ ή ρ η. Παρὰ ταῦτα, τὸ ὅτι ἀκριβῶς ἡ ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς ἀποτελοῦσε ἕνα τέτοιο παράδειγμα γιὰ τὴν ἔλλειψη πληρότητος, ἦταν κάτι ποὺ ἀσφαλῶς κανεὶς δὲν ἐπερίμενε. Ἴσως τοῦτο νὰ ὀφείλεται καὶ στὴ προηγηθεῖσα ἀπόδειξη, τόσον ἀπὸ τὸν K. Goedel (1900 -)[39] ὅσον καὶ ἀπὸ τὸν ἴδιον τὸν Cohen, ὅτι ἡ γενικευμένη ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς ἦταν πρόταση συμβιβαστὴ μὲ τὰ ἄλλα ἀξιώματα NB, ἀπόδειξη ποὺ ἐπετεύχθη μὲ τὴν κατασκευὴ καταλλήλου π ρ ο τ ύ π ο υ (μοντέλου). Σ' ἕνα τέτοιο πρότυπο ἔχει κανεὶς τὴν δυνατότητα νὰ ἐκλέξη, μὲ ἀρκετὴ ἐλευθερία, ἕνα πληθικὸ ὕστερα ἀπὸ τὸ ἄλεφ - μηδέν, ποὺ θὰ ἤθελε νὰ ἐ π ι β ά λ η στὸ συνεχές. Ἐξ ἄλλου, τέτοια πρότυπα μᾶς εἶναι χρήσιμα ὄχι μόνον ὡς ἀποδείξεις ἀνεξαρτησίας ἀξιωμάτων, ἀλλὰ καὶ γιὰ τὴν ἐξακρίβωση τῶν δυνατοτήτων ποὺ ὑποκρύπτει ἡ ἀπὸ τὴν ἐνόραση διδόμενη ἔννοια τοῦ συνόλου. Ἂς σημειωθῆ εἰς τὸ σημεῖο αὐτό, πῶς ὁ ἴδιος ὁ Cantor εἶχε συνείδηση τόσο γιὰ τὴν ἀσάφεια τῆς ἐν λόγω ἐννοίας, ὅσο καὶ γιὰ τὶς δυνατὲς ἑρμηνεῖες ποὺ ἡ ἔννοια αὐτὴ ἠμποροῦσε νὰ δεχθῆ. Μὲ τὸ νόημα αὐτὸ ἡ ἔκφραση τοῦ ἰδίου, ὅτι σ' ἕνα σύνολο διέβλεπε μιὰ ὁλόκληρη ἄβυσσο, ἀποδείχθηκε ἀπὸ τὰ πράγματα πὼς δὲν στερεῖται δόση ἀληθείας. Ὡστόσο, εἶναι συζητήσιμο κατὰ πόσον ὁ Cantor θὰ ἔβλεπε μὲ ἱκανοποίηση τὴν ἔκβαση ποὺ πῆρε τὸ «ὄνειρο τῆς ζωῆς του», —ποὺ γι' αὐτὸν ἦταν ἡ ἀπόδειξη τῆς ὀρθότητος τῆς ὑποθέσεώς του—, στὴν περίπτωση, φυσικά, ποὺ ἡ ἀνεξαρτησία τῆς ὑποθέσεώς του ἀπὸ τὰ ἄλλα ἀξιώματα ἤθελε διαπιστωθῆ ὅταν ἀκόμη ὁ ἴδιος εὑρισκόταν στὴ ζωή. Γνωρίζομε πόσες ἀνεπιτυχεῖς προσπάθειες κατέβαλεν ὁ Cantor γιὰ τὴν πραγμάτωση τοῦ ὀνείρου του, προσπάθειες ποὺ τὸν ὡδήγησαν στὸ κατῶφλι τῆς ἀπογνώσεως καὶ τῆς γενικῆς καταρρεύσεως.

18. Ἀποτέλεσμα τῆς ἀποδείξεως γιὰ τὸ ἀνεξάρτητο τῆς (γενικευμένης) ὑποθέσεως τοῦ συνεχοῦς ἀπὸ τὰ ἄλλα ἀξιώματα τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων ἦταν νὰ ἐμφανισθοῦν στὴ θεωρία αὐτὴ δ ι α κ λ α δ ώ σ ε ι ς παρόμοιες μὲ ἐκεῖνες ποὺ εἶχαν ἄλλοτε παρουσιασθῆ στὴν Γεωμετρία μὲ τὴν ἀπόδειξη τῆς ἀνεξαρτησίας τοῦ ἀξιώματος τῶν παραλλήλων ἀπὸ τὰ λοιπὰ ἀξιώματα,

---

39. K. Goedel, *The consistency of the continuum hypothesis,* Ann. Math. Studies No 3 (1940, 1951²).

καὶ ποὺ ὡδήγησε τότε στὴν δημιουργία τῶν λεγομένων μὴ Εὐκλειδείων Γεωμετριῶν. Γεννᾶται ὅμως τώρα ἕνα ἀκόμη πιὸ σημαντικὸ ζήτημα : Ποιὰ θὰ εἶναι, ἄραγε, ἡ σημασία τῶν διακλαδώσεων τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων γι' αὐτὴν τὴν ἴδια τὴν θεμελίωση τῶν Μαθηματικῶν; Εἶναι ἀλήθεια πὼς γιὰ ὅλους ἐκείνους ποὺ δυσπιστοῦσαν παλαιότερα σὲ ὀντολογικὲς παραδοχὲς ἀναφορικὰ μὲ τὰ ἄπειρα σύνολα, οἱ ὑπ' ὄψει διακλαδώσεις προσθέτουν ἕνα ἰσχυρὸ ἐπιχείρημα γιὰ τὴν ἄποψή τους. Ἴσως μᾶς εἰποῦν τώρα, πὼς παρόμοιες διακλαδώσεις πρέπει νὰ ἀναμένωνται καὶ σ' ἄλλες μαθηματικὲς περιοχές, περιοχὲς ποὺ ἔμεναν μακρυὰ ἀπὸ κάθε τέτοια ὑπόνοια.

Ὡστόσο, ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὸ ἂν κάτι τέτοιο ἤθελε συμβῆ, θὰ ἔχωμε κάθε δικαίωμα νὰ ὁμιλοῦμε εἰς τὸ μέλλον γιὰ μιὰ ἀπὸ τὶς πολλὲς Θεωρίες τῶν Συνόλων, ἀπαράλλακτα ὅπως τοῦτο γίνεται σήμερα γιὰ τὶς ὁ μ ά δ ε ς ἢ γιὰ τοὺς ἀλγεβρικοὺς δ α κ τ υ λ ί ο υ ς κ.ἄ. Ὁδηγεῖ, ἄραγε, αὐτὸ σὲ μιὰ πλήρη ἀναρχία σχετικὰ μὲ τὴ θεμελίωση τῶν Μαθηματικῶν; Κατὰ τὸν A. Robinson «ὑπάρχουν ὡρισμένοι βασικοὶ τύποι σκέψεως ποὺ βρίσκονται πρὶν ἀπὸ κάθε ἐκλογὴ μαθηματικῶν ἀξιωμάτων. Ἴσως, ἀπὸ τὶς σημερινὲς δυσκολίες νὰ ξεπηδήση μιὰ πιὸ βαθειὰ κατανόηση γιὰ ἕνα κ ο ι ν ὸ πυρῆνα σὲ ὅλα τὰ Μαθηματικά»[40]. Ὁπωσδήποτε, βέβαιο εἶναι, πὼς εἰς τὸ ἑξῆς καμμιὰ ἀπὸ τὶς διακλαδωμένες θεωρίες τῶν Συνόλων δὲν θὰ ἠμπορεῖ νὰ διεκδικῆ τὸ προνόμιο τῆς πραγματικὰ ἀληθοῦς, ἀκριβῶς ὅ,τι συμβαίνει σήμερα καὶ μὲ τὶς διάφορες Εὐκλείδειες καὶ μὴ Εὐκλείδειες Γεωμετρίες.

19. Ἂς ρίξωμε ὅμως μιὰ ματιὰ καὶ στὴν ἄποψη ἐκείνων ποὺ ἀντιμετωπίζουν τὸ συνεχὲς ἀπὸ μιὰ διαφορετικὴ σκοπιά. Πρόκειται γιὰ τοὺς ὀπαδοὺς τῆς λεγομένης Ἐνορατικῆς Σχολῆς μὲ ἀρχηγὸ τὸν L.E.J. Brouwer (1881 - 1966). Ὁ Brouwer στὸ ξεκίνημα τῆς θεωρίας του, ποὺ ἀποσκοποῦσε στὸ νὰ συλλάβη τὴν οὐσία τῶν Μαθηματικῶν ἀπὸ τὴν ἀνάλυση τῆς ἴδιας τῆς σκέψεως καὶ κατέφυγεν ἔτσι στὴν ριζικὴ ἀναμόρφωση τῶν παραδοσιακῶν Μαθηματικῶν, ὑπέστη ἀρχικὰ τὴν ἐπίδραση τοῦ G. Mannoury (1867 - 1956). Ἡ κυρία ἀπόκλιση μεταξύ τους βρίσκεται στὸ γεγονός, ὅτι ἐνῶ ὁ Mannoury εἶχε πάντοτε στὴν ἔρευνά του μιὰ κοινωνιολογικὴ τάση, ἀντίθετα ὁ Brouwer θεωροῦσε τὰ Μαθηματικὰ καθ' ἑαυτὰ καὶ ὄχι σὰν ἕνα κοινωνικὸ φαινόμενο[41]. Ἐξ ἄλλου, ὑπάρχει μιὰ φανερὴ ἀναλογία ἀνάμεσα στὶς ἀπόψεις τοῦ Brouwer καὶ τῆς λεγομένης Θ ε τ ι κ ι σ τ ι κ ῆ ς Σχολῆς, ποὺ ἀποκηρύσσει κάθε μεταφυσικὴ (ὀντολογικὴ) θέση καὶ δέχεται ὡς πραγματικὸ μόνον ὅ,τι ἠμπορεῖ νὰ γίνη γνωστὸ μὲ τὴ βοήθεια τῆς ἐπαισθήσεως.

---

40. I. Lakatos (Ed.), *Problems in the Philosophy of Mathematics*, Amsterdam 1967, 104.

41. Φ. Βασιλείου, *Λογική, Γλῶσσα καὶ Μαθηματικά*, «Φιλοσοφία» 2 (1972) 69, σημ. 18.

Εἶναι γνωστό, πὼς ἡ ὕπαρξη γιὰ τὰ μαθηματικὰ ἀντικείμενα ταυτίζεται γιὰ τοὺς ἐνορατικοὺς μὲ τὴν κ α τ α σ κ ε υ ή τους. Σχεδὸν ὅλα τὰ Μαθηματικὰ τὰ βασίζουν αὐτοὶ στὴν ἔννοια τοῦ φυσικοῦ ἀριθμοῦ, ποὺ οἱ ἴδιοι τὴν θεωροῦν σὰν κάτι ποὺ μᾶς δίνει ἡ ἐνόραση. Μετὰ τοὺς φυσικοὺς ἀριθμούς, ἐκεῖνο ποὺ παίρνει κεντρικὴ θέση στὴ διδασκαλία τῶν Ἐνορατικῶν εἶναι ἡ ἄλλη σημαντικὴ γι' αὐτοὺς ἔννοια, ἡ ἔννοια τοῦ συνεχοῦς. Οἱ Ἐνορατικοὶ κατασκευάζουν τὸ (κλειστὸ) γραμμικὸ συνεχὲς ὡς ἑξῆς: Ἀναχωροῦν ἀπὸ τὰ διάφορα μεταξύ τους δ υ α δ ι κ ὰ κλάσματα, π.χ. τὰ μεταξὺ 0 καὶ 1, δηλαδὴ τὰ μικρότερα τοῦ 1 θετικὰ κλάσματα ποὺ ἔχουν παρονομαστὴ φυσικὴ δύναμη τοῦ 2, τὰ ὁποῖα κατατάσσουν κατὰ τὰς δυνάμεις τοῦ παρονομαστοῦ καὶ γιὰ τὸν ἴδιο παρονομαστὴ κατὰ τὴν τάξη μεγέθους τοῦ ἀριθμητοῦ. Στὴν ἀλληλουχία τῶν δυαδικῶν αὐτῶν κλασμάτων προτάσσουν τοὺς ἀριθμοὺς 0 καὶ 1. Ἕνας πραγματικὸς ἀριθμὸς παράγεται μὲ τὸν προσδιορισμό, σὲ κάθε δυαδικὸ κλάσμα, τοῦ κατηγορήματος ἀ ρ ι σ τ ε ρ ὸ ἢ δ ε ξ ι ό, ποὺ ἠμπορεῖ νὰ ἐκλεγῆ μὲ τρόπο, ὥστε ἂν σ' ἕνα τέτοιο κλάσμα δοθῆ τὸ κατηγόρημα ἀριστερὸ ἢ δεξιό, τότε καὶ σὲ κάθε κλάσμα τῆς ἀλληλουχίας (μικρότερό του, ἀντιστοίχως μεγαλύτερό του) πρέπει νὰ δοθῆ τὸ κατηγόρημα ἀριστερὸ ἀντιστοίχως δεξιό. Στὴν περίπτωση ποὺ δὲν δίδεται σ' ἕνα κλάσμα τῆς ἀλληλουχίας ὡρισμένο κατηγόρημα, τότε τὸ κατηγόρημα γιὰ τὰ μεγαλύτερά του θὰ εἶναι τὸ δεξιὸ καὶ γιὰ τὰ μικρότερά του τὸ ἀριστερό. Γιὰ τὴν παραγωγὴ ἑνὸς συγκεκριμένου πραγματικοῦ ἀριθμοῦ ὁ προσδιορισμὸς γίνεται μὲ βάση κάποιο ν ό μ ο, μὲ μιὰ τὸ πολὺ ἐξαίρεση, σὲ τρόπο ὥστε νὰ μὴ ὑπάρχη ὁποιαδήποτε ἐλευθερία στὴν ἐκλογὴ τῶν κατηγορημάτων. Ἂν ὅμως δώσωμε στὸ 0 τὸ κατηγόρημα ἀριστερὸ καὶ στὸ 1 τὸ κατηγόρημα δεξιό, τότε ὁ προσδιορισμὸς αὐτὸς δὲν ἐπηρεάζει τὴν ἐλεύθερη ἐκλογὴ κατηγορήματος γιὰ τὰ δυαδικὰ κλάσματα τὰ μεγαλύτερα τοῦ 0 καὶ τὰ μικρότερα τοῦ 1. Ἔτσι ἔχομε, κατὰ τοὺς Ἐνορατικούς, τὸ σύνολο τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν στὸ κλειστὸ διάστημα ἀπὸ 0 ἕως 1. Στὴν περίπτωση ποὺ ἀντὶ 0 καὶ 1 εἴχαμε δυὸ πραγματικοὺς ἀριθμοὺς α καὶ β (μὲ α μικρότερο τοῦ β), τότε τὸ κλειστὸ διάστημα ἀπὸ α ἕως β ἠμπορεῖ νὰ ὁρισθῆ ὡς ἑξῆς: Κάθε δυαδικὸ κλάσμα ποὺ στὴ παραγωγὴ τοῦ α ἔχει τὸ κατηγόρημα ἀριστερό, διατηρεῖ τὸ κατηγόρημα αὐτό, ὅπως καὶ κάθε δυαδικὸ κλάσμα ποὺ στὴν παραγωγὴ τοῦ β ἔχει τὸ κατηγόρημα δεξιό, διατηρεῖ τὸ κατηγόρημα αὐτό. Πλὴν αὐτοῦ, ἔχομε πλήρη ἐλευθερία στὴν ἐκλογὴ τῶν κατηγορημάτων γιὰ τὰ θεωρούμενα δυαδικὰ κλάσματα. Ἂν ἐξαιρέσωμε τὶς δύο ἀκραῖες περιπτώσεις, δηλαδὴ ἐκείνη ποὺ ὁ νόμος προσδιορισμοῦ τῶν κατηγορημάτων περιορίζει πλήρως τὴν ἐλευθερία ἐκλογῆς καὶ ἐκείνη ποὺ ἀφήνει πλήρη ἐλευθερία (μὲ ἐξαίρεση φυσικὰ τὸν περιορισμὸ σχετικὰ μὲ τὴ τάξη μεγέθους τῶν δυαδικῶν κλασμάτων), ὑπάρχει ἡ δυνατότης ὁ νόμος αὐτὸς νὰ ἀφήνη κάποια ἐλευθερία ἐκλογῆς, ὅταν ὁρίζεται ἕνα σύνολο πραγματικῶν ἀριθμῶν.

Ὅπως βλέπει κανεὶς ἀπὸ τὰ ἀνωτέρω, οἱ Ἐνορατικοὶ ὁμιλοῦν γιὰ τὸ π ῶ ς παράγεται ἕνας πραγματικὸς ἀριθμὸς, ὄχι ὅμως γιὰ τὸ τ ί εἶναι ὁ ἐν λόγῳ ἀριθμός. Ἐξ ἄλλου, ἀντὶ τῶν κατηγορημάτων ἀριστερὸ ἢ δεξιό, εἶναι δυνατὸν νὰ θεωρηθοῦν διαστήματα μὲ ἄκρα δυαδικὰ κλάσματα καὶ ἡ παραγωγὴ πραγματικοῦ ἀριθμοῦ νὰ γίνη ἀπὸ ἀλληλουχία διαστημάτων πού, ἀπὸ τὸ δεύτερο κι ἔπειτα, καθένα τους νὰ εἶναι κύριο ὑποδιάστημα τοῦ προηγουμένου.

20. Ἐκεῖνο ποὺ χαρακτηρίζει τὴν θέση τῶν Ἐνορατικῶν εἶναι, κυρίως, οἱ κ α τ α σ κ ε υ έ ς. Ἀπὸ αὐτὲς προκύπτει κάθε π α ρ α δ ε κ τ ὴ μαθηματικὴ πρόβαση, ὅπως ἐκείνη ὅπου ἕνα συγκεκριμένο πραγματικὸ ἀριθμὸ τὸν ὁρίζει ἕνας ν ό μ ο ς. Ὁ Brouwer ἰσχυρίζεται πὼς εἶναι δυνατὸς ἕνας ἀ π ό λ υ τ ο ς ὁρισμὸς γιὰ τὴν μαθηματικὴ κατασκευή. Οὔτε ὅμως ὁ ἴδιος οὔτε κανεὶς ἀπὸ τοὺς ὀπαδούς του δὲν καθώρισε ἐπακριβῶς τί εἶναι μαθηματικὴ κατασκευή. Σὲ ἀπόκλιση ἀπὸ τὸ αἴτημα τῆς κατασκευῆς τὸ συνεχὲς δὲν λαμβάνεται στὴν Ἐνορατικὴ Σχολὴ ἀπὸ ὁποιαδήποτε κατασκευή, ἀλλὰ ἀπὸ ἀλληλουχίες ἐλεύθερης ἐκλογῆς. Αὐτὸ δικαιολογεῖται μὲ τὸν ἰσχυρισμό, ὅτι τὸ συνεχὲς δὲν εἶναι κάτι τὸ τελειωμένο. Τὸ συνεχές, ἔτσι ὅπως ὁρίζεται ἀπὸ τοὺς Ἐνορατικούς, εἶναι τ ε λ ε ί ω ς δ ι ά φ ο ρ ο ἀπὸ ἐκεῖνο τοῦ Cantor καί, φυσικά, ἀπὸ ὅ,τι ἐννοοῦσαν οἱ μαθηματικοὶ πρὶν ἀπὸ τὸν Brouwer. Ἐκτὸς ἀπ' αὐτό, τὸ μ ὴ ἀ π α ρ ι θ μ η τ ὸ ἄ π ε ι ρ ο τῆς κλασσικῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων δὲν ἔχει θέση στὶς ἀπόψεις τῶν Ἐνορατικῶν.

Ἂς σημειωθῇ ἐδῶ, ὅτι ἡ ἐλεύθερη ἐκλογὴ τῶν ἀλληλουχιῶν στὴν παραγωγὴ τοῦ συνεχοῦς, εἶναι ἐκείνη ποὺ ἀποδεσμεύει, κατὰ τοὺς Ἐνορατικούς, τὸ ἄπειρο ἀπὸ τὴν ἔννοια τοῦ νόμου. Ἀκόμη ὅτι, παρὰ τὸν σοβαρὸ περιορισμὸ ποὺ ὑπέστησαν τὰ παραδοσιακὰ Μαθηματικὰ μὲ τὸν σκοπὸ νὰ προσαρμοσθοῦν στὶς ἀπαιτήσεις τῆς Ἐνορατικῆς Σχολῆς, εἶναι ἄξιο ἰδιαιτέρου τονισμοῦ τὸ γεγονὸς ὅτι ὁ Brouwer, μένοντας συνεπὴς στὴ διδασκαλία του, κατώρθωσε νὰ ἀναπτύξη μιὰ Θεωρία Συνόλων στὴν ὁποία ὄχι μόνον ἀποκλείονται οἱ κλασσικὲς μέθοδοι (ὅπως π.χ. ἡ λεγομένη δ ι α γ ώ ν ι ο ς μ έ θ ο δ ο ς), ἀλλὰ καὶ αὐτὴ ἡ λογικὴ ἀρχὴ τοῦ ἀ π ο κ λ ε ι ο μ έ ν ο υ τ ρ ί τ ο υ δὲν ἔχει ἐφαρμογή.

21. Σὲ ποιό, ὅμως, σημεῖο προόδου βρίσκεται σήμερα ἡ σχετικὴ ἔρευνα; Παράλληλα μὲ τὴν Ἐνορατικὴ θέση, ποὺ ζητήσαμε νὰ σκιαγραφήσωμε, οἱ μαθηματικοὶ ποὺ ἐμμένουν στὴν παραδοσιακὴ θέση προσπαθοῦν μὲ ὁλονὲν αὐξανομένη δραστηριότητα νὰ θέσουν ὑπὸ ἔλεγχο τὴν πραγματικὰ χαώδη κατάσταση ποὺ δημιουργήθηκε ὕστερα ἀπὸ τὴν ἀπόδειξη γιὰ τὸ ἀνεξάρτητο τῆς ὑποθέσεως τοῦ συνεχοῦς ἀπὸ τὰ λοιπὰ ἀξιώματα τῆς (ἀξιω-

ματικοποιημένης) Θεωρίας τῶν Συνόλων. Βέβαια, ἠμπορεῖ νὰ παρατηρηθῆ, ὅτι χαώδης ὑπῆρξε ἡ κατάσταση κάθε φορὰ ποὺ μαθηματικὲς θεωρίες εὑρίσκοντο στὸ στάδιο τῆς διαμορφώσεως. Ἐκεῖνο ποὺ πάντοτε ἔσωσε τὰ πράγματα, καὶ ποὺ ἀναμένεται καὶ τώρα νὰ τὰ σώση, εἶναι ἡ ἐκ βάθρων ἀναδιοργάνωση, μὲ σκοπὸ τὴν ἀποσαφήνιση τῆς καταστάσεως. Χρειάζονται νέες ἰδέες στὰ Μαθηματικὰ — ἰδέες πού, μαζὶ μὲ ὡρισμένους ἀκριβεῖς ὁρισμούς, θὰ χρησιμεύσουν ὡς ὅπλο γιὰ νὰ παρακαμφθῆ ἡ νέα καὶ πιὸ σοβαρὴ αὐτὴ κρίση.

Πιὸ πάνω μιλήσαμε γιὰ τὰ μαθηματικὰ πρότυπα. Ἕνα κατάλληλα κατασκευασμένο πρότυπο ὑπῆρξε, ἕως τώρα, ἕνα ἰσχυρὸ ὅπλο γιὰ τὴ μαθηματικὴ ἔρευνα. Μὲ ἕνα τέτοιο πρότυπο ἀποδείχθηκε τόσο τὸ ἀνεξάρτητο ἑνὸς ἀξιώματος ἀπὸ ἄλλα, ὅσο καὶ τὸ συμβιβαστὸ γιὰ ἕνα σύστημα ἀπὸ ἀξιώματα. Ὡστόσο, ἕνα σύστημα ἀξιωμάτων δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ μιὰ πεπλεγμένη δομή. Ἀντίθετα, ἕνα πρότυπο ἀντιστοιχίζει ἐκπεφρασμένα κάτι στὰ ἀξιώματα· ἀποτελεῖ μιά, ὅπως λέμε, ἑρμηνεία τοῦ συστήματος ἀξιωμάτων. Τὸ σύστημα ἀξιωμάτων ZF (βλ. παράγρ. 16) ἠμπορεῖ νὰ ἑρμηνευθῆ μέσα σὲ μιὰ ἀπαριθμητὴ περιοχὴ μαθηματικῶν ἀντικειμένων, σύμφωνα μὲ ἕνα γνωστὸ θεώρημα τῶν Loewenheim (1878 - 1940) καὶ Skolem. Ἔτσι ἔχομε ὅ,τι σήμερα φέρει τὴν ὀνομασία μὴ κανονικὸ πρότυπο[42] (non-standard model), ποὺ οὐσιαστικὰ ἀποκλίνει ἀπὸ ἕνα κανονικό. Τυποποιημένα συστήματα ἀπὸ ἀξιώματα ἐνδέχεται νὰ ἔχουν μὴ κανονικὰ πρότυπα, ἐνῶ τέτοια συστήματα δὲν εἶναι πλήρη, σύμφωνα μὲ τὸ περίφημο θεώρημα τοῦ Goedel.

Στὴν ἔρευνα γιὰ τὴ θεμελίωση τῶν Μαθηματικῶν, ἡ μόρφωση προτύπων ἔπαιξε σημαντικὸ ρόλο. Ἔτσι, ἄλλωστε, ἀποδείχθηκε καὶ ἡ πρόταση τοῦ Cohen πού, στὴν οὐσία, λέει ὅτι ὁ πληθικὸς τοῦ συνεχοῦς δὲν ἠμπορεῖ νὰ καθορισθῆ ἀπὸ ἕνα (σύνηθες) σύστημα ἀξιωμάτων γιὰ τὴ Θεωρία τῶν Συνόλων.

22. Μὲ βάση τὸ θεώρημα τοῦ Goedel καὶ τὴν πρόταση τοῦ Cohen, εἴμαστε σὲ θέση νὰ γνωρίζωμε ὅτι, καὶ ἂν ἀκόμη προσλάβωμε τὴν (γενικευμένη) ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς ὡς ἕνα νέο ἀξίωμα στὸ ὑπάρχον σύστημα ἀξιωμάτων, π.χ. στὸ ZF′, πάλιν θὰ ἦταν δυνατὸν νὰ βρεθῆ, μέσα στὴ θεωρία, πρόταση ποὺ οὔτε αὐτὴ οὔτε ἡ ἄρνησή της νὰ ἀποδεικνύωνται στὸ συμπληρωμένο ἀξιωματικὸ σύστημα. Βέβαια, τὸ ἀποτέλεσμα αὐτὸ δὲν ἀποτελεῖ ὅπως εἴπαμε ἄμεση δικαίωση γιὰ τὸν δημιουργὸ τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων, ποὺ ἦταν πεπεισμένος γιὰ τὴν δυνατότητα ἀποδείξεως τῆς ὑποθέσεώς του

42. A. Fraenkel - Y. Bar Hillel, *Foundations of Set Theory*, Amsterdam 1958, 289.

(τοῦ συνεχοῦς), καὶ ποὺ γιὰ τὴν ἀπόδειξη αὐτὴ ἀφιέρωσε ἕνα μεγάλο μέρος τῆς μαθηματικῆς του δραστηριότητος. Τὸ γεγονός, ὅμως, ὅτι κανένα πεπερασμένο σύστημα ἀπὸ ἀξιώματα δὲν εἶναι ἀρκετὰ εὐρὺ ὥστε νὰ περιλάβη τὴ Θεωρία τῶν Συνόλων, δείχνει πὼς οἱ δυνατότητες ποὺ ἡ θεωρία αὐτὴ κρύβει ξεφεύγουν, κατὰ κάποιο τρόπο, ἀπὸ κάθε τέτοια ἀξιωματικὴ δέσμευση.

23. Λίγα λόγια, τέλος, γιὰ τὴν σχέση μεταξὺ τοῦ μαθηματικοῦ συνεχοῦς, αὐτοῦ ποὺ ἀπετέλεσε τὸ ἀντικείμενο τῆς μελέτης μας, καὶ τῆς ἀντίστοιχης φυσικῆς πραγματικότητος, ποὺ ἀπασχόλησε τοὺς Ἕλληνας φιλοσόφους. Ἤδη, στὴν παράγραφο 4, παρατηρήσαμε πὼς τὰ καθαρὰ Μαθηματικὰ δὲν εἶναι πιστὴ περιγραφὴ τοῦ φυσικοῦ κόσμου. Γιὰ τὴν τεκμηρίωση αὐτοῦ ἀρκεῖ νὰ σημειώσωμε πὼς βασικὲς ἔννοιες στὰ Μαθηματικά, ὅπως ἐκείνη τοῦ ἀπείρου, δὲν πραγματοποιοῦνται πουθενὰ στὴν Φύση. Ἀλλὰ καὶ ἔννοιες ποὺ δημιουργήθηκαν ἀπὸ τὴν ἐποπτεία τοῦ ἐξωτερικοῦ κόσμου, στὶς ὁποῖες καταλέγομε καὶ τὴν ἔννοια τοῦ συνεχοῦς, εἶναι ἔννοιες ἰδεατές, μὲ δομὴ οὐσιαστικὰ διάφορο ἀπὸ τὴν κατασκευὴ ποὺ ἔχουν τὰ ἀντικείμενα τῆς ἐμπειρίας, Ὡς ἁπλὸ παράδειγμα ἔχομε ὅτι εἶναι ἀδύνατο νὰ βροῦμε ὑλικὰ ἀντικείμενα δίχως ἔκταση, ἀντίστοιχα πρὸς τὰ σημεῖα τῆς Γεωμετρίας. Μὲ ποιὸ τρόπο θὰ ἦταν λοιπὸν δυνατὸν ἡ δομὴ τοῦ μαθηματικοῦ συνεχοῦς, ποὺ εἶναι κατάλληλο σύνολο ἀπὸ ἄπειρα τὸ πλῆθος μὴ ἐκτατά σημεῖα, νὰ ἔχη τὴν δομὴ τοῦ φυσικοῦ συνεχοῦς, ποὺ ἀντίθετα ἀποτελεῖται ἀπὸ πεπερασμένα τὸ πλῆθος ἐκτατὰ στοιχεῖα; Ἀκόμη καὶ ἡ ἀντιστοιχία μέσα σὲ μαθηματικὲς ἔννοιες καὶ ἀντιλήψεις τῆς ἀμέσου ἐπαισθήσεως, δὲν ἠμπορεῖ πάντοτε νὰ περιγράψη φυσικὰ φαινόμενα. Ἀλλιῶς θὰ ἔπρεπε, σὲ κάθε στοιχειῶδες «ἄτομο» μιᾶς λεπτῆς ὑλικῆς γραμμῆς (τεταμένου νήματος) νὰ μὴν ὑπάρχη οὔτε προηγούμενο οὔτε ἑπόμενό του, πρᾶγμα ποὺ στὴν ἐμπειρία δὲν συμβαίνει. Ἐπίσης, ἡ ὑλικὴ γραμμὴ ἢ τὸ χρονικὸ διάστημα θὰ ἔπρεπε νὰ ἠμποροῦν νὰ τεμαχίζωνται δίχως τέλος, πρᾶγμα ποὺ ἐπίσης δὲν συμβαίνει.

Ὡστόσο στὶς φυσικὲς ἐφαρμογὲς τῶν Μαθηματικῶν εἶναι σκόπιμο νὰ δεχώμεθα ἀμφιμονοσήμαντη τὴν ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν στοιχείων τοῦ μαθηματικοῦ καὶ τοῦ φυσικοῦ συνεχοῦς. Στὴν παραδοχὴ αὐτὴ βασίζεται, ἄλλωστε, ἡ ἐφαρμογὴ στὴν Φυσικὴ τῆς Ἀναλυτικῆς Γεωμετρίας καὶ τοῦ Ἀπειροστικοῦ Λογισμοῦ. Ἀλλὰ καὶ ἡ κατὰ παραδοχὴν ἀμφιμονοσήμαντη αὐτὴ ἀντιστοιχία δὲν πρέπει νὰ ἐκλαμβάνεται ὡς μιὰ ἰσομορφία, ὑπὸ τὸ πνεῦμα καὶ τῆς διατηρήσεως σ' αὐτὴν τῆς σχέσεως τῆς διατάξεως. Ἐνῶ γιὰ τὰ Μαθηματικά, ὅπως εἴπαμε, δὲν ὑπάρχει τὸ ἀμέσως προηγούμενο ἢ ἑπόμενο σημείου, στὴν Φυσικὴ ἡ ἄμεση διαδοχή, π.χ. τῶν χρονικῶν στιγμῶν, εἶναι κάτι τὸ γενικὰ παραδεκτό.

Τὸ συμπέρασμα εἶναι, ὅτι τὸ μαθηματικὸ συνεχὲς εἶναι μιὰ καθαρὰ νοητικὴ ἔννοια δίχως ἄμεση φυσικὴ ἐφαρμογή. Ὑπὸ τὸ νόημα αὐτὸ πρέπει νὰ ἐξετάζεται καὶ ὁποιαδήποτε ἀνάλυση τῶν *παραδόξων* τοῦ Ζήνωνος, ποὺ ἔχουν ἄμεση σχέση μὲ τὸ φυσικὸ συνεχές.

THE PROBLEM OF THE NATURE OF CONTINUITY

Summary.

It is well known that continuity has a primary importance for the Philosophy of Mathematics. That is why the investigation into the nature of the continuum has been the object of constant effort and trial for many scientists since antiquity. Although this concept is intuitively very clear and simple, its exact definition, without any intuitive elements, always constituted a very difficult problem. It seemed impossible to most ancient philosophers to analyse this notion into more elementary ones. Nor did others think continuity was a logical or mathematical idea, but rather a pure dogma.

As a matter of fact, Greek mathematecians succeeded in approaching the geometrical conception of the continuum through an arithmetical one, by means of the invention of incommensurable numbers. This greek theory could hardly be completed in two thousand of years. What recent mathematicians did, was a representation of the geometrical continuum merely. Thus, the class of all real numbers constituted the linear continuum of Geometry. Later on, by the invention of the set-theory an attempt was made to approach the continuum through the discrete. The method inaugurated in this way has had the intention to bridge the abyss existing between these two quite different concepts, i.e. the concept of continuity and that of discontinuity (discreteness). We have already noted that most of the Greek philosophers thought it appropriate to get continuity as their starting point, inasmuch as they considered continuity and not discontinuity to be the simpler concept.

In this paper, after a historical report of former debates concerning the problem of continuity, we intend to give the modern position on this problem on account of the new achievements of the set-theory and the aspects of the Intuitionistic School as well.

Athens Philon Vassiliou