τῆς μαθηματικῆς Γλώσσης. Ἡ φιλοσοφία ποὺ ἐνυπάρχει σὲ μιὰ νέα μαθηματικὴ ἐπινόηση εἶναι φυσικὸ νὰ μὴν γίνεται κατανοητὴ ἀπὸ τὸν ἴδιο τὸν δημιουργό της, ἀλλὰ ἀπὸ ἐκεῖνον ποὺ προσπαθεῖ ἔπειτα νὰ διεισδύση στὴν οὐσία της σύμφωνα μὲ τὴν ἰδική του σκοπιά. Ἔτσι, ἡ Φιλοσοφία μέσα στὰ Μαθηματικὰ γίνεται βαθύτερα κατανοητὴ ὄχι τόσον ἀπ' αὐτὸν τὸν ἐπινοητὴ μιᾶς μαθηματικῆς θεωρίας, ὅσο ἀπὸ τοὺς μαθηματικοὺς τῆς ἑπομένης γενεᾶς. Ὁ συγγραφεὺς τοῦ προκειμένου ἄρθρου διατυπώνει τὴν γνώμη, ὅτι ἡ φιλοσοφία τῆς μαθηματικῆς σκέψεως γιὰ τὴν ἑπομένη γενεὰ θὰ διαφέρη ἀπὸ τὴν σημερινή, ὅπως ἄλλωστε τὸ ἴδιο συνέβαινε καὶ στὸ παρελθόν. Ἐκεῖνο ποὺ ὁ συγγραφεὺς ἐπιδιώκει μὲ τὴν ἔκθεσή του, εἶναι κυρίως ἡ διαπραγμάτευση μερικῶν ἀ ρ χ ῶ ν, ποὺ χαρακτηρίζουν τὴν μαθηματικὴ σκέψη τῆς ἐποχῆς του, κι αὐτὸ μὲ τὴν κατὰ τὸ δυνατὸν ἀποφυγὴ εἰδικῶν τεχνικῶν ὅρων.

Ἡ καθολικὴ εἰκόνα ποὺ δίνει στὸν ἀναγνώστη ἡ μελέτη τοῦ πρώτου τόμου τῆς *«Σύγχρονης Φιλοσοφίας»*, ἀναφορικὰ μὲ τὶς ἔρευνες γιὰ τὴν Λογικὴ καὶ τὴν θεμελίωση τῶν Μαθηματικῶν στὴν δεκαετία 1956-66, εἶναι πραγματικὰ ἀριστοτεχνικὴ καὶ πλήρης σὲ τρόπο, ὥστε νὰ εἶναι πέρα γιὰ πέρα δικαιολογημένος ὁ χαρακτηρισμὸς ποὺ διετυπώσαμε στὴν ἀρχή, ὅτι τὸ ἔργον αὐτὸ ἀποτελεῖ ἕνα πολύτιμον ὁδηγὸ καὶ ἕνα βοήθημα γιὰ καθένα ἐνδιαφερόμενο γιὰ τὶς νεώτερες προόδους στὴν Φιλοσοφία τῶν Μαθηματικῶν. Ἐξ ἄλλου τὸ ἔργον παρέχει, μαζὶ μὲ τὴν ἐνημέρωση, τὸ ἔδαφος καὶ τὴν δυνατότητα στὸν ἐρευνητὴ γιὰ τὴν περαιτέρω συνέχιση καὶ τὴν ἐπίλυση προβλημάτων ποὺ μέχρι σήμερα μένουν ἀναπάντητα. Ἐκτὸς ὅμως ἀπὸ τὴν χρησιμότητα, τὸ ἔργον δὲν παύει ν' ἀποτελῆ πρωτίστως ἕνα σημαντικὸν ἀπολογισμὸ γιὰ τὴν δραστηριότητα τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος σ' ἕνα τομέα, ποὺ δίκαια τοποθετεῖται ὡς εἰσαγωγικὸς στὶς σύγχρονες τάσεις καὶ ἔρευνες τῆς Φιλοσοφίας.

Ἀθῆναι

Φίλων Βασιλείου,
τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν

Ν. Γ. Α ὐ γ ε λ ῆ ς, *Ἡ ἔννοια τῆς μαθηματικῆς ἀλήθειας καὶ ἡ ἀπόδειξη τοῦ Goedel. Φιλοσοφικὲς συνέπειες*, Θεσσαλονίκη 1972, 72 σελ.

Μιὰ πολὺ ἐνδιαφέρουσα ἐργασία τοῦ διδάκτορος τῆς Φιλοσοφίας, καὶ τώρα ἐπικ. καθηγητοῦ στὸ Ἀριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης Ν. Αὐγελῆ, ἐκυκλοφόρησε τελευταῖα μὲ τὸν ἄνω τίτλο. Ἡ ἐργασία ἀναφέρεται στὸ περίφημο θεώρημα τοῦ K. Goedel, τοῦ ὁποίου ἕνα βασικὸ συμπέρασμα εἶναι ἡ πρόταση, ὅτι σὲ ἕνα λογικοαριθμητικὸ παραγωγικὸ σύστημα ὑπάρχουν πάντοτε ἔννοιες ποὺ δὲν ἠμποροῦν νὰ ὁρισθοῦν καὶ προτάσεις ποὺ δὲν ἐπιδέχονται ἀπόδειξη, οὔτε γιὰ τὴν θέση τους οὔτε γιὰ τὴν ἄρνηση, μέσα στὸ ἴδιο τὸ σύστημα. Εἶναι γνωστὸν πόσον ἐπαναστατικὲς ὑπῆρξαν οἱ συνέπειες τοῦ θεωρήματος ἀναφορικὰ μὲ τὶς δοξασίες ποὺ κυριάρχησαν γιὰ χιλιετίες καὶ πόσον ἐπιτακτικὴ παρουσιάσθηκε ἡ ἀνάγκη γιὰ τὴν πλήρη ἀναθεώρησή τους. Μιὰ ἀπὸ τὶς δοξασίες αὐτὲς ἦταν καὶ ἡ σχετικὴ μὲ τὴν μαθηματικὴ ἀλήθεια, ποὺ ἤδη ἀπὸ τὴν ἐπινόηση τῶν λεγομένων μὴ Εὐκλειδείων Γεωμετριῶν εἶχε σοβαρὰ κλονισθῆ. Ἀκριβῶς τὶς συνέπειες αὐτὲς τοῦ θεωρήματος τοῦ Goedel ἐξετάζει ὁ συγγραφεὺς γενικώτερα καὶ γιὰ τὴν Φιλοσοφία. Στὴν μελέτη αὐτὴ προτάσσονται εἰσαγωγικῶς οἱ ἀπαραίτητες γνώσεις γιὰ τὴν κατανόηση αὐτῶν ποὺ ἀκολουθοῦν καὶ γίνεται ἡ διερεύνηση γιὰ τὸ πρόβλημα τῆς μαθηματικῆς ἀλήθειας καθὼς καὶ ἡ ἔρευνα γιὰ τὴν ἐπίδραση ποὺ εἶχε τὸ ἐν λόγῳ θεώρημα στὶς κυβερνητικὲς (ὑπολογιστικές) μηχανές.

Τὸ πρῶτο κεφάλαιο ἀναφέρεται στὴν ἀξιωματικὴ μέθοδο, ποὺ ὅπως εἶναι γνωστὸν πρωτοεφαρμόσθηκε συστηματικὰ στὰ *Στοιχεῖα* τοῦ Εὐκλείδου γιὰ τὴν διαπραγμάτευση τῆς Γεωμετρίας. Ἔκτοτε ἡ μέθοδος αὐτὴ ἀπετέλεσε τὸν ἰδεατὸ τρόπο γιὰ τὴν δόμηση κάθε παραγωγικῆς θεωρίας. Ὁ συγγραφεὺς μνημονεύει στὴν ἀρχὴ τὸ περίφημο αἴτημα (ἀξίωμα) τῶν παραλλήλων, ποὺ σὲ ἄλλα ἀρχαῖα χειρόγραφα φέρεται ὡς τὸ πέμπτο καὶ σὲ ἄλλα ὡς τὸ ἑνδέκατο. Τὸ αἴτημα αὐτό, σὲ διάκριση ἀπὸ τὰ ἄλλα προτασσόμενα, δὲν ἐφαίνετο τόσον αὐτονόητο, κατὰ τὴν ἀντίληψη ποὺ εἶχαν τότε γιὰ τὰ ἀξιώματα, ἀλλ' ἔδινε τὴν ἐντύπωση μιᾶς ἀποδείξιμης προτάσεως. Ἡ ἀναγωγὴ τοῦ αἰτήματος τῶν παραλλήλων εἰς τὰ ἄλλα ἀξιώματα, ἀπετέλεσε, γιὰ ἕνα μακρὸ χρονικὸ διάστημα, τὸ ἀντικείμενο μιᾶς συνεχοῦς ἀλλὰ ἄκαρπης προσπαθείας. Μόλις στὸ τέλος τοῦ 18ου καὶ στὶς ἀρχὲς τοῦ 19ου αἰῶνος οἱ ἔρευνες τῶν μαθηματικῶν κατέδειξαν τὴν ἀνεξαρτησία τοῦ ἐν λόγω αἰτήματος ἀπὸ τὰ λοιπά, καὶ μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν ἄνοιξεν ὁ δρόμος γιὰ τὴν ἐπινόηση τῶν μὴ Εὐκλειδείων Γεωμετριῶν. Μιὰ πιὸ ἐπισταμένη μελέτη, ποὺ ἔγινε στὸν αἰῶνα μας ἀπὸ τὸν D. Hilbert σχετικὰ μὲ τὴν ὅλη δομὴ τῆς Ἀξιωματικῆς, εἶχεν ὡς ἀποτέλεσμα μιὰ τελείως διάφορον ἀντίληψη γιὰ τὰ ἀξιώματα καὶ μιὰ ἄλλη κατεύθυνση, ποὺ ἔλαβε ἀπὸ τότε ἡ ἀξιωματικὴ μέθοδος. Βέβαια καὶ μὲ τὴν νέαν αὐτὴν ἐκδοχὴν ἐμφανίζονται διάφορα προβλήματα τῶν ὁποίων ἐπιτακτικὴ εἶναι ἡ ἐπίλυση καὶ τῶν ὁποίων τὰ πιὸ σημαντικὰ εἶναι ἡ «συμβιβαστότης», δηλαδὴ τὸ μὴ ἀντιφατικόν, καὶ ἡ «πληρότης» ἑνὸς συστήματος ἀξιωμάτων. Γιὰ τὸν σκοπὸ μιᾶς ἀ π ο λ ύ τ ο υ (ἀλλ' ὄχι σ χ ε τ ι κ ῆ ς) ἀποκρίσεως στὰ ἐν λόγω προβλήματα εἰσήχθησαν ἀπὸ τὸ ἕνα μέρος ἡ «τυποποίηση» κάθε μαθηματικῆς θεωρίας καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο τὰ «Μεταμαθηματικά», ἀλλιῶς ἡ «Θεωρία ἀποδείξεων». Ἀρχικὰ ὁ Hilbert ἐζήτησεν, ὅπως ἡ χρησιμοποιούμενη ἐπιχειρηματολογία στὴν Θεωρία του τῶν ἀποδείξεων εἶναι ἀποκλειστικὰ «πεπερασμένη» καὶ τοῦτο γιατὶ μόνον ἔτσι μᾶς ἐξασφαλίζεται μιὰ ἀναμφισβήτητη βεβαιότητα. Τὸ πρόγραμμά του ὅμως αὐτὸ δὲν ἠμπόρεσε νὰ ἀχθῆ στὸ ἐπιθυμητὸ πέρας, λόγω ἀκριβῶς τῶν ἀποτελεσμάτων στὰ ὁποῖα ἔφθασε στὸ μεταξὺ (1931) ὁ Goedel. Ἔτσι τὸ μεγαλεπήβολο σχέδιο τοῦ Hilbert, ὅπως ἀξιωματικοποιήση ὁλόκληρη τὴν μαθηματικὴ ἐπιστήμη, τουλάχιστον προσωρινῶς, ἐναυάγησε. Πρέπει, παρὰ ταῦτα, νὰ σημειωθῆ ὅτι ὑπῆρξαν μαθηταὶ τοῦ Hilbert οἱ ὁποῖοι, παρὰ τὴν ἀνατροπὴ ποὺ ἀπειλήθηκε ἀπὸ τὸν Goedel, κατώρθωσαν νὰ καταλήξουν σὲ ἀξιόλογα ἐξαγόμενα σχετικὰ μὲ τὴν ἀξιωματικὴ θεμελίωση ὡρισμένων μαθηματικῶν κλάδων μὲ τὴν ἐπέκταση τῆς «πεπερασμένης» θέσεως τοῦ διδασκάλου των.

Τὸ δεύτερο κεφάλαιο ἀφιερώνεται στὴν ἀπόδειξη τοῦ κυρίου θεωρήματος τοῦ Goedel, σύμφωνα μὲ τὸ ὁποῖον συμβιβαστότης καὶ πληρότης εἶναι μεταξύ τους δύο ἀντιφατικὲς ἔννοιες. Ἐδῶ ὁ συγγραφεὺς ἀκολουθεῖ, κατὰ τὴν ἴδια του ὁμολογία, τὴν συλλογιστικὴ πορεία ποὺ ἀναπτύσσεται στὸ γνωστὸ ἔργο τῶν E. Nagel καὶ J. R. Newman καὶ ποὺ φέρει τὸν τίτλο *Goedel's Proof* (New York 1958). Προτάσσει τὴν ἑρμηνεία τῶν λεγομένων «ἀριθμῶν Goedel», ποὺ προκύπτουν ἀπὸ τὴν ἀντιστοίχιση, μὲ κατάλληλο τρόπο, φυσικῶν ἀριθμῶν (δηλ. ἀκεραίων καὶ θετικῶν) στὰ σύμβολα, τοὺς τύπους καὶ τὶς ἀποδείξεις ἑνὸς τυποποιημένου συστήματος ποὺ περιέχει τοὺς φυσικούς. Ὁ τρόπος ἀντιστοιχίσεως εἶναι τέτοιος, ὥστε νὰ ἠμπορῇ κανεὶς ν' ἀποφανθῇ γιὰ κάθε φυσικό, ἂν εἶναι ἀριθμὸς Goedel, δηλαδὴ ἂν εἶναι εἰκόνα κατὰ τὴν μνημονευθεῖσα ἀντιστοίχιση, καὶ νὰ εὕρη τὸ ἀρχέτυπό του στὴν περίπτωση ποὺ αὐτὸ συμβαίνει. Στὴν συνέχεια ὁ συγγραφεὺς προβαίνει στὴν «ἀριθμητικοποίηση» τῶν Μεταμαθηματικῶν τοῦ συστήματος, πρᾶγμα ποὺ σημαίνει ὅτι ἀπεικονίζει τὶς μεταμαθηματικὲς προτάσεις στὸ σύστημα κατὰ τρόπο, ὥστε οἱ μεταμαθηματικὲς παραστάσεις καὶ οἱ σχέσεις τους νὰ μεταβαίνουν, κατὰ τὴν ἀπεικόνιση, σὲ προτάσεις καὶ σχέσεις μεταξὺ τῶν ἀριθμῶν Goedel ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὶς μεταμαθηματικὲς ἐκεῖνες παραστάσεις καὶ σχέσεις. Μορφώνει, ἔπειτα, κατάλληλον ἀριθμητικὸν τύπον, ποὺ ν' ἀντιστοιχῇ στὸν μεταμαθηματικὸ ἰσχυρισμό, ὅτι «ὁ ἐν λόγω τύπος δὲν εἶναι ἀποδείξιμος στὸ σύστημα». Μὲ τὴν παραδοχή, τότε, ὅτι τὸ σύστημα εἶναι συμβιβαστὸ ἀποδεικνύει τέλος, ὅτι ὁ μορφωθεὶς κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν τύπος δέν εἶναι ἀποδείξιμος, ὅπως δὲν εἶναι ἀποδείξιμη καὶ ἡ ἄρνησή του. Αὐτό, ὅμως, σημαίνει ὅτι τὸ σύστημα δὲν εἶναι πλῆρες, ὅπως ἰσχυρίσθηκεν ὁ Goedel.

Τὴν ἄμεση σχέση ποὺ ἔχει τὸ προηγούμενο ἀποτέλεσμα μὲ τὴν ἔννοια τῆς μαθηματικῆς ἀλήθειας ἐξετάζει ὁ συγγραφεὺς στὸ τρίτο κεφάλαιο. Ἡ ἐξέταση γίνεται κυρίως μὲ τὴν ἀναφορὰ στὶς ἀπόψεις δύο συγχρόνων μαθηματικῶν Σχολῶν, τῆς Λογικιστικῆς καὶ τῆς Φορμαλιστικῆς. Γιὰ τοὺς Λογικιστὰς τονίζει ὁ συγγραφεὺς τὴν «ρεαλιστική» (πλατωνική) τους θέση ἀναφορικὰ μὲ τὴν ἔξω ἀπὸ μᾶς ὕπαρξη κάθε μαθηματικῆς ὀντότητος, ὅπως καὶ τὶς παραδοχές, ὅτι τὰ Μαθηματικὰ εἶναι μέρος τῆς Λογικῆς καὶ ὅτι οἱ μαθηματικὲς προτάσεις εἶναι «ἀληθεῖς», ἐφ' ὅσον συνάγονται παραγωγικῶς ἀπὸ τὰ λογικὰ ἀξιώματα. Τὴν ρεαλιστική, ὅμως, αὐτὴ θέση τῶν Λογικιστῶν ἐκλόνισεν ἡ προηγηθεῖσα ἀπόδειξη, σύμφωνα μὲ τὴν ὁποία τὰ Μαθηματικὰ δὲν εἶναι μία «πλήρης» Θεωρία. Ἡ ἄποψη, ἔπειτα, ὅτι τὰ Μαθηματικὰ ἀνάγονται στὴν Λογική, συνεπάγεται τὸ «ἑνιαῖον» τῆς μαθηματικῆς ἀλήθειας. Καὶ πάλιν τὸ θεώρημα Goedel κατέστησε ἀμφίβολη μιὰ τέτοια ἑνότητα. Γιὰ τοὺς Φορμαλιστὰς ὁ συγγραφεὺς τονίζει, ὅτι ἡ μαθηματικὴ ἀλήθεια δὲν φαίνεται νὰ διαφέρη ἀπὸ μιὰ «τυπικὴ παραγωγή». Ἡ ἀ π ό λ υ τ η ἔννοια τῆς ἀλήθειας ὑπονοεῖ τὴν δυνατότητα τῆς ἐνσωματώσεως ὅλων τῶν μαθηματικῶν ἀληθειῶν σὲ ἕνα καὶ τὸ αὐτὸ μὴ ἀντιφατικὸ σύστημα. Γνωρίζομε, παρὰ ταῦτα, ἀπὸ τὴν ἀπόδειξη Goedel, ὅτι ὑπάρχουν πάντοτε φορμαλιστικὲς ἀλήθειες ποὺ δὲν ἐνσωματώνονται σὲ ἕνα σύστημα. Ἀμφίβολη παρουσιάζεται, λοιπόν, καὶ ἡ ὀρθότης τῆς φορμαλιστικῆς θέσεως ἀναφορικὰ μὲ τὴ φύση μιᾶς ἀπόλυτης μαθηματικῆς ἀλήθειας. Ὁδηγεῖται, ἔτσι, κανεὶς στὸ συμπέρασμα, ὅτι τὰ μαθηματικὰ θεωρήματα δὲν μᾶς δίνουν παρὰ σ χ ε τ ι κ ὲ ς μόνον ἀλήθειες, μὲ ἄλλες λέξεις, ὅτι ἀπόλυτη βεβαιότητα δὲν ὑπάρχει οὔτε σ' αὐτὰ τά, ὡς ἀσφαλῆ νομιζόμενα, Μαθηματικά. Ἴσως εἴμεθα πολὺ μακρυὰ ἀπὸ τὴν σύλληψη τῆς ἐννοίας μιᾶς ἀπόλυτης μαθηματικῆς ἀλήθειας κι αὐτό, βέβαια, ἂν πραγματικὰ ἔχωμε τὸ δικαίωμα νὰ ὁμιλοῦμε γιὰ μιὰ τέτοια, κατὰ τὰ φαινόμενα, τελείως οὐτοπικὴ ἔννοια.

Τὸ τέταρτο, τέλος, κεφάλαιο φέρει τὸν τίτλο «Ἡ ἀπόδειξη τοῦ Goedel καὶ οἱ κυβερνητικὲς μηχανές». Σ' αὐτὸ ἐκτίθενται οἱ βαθύτεροι λόγοι γιὰ τοὺς ὁποίους ὁ ἀνθρώπινος νοῦς θὰ μένη πάντοτε κυρίαρχος ἐπάνω ἀπὸ ὁποιαδήποτε ὑπολογιστικὴ μηχανή. Εἶναι ἀλήθεια, ὅτι οἱ λεγόμενοι «ὑπολογισταί» ποὺ κατασκευάσθηκαν ὥς τώρα ἀπαντοῦν σὲ ἕνα πλῆθος ἀπὸ προβλήματα. Πρέπει, ὅμως, νὰ παρατηρηθῆ πὼς ἡ λειτουργία τους καθορίζεται ἀπὸ τὸν ἄνθρωπο· αὐτὸς ὑπαγορεύει στοὺς ὑπολογιστὰς τὸ «πρόγραμμα» τῆς λειτουργίας τους. Ἐφ' ὅσον, πάλιν, κατὰ τὴν ἀπόδειξη τοῦ Goedel, ὑπάρχουν σὲ κάθε τυπικὸ σύστημα ἀναποκρίσιμα προβλήματα, φυσικὸν εἶναι νὰ μὴ ἀναμένη κανεὶς τὴν κατασκευὴ ἑνὸς ὑπολογιστοῦ, ποὺ θὰ ἀπαντᾶ σὲ κάθε ἐρώτημα ποὺ θὰ τοῦ θέτωμε. Οὔτε ἄλλωστε εἶναι νοητό, ὅτι θὰ ὑπάρξη ποτὲ μηχανὴ ποὺ θὰ ἠμπορέση ν' ἀντικαταστήση τὸν ἀνθρώπινον ἐγκέφαλο.

Ἡ ἐργασία τοῦ κ. Αὐγελῆ εἶναι γραμμένη μὲ μεγάλη σαφήνεια σὲ τρόπο ὥστε τὸ κείμενο νὰ μὴ παρουσιάζη δυσκολία ἀκόμη καὶ γιὰ τὸν μὴ εἰδικό. Ἐξ ἄλλου ἡ ἐργασία διακρίνεται γενικὰ γιὰ τὴν ἀκριβολόγο διατύπωσή της, πρᾶγμα ποὺ φανερώνει, μαζὶ μὲ μιὰ πλατειὰ φιλοσοφικὴ κατάρτιση, τὴν ἱκανότητα τοῦ συγγραφέως νὰ εἰσδύη μὲ εὐχέρεια σὲ προχωρημένα θέματα τῆς μαθηματικῆς σκέψεως. Σὲ μερικὰ μόνο σημεῖα τοῦ κειμένου θὰ ἦταν ἴσως ἐπιθυμητὴ μιὰ ἀκριβέστερη διατύπωση. Ἔτσι, γιὰ τὸν ὁρισμὸ τῆς «αὐτοκατηγορικῆς ἔννοιας», ἀντὶ ἐκείνου ποὺ δίνεται στὴ σελ. 43 θὰ ἠμποροῦσε νὰ γραφῆ πὼς δύο ἔννοιες, ποὺ ἄλλωστε ἠμποροῦν καὶ νὰ συμπίπτουν, εἶναι αὐτοκατηγορικές, ὅταν στὸν ὁρισμὸ καθεμιᾶς ἀπὸ αὐτὲς ὑπεισέρχεται ἀναγκαστικὰ ἡ ἄλλη ἔννοια. Κατὰ μία λιγώτερο εὐρεῖα ἔννοια, ὡς αὐτοκατηγορικὸς ὁρισμὸς γιὰ ἕνα στοιχεῖο ποὺ ἀνήκει σὲ κάποιο σύνολο θεωρεῖται ἐκεῖνος στὸν ὁποῖον ὑπεισέρχεται αὐτὸ τὸ ἴδιο τὸ σύνολον· π.χ. στὴν γνωστὴ ἀντινομία τοῦ Richard, ὁ ὁρισμὸς μὲ πεπερασμένες λέξεις δεκαδικοῦ κλάσματος μὲ βάση τὸ σύνολον ὅλων τῶν δεκαδικῶν κλασμάτων, ποὺ ὁρίζονται ἐπίσης μὲ πεπερασμένες λέξεις.

Ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον ἔχουν τέλος οἱ παρατηρήσεις τοῦ συγγραφέως ἀναφορικὰ μὲ τὴν μαθηματικὴ ἀλήθεια, ποὺ ἀποτελεῖ ἄλλωστε τὸ κεντρικὸ θέμα τῆς ἀξιόλογης αὐτῆς ἐργασίας.

Ἀθῆναι

Φίλων Βασιλείου,
τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν