R. Klibansky (Ed.), *Contemporary Philosophy. A Survey*, 1. *Logic and Foundations of Mathematics*, Firenze, La Nuova Italia Editrice 1968, 387 σελ.

῞Ενα πολύτιμο γιὰ τὸν ἐρευνητὴ βοήθημα ἀποτελεῖ ἡ ἐπισκόπηση ἐπάνω στὰ νεώτερα προβλήματα τῆς Φιλοσοφίας, ποὺ συζητήθηκαν στὸ χρονικὸ διάστημα ἀπὸ 1956-1966 καὶ ποὺ περιέχει ἡ σειρὰ τῆς *«Σύγχρονης Φιλοσοφίας»*. Ἡ ἔκδοση τοῦ ἔργου αὐτοῦ σὲ 4 τόμους εὑρίσκεται ὑπὸ τὴν αἰγίδα τοῦ Διεθνοῦς Συμβουλίου τῆς Φιλοσοφίας καὶ τῶν Ἀνθρωπιστικῶν Σπουδῶν καθὼς ἐπίσης τῆς Διεθνοῦς Ὁμοσπονδίας τῶν Φιλοσοφικῶν Ἑταιρειῶν (F.I.S.P.) καὶ ἔχει τύχει τῆς συνδρομῆς τῆς U.N.E.S.C.O. Πρόκειται γιὰ τὴν συνέχιση τῆς σειρᾶς ποὺ πρωτοεμφανίσθηκε στὴν Φλωρεντία σὲ τρεῖς τόμους μὲ τὴν εὐκαιρία τοῦ ἐκεῖ Διεθνοῦς Συνεδρίου τῆς Φιλοσοφίας τὸ 1958, καὶ ποὺ ἐκάλυπτε τὶς ἔρευνες τῆς πενταετίας 1950-1955. Ἡ ἀρχικὴ ἀπόφαση, ὅπως ἡ ἔκδοση γίνεται κάθε πενταετία, ἀναθεωρήθηκε ἀργότερα καὶ εἰς τὸ ἑξῆς θὰ καλύπτη τὸ χρονικὸ διάστημα ὁλόκληρης δεκαετίας.

Τὸ ἐπιτελεῖο τῶν συγγραφέων, ποὺ συνέβαλαν στὴν ἐμφάνιση τοῦ παρόντος πρώτου τόμου, ἀποτελεῖται ἀποκλειστικὰ ἀπὸ εἰδικοὺς ἐπιστήμονας μὲ σημαντικὴ συμβολὴ στὶς σύγχρονες κατευθύνσεις τῆς λογικῆς καὶ τῆς μαθηματικῆς σκέψεως. Πλούσια βιβλιογραφία ἀκολουθεῖ κάθε ἄρθρο. Εἶναι ἀξιοσημείωτο, ὅτι ὁ πρῶτος τόμος ἀφιερώνεται, μαζὶ μὲ τὴν Λογική, στὴν Θεμελίωση τῶν Μαθηματικῶν. Οἱ πρόοδοι ποὺ ἐπετελέσθηκαν στὸν σχετικὰ νέο αὐτὸν κλάδο τῆς Θεμελιώσεως τῶν Μαθηματικῶν εἶναι ἰδιαίτερα σημαντικὲς ὄχι μόνον γιὰ τὰ Μαθηματικὰ ἀλλὰ καὶ γι' αὐτὴ γενικὰ τὴν Φιλοσοφία. Εἶναι δύσκολο νὰ προβλέψη κανεὶς τὶς προοπτικές, ποὺ διανοίγονται στὴν Φιλοσοφία μὲ τὰ αὐτόχρημα ἐπαναστατικὰ ἐπιτεύγματα, εἰς τὰ ὁποῖα ἔφθασεν ἡ σχετικὴ ἔρευνα. Οἱ περιεχόμενες στὸν προκείμενο πρῶτο τόμο μονογραφίες εἶναι συντεταγμένες μὲ ἐξαιρετικὴ ἐπιστημονικὴ φροντίδα καὶ παρέχουν μιὰ πλήρως κατατοπιστικὴ εἰκόνα γιὰ τὴν ἐξέλιξη τῶν ἐξεταζομένων κλάδων. Προβαίνοντες στὴν παρουσίαση τοῦ τόμου αὐτοῦ τῆς «*Σύγχρονης Φιλοσοφίας*» θὰ ἐπιμείνωμε στὴν διεξοδικώτερη ἀνάλυση ἐκείνων μόνον τῶν ἄρθρων, ὅσα δὲν ἐξετάζονται στὴν βιβλιοκρισία, τὴν περιλαμβανόμενη στὸ γνωστὸ φιλοσοφικὸ περιοδικὸ «Les Études Philosophiques» 4 (1972) 533-37 (J. Largeault).

Τὸ πρῶτο ἄρθρο φέρει τὸν τίτλο *Λογικὴ καὶ Φιλοσοφία* (J. Hintikka, σελ. 3-30) καὶ ἀφορᾶ εἰς θέματα τῆς συγχρόνου ἐρεύνης ποὺ εὑρίσκονται στὴν συνοριακὴ γραμμὴ τῆς Τυπικῆς Λογικῆς καὶ τῆς λοιπῆς Φιλοσοφίας. Τέτοια θέματα εἶναι : Ἡ λογικὴ Σύνταξη, ἡ λογικὴ Σημαντικὴ καὶ ἡ Πραγματιστική. Ἀκολουθεῖ τὸ ἄρθρο *Πρόσφατες ἀναπτύξεις στὴν φιλοσοφικὴ Λογικὴ* (N. Rescher, σελ. 31-40), εἰς τὸ ὁποῖον ἐκτίθεται ἡ ἐπισκόπηση κλάδων τῆς Λογικῆς σὲ κατευθύνσεις στὶς ὁποῖες παίζει ρόλον ἡ φιλοσοφικὴ θεώρηση. ῞Ενας τέτοιος κλάδος εἶναι ἡ Λογικὴ τῆς φυσικῆς Γλώσσης σὲ συσχέτιση μὲ τὴν ἰσχὺ τῶν νόμων τοῦ διαλογίζεσθαι σ' αὐτήν. Ἀπὸ τὸν συγγραφέα τοῦ ἄρθρου διατυπώνονται ἀκόμη σκέψεις γιὰ τὴν προοπτικὴ ποὺ ἐπιφυλάσσεται στὶς σχετικὲς ἔρευνες. Τὸ ἑπόμενο ἄρθρο ἀναφέρεται στὴν λεγόμενη *Προθετικὴ Λογικὴ* (H. Veatch, σελ.

41-48) καὶ ἔχει ὡς θέμα μιὰ σὲ εὐρεῖα ἔννοια ὑπερβατικὴ Λογική· πρόκειται γιὰ μιὰ ἔκθεση ἀπὸ ἔρευνες γύρω σὲ θέματα, ὅπως εἶναι οἱ πραγματικοὶ ὁρισμοὶ καὶ οἱ ἀναγκαῖες ἀλήθειες γιὰ τὸν πραγματικὸ κόσμο. Ὁ ὅρος π ρ ο θ ε τ ι κ ὴ προέρχεται ἀπὸ τὸν τρόπο ποὺ μερικὰ εἴδη λογικῶν μορφῶν προσαρμόζονται στὴν σημασία ἢ τὴν πρόθεση (τὸν σκοπὸ) ποὺ ὡρισμένα εἴδη ἀντικειμένων ἔχουν. Σὲ ἄλλο ἄρθρο, ποὺ ἔχει τὸν τίτλο *Σημαντική, ἀναλυτικὴ Ἀλήθεια καὶ ἡ νέα Τροπικὴ Λογικὴ* (R. Martin, σελ. 44-61), ἐκτίθενται διάφορα θέματα τῆς σύγχρονης φιλοσοφικῆς Λογικῆς (φυσικὴ Γλῶσσα) μὲ ἰδιαίτερη ἔμφαση στὴν ἔννοια τῆς ἀναλυτικῆς Ἀληθείας. Ἐδῶ ὁ συγγραφεὺς προβαίνει σὲ κριτικὴ τῶν ἀπόψεων ποὺ κυριαρχοῦν στὰ θέματα αὐτά. Τὰ νεώτερα ἐπιτεύγματα τῆς *Θεωρίας τῶν Προτύπων* (Model Theory) ἀναπτύσσει τὸ ἑπόμενο ἄρθρο (A. Robinson, σελ. 61-73) ξεκινώντας ἀπὸ τὶς ἀπαρχὲς τῆς θεωρίας αὐτῆς· πρόκειται γιὰ τὸν κλάδον ἐκεῖνο τῆς μαθηματικῆς Λογικῆς, ποὺ ἐξετάζει τὴ συσχέτιση ἀνάμεσα σὲ σύνολα ἀπὸ προτάσεις ἐκφραζόμενες σὲ ὡρισμένη Τυπικὴ Γλῶσσα καὶ σὲ σύνολα ἀπὸ δομὲς στὶς ὁποῖες οἱ προτάσεις ἐκεῖνες ἀληθεύουν, ἀλλιῶς ἰσχύουν. Στὴ συνέχεια δίνεται μιὰ *Σύνοψη τῶν τελευταίων ἐργασιῶν στὴν Πολυσήμαντη Λογικὴ* (N. Rescher, σελ. 74-86), εἰς τὴν ὁποία ἐξετάζεται καὶ ἡ σχέση μιᾶς πολυσήμαντης Λογικῆς μὲ τὸν Ἐ ν ο ρ α τ ι σ μ ὸ (Intuitionismus), καθὼς καὶ οἱ ἐφαρμογές της στὴν Φυσικὴ καὶ στὴν Θεωρία τῶν Πληροφοριῶν. Ἰδιαίτερο ἄρθρο ἀφιερώνεται στὴν *Τροπικὴ Λογικὴ* (R. B. Marcus, σελ. 87-101). Ὅπως εἶναι γνωστόν, ἡ Τροπικὴ Λογικὴ ἐρευνᾶ τὶς λογικὲς σχέσεις ἀνάμεσα σὲ προτάσεις ποὺ σχετίζονται μὲ τὴν λογικὴ ἀναγκαιότητα καὶ τὴν λογικὴ δυνατότητα. Ἐδῶ μνημονεύεται καὶ ἡ προσπέλαση τῆς Σημαντικῆς μιᾶς Τροπικῆς Λογικῆς μὲ τὴν Θεωρία τῶν Προτύπων, προσπέλαση ποὺ ὑπῆρξε τὸ ἀντικείμενο τῆς ἔρευνας πολλῶν σοφῶν. Ἡ *Πραγματιστική*, ἕνας ἀπὸ τοὺς τρεῖς κλάδους, ποὺ συναντοῦμε στὴν ἔρευνα τῆς Γλώσσης —κλάδος, ἂς σημειωθῆ, ποὺ δὲν εἶχε ἀκριβολογημένη τεχνικὴ δομὴ πρὶν ἀπὸ τὸ 1959— εἶναι τὸ ἀντικείμενο τοῦ ἄρθρου ποὺ ἀκολουθεῖ (R. Montague, σελ. 102-122). Ἐδῶ ὁ συγγραφεὺς διατυπώνει ἰδική του, γιὰ πρώτη φορὰ δημοσιευόμενη, ἀνάλυση τῆς ἐννοίας τῆς Πραγματιστικῆς σὲ σχέση μὲ ἕνα πλῆθος ἀπὸ εἰδικὲς περιπτώσεις, σὲ πολλὲς ἀπὸ τὶς ὁποῖες σημαντικὸ χαρακτηριστικὸ εἶναι μιὰ διαπραγμάτευση τῶν λεγομένων π ο σ ο δ ε ι κ τ ῶ ν (Quantifiers). Ἡ *Χρονικὴ Λογική* (N. Rescher, σελ. 123-134), ἡ *Τελεστικὴ Λογικὴ* (P. Lorenzen, σελ. 135-140), ἡ *Λογικὴ τῆς πρακτικῆς ὁμιλίας* (G. H. von Wright, σελ. 141-167), ὁ *Πρακτικὸς Διαλογισμὸς* (C. Perelman, σελ. 168-170), ἡ *Θεωρία τοῦ Ἐπιχειρήματος* (H. W. Johnstone, jr., σελ. 177-184), ἡ *Ἐρωτηματικὴ Λογικὴ* (T. Kubinski, σελ. 185-189), ἡ *Συνδυαστικὴ Λογικὴ* (H. B. Curry, σελ. 295-307) καὶ ἡ *Κατηγορηματικὴ Λογικὴ καὶ Θεωρία τῶν ἀναδρομικῶν Συναρτήσεων* (H. Hermes, σελ. 254-265), ἀποτελοῦν τὰ ἄρθρα ποὺ ἀκολουθοῦν. Μιὰ ἄλλη σειρὰ ἄρθρων ἀφορᾶ στὶς προόδους τῆς Λογικῆς εἰς τὶς διάφορες χῶρες. Ἔτσι ἔχομε: Τὴν *Λογικὴ στὴν Πολωνία* (J. Slupecki, σελ. 190-201), τὴν *Λογικὴ στὴν Σοβιετικὴ Ρωσία* (A. A. Zinovjev, σελ. 209-219), τὴν *Μαθηματικὴ Λογικὴ στὴν Σοσιαλιστικὴ Δημοκρατία τῆς Ρουμανίας* (C. C. Moisil, σελ. 220-223), τὴν *Λογικὴ στὴν Ἰταλία* (E. Casari, σελ. 224-227), τὴν *Λογικὴ στὴν Ἰαπωνία* (S. Maehara, σελ. 228-231). Ἀκόμα ἐκτίθενται σὲ ἰδιαίτερα ἄρθρα τὸ ἔργο δύο κορυφαίων ἐρευνητῶν τῆς Λογικῆς καὶ τῆς Θεμελιώσεως τῶν Μαθηματικῶν, τοῦ K. Ajdukiewicz (M. Kokoczynska, σελ. 202-208), καὶ τοῦ L. E. J. Brouwer (A. Heyting, σελ. 308-315).

Σὲ κάπως διεξοδικώτερη ἀνάλυση προβαίνομε τώρα γιὰ τὰ λοιπὰ ἄρθρα τοῦ πρώτου τόμου τῆς «*Σύγχρονης Φιλοσοφίας*». Τὸ ἄρθρο *Μαθηματικὰ καὶ Λογικὴ* (A. Church, σελ. 232-240) εἶναι ἐργασία ἀναδημοσιευόμενη ἀπὸ τὸν τόμο τῶν πεπραγμένων «Λογική, Μεθοδολογία καὶ Φιλοσοφία τῆς Ἐπιστήμης» ἑνὸς διεθνοῦς Συνεδρίου τοῦ 1960, τόμο ἐκδιδόμενον ἀπὸ τοὺς E. Nagel, P. Suppes καὶ A. Tarski (Stanford Univ. Press). Ἡ ἐργασία αὐτὴ δὲν ἀναφέρεται στὶς σύγχρονες τάσεις τῆς Λογικῆς καὶ τῶν Μαθηματικῶν, ἀλλὰ σ' ἕνα παλαιότερο πρόβλημα, ποὺ θὰ ἠμποροῦσε νὰ χαρακτηρισθῇ ὡς κλειστὸ ἢ τουλάχιστον ὡς εὑρισκόμενο σὲ ἀνάπαυλα. Πρόκειται γιὰ τὸ πρόβλημα, κατὰ πόσον ἡ Λογικὴ προηγεῖται ἀπὸ τὰ Μαθηματικά. Σύμφωνα μὲ μιὰ ἄποψη, τὴν λογικιστική, ἡ Λογικὴ καὶ τὰ Μαθηματικὰ δὲν εἶναι δύο διάφοροι γνωσιολογικοὶ κλάδοι, ἀλλὰ ἔχουν σχέση ὅπως τὸ «προηγούμενο» καὶ τὸ «ἑπόμενο» μέρος ἑνὸς καὶ τοῦ αὐτοῦ κλάδου. Κατὰ τὴν ἄποψη αὐτή, τὰ Μαθηματικὰ ἠμποροῦν νὰ παραχθοῦν ἐντελῶς ἀπὸ τὴν καθαρὴ Λογικὴ δίχως τὴν προσθήκη καμμιᾶς ἄλλης εἰδικῆς παραδοχῆς (ὑποθέσεως). Σύμφωνα πάλιν μὲ μιὰ ἄλλη ἄποψη, τὴν ἀξιωματική, ἡ Λογικὴ προηγεῖται ἀπὸ τὰ Μαθηματικὰ ὡς μιὰ διάφορη ἐπιστήμη ἀπὸ τὰ τελευταῖα, ἀφοῦ σὲ κάθε σύστημα μαθηματικῶν ἀξιωμάτων συνάγομε τὶς προτάσεις μὲ τὴν βοήθεια τῆς Λογικῆς. Ἡ ἀπάντηση τώρα στὸ ἐρώτημα «τί εἶναι Λογική» εἶναι ἀπαραίτητη γιὰ τὸν ἀκριβῆ προσδιορισμὸ τοῦ προβλήματος. Ἀναφορικὰ μὲ μιὰ διασάφηση μᾶλλον παρὰ ὁρισμό, Λογικὴ εἶναι μιὰ θεωρία παραγωγικοῦ διαλογισμοῦ μαζὶ μὲ ὅ,τι ἀπαιτεῖται εἰς τὴν Γλῶσσα ἢ εἰς τὴν Μεταγλῶσσα γιὰ τὴν πληρότητα, τὴν γενικότητα καὶ τὴν ἁπλότητα τῆς ἐν λόγω θεωρίας. Ἡ δοθεῖσα διασάφηση γιὰ τὸν ὅρο Λογικὴ εἶναι, φυσικά, εὐρύτερη στὴν ἔννοια ἀπὸ τὴν παραδοσιακή. Γιὰ τὸν ἐπιδιωκόμενο ἐδῶ σκοπὸ εἶναι πρόσφορο νὰ θεωρήσῃ κανεὶς ὡς Γλῶσσα ἕνα σύνολο ἀπὸ πρωταρχικὰ σύμβολα, ἀπὸ κανόνες μορφώσεως καὶ σημασίες γιὰ τὶς ἐκφράσεις τῆς Γλώσσης. Ἔτσι, οἱ κανόνες συμπερασμοῦ δὲν ἀποτελοῦν συστατικὸ στοιχεῖο τῆς Γλώσσης, ἀλλ' ἀνήκουν σὲ θεωρία παραγωγικοῦ διαλογισμοῦ γιὰ τὴν Γλῶσσα σὲ τρόπο, ὥστε νὰ εἶναι δυνατοὶ διάφοροι κανόνες συμπερασμοῦ γιὰ μιὰ καὶ τὴν αὐτὴ Γλῶσσα. Ὡστόσο, πρέπει νὰ παρατηρηθῇ, ὅτι ὁ ὅρος Γλῶσσα χρησιμοποιεῖται ἀπὸ τοὺς Λογικιστὰς ὄχι σπάνια καὶ ὑπὸ τὴν ἔννοια, ὅτι γιὰ τὸν καθορισμό του, μαζὶ μὲ τὰ ἀνωτέρω αἰτηθέντα, πρέπει νὰ δίνωνται καὶ οἱ κανόνες συμπερασμοῦ (ἢ μετασχηματισμοῦ). Ἂν περιορισθοῦμε στὴν ἄνω ἀσθενέστερη σημασία τοῦ ὅρου Γλῶσσα, εἶναι φανερό, ὅτι ἡ Λογικὴ εἶναι κάτι τὸ προαπαιτούμενο γιὰ τὰ Μαθηματικὰ καὶ ἔτσι δικαιώνεται κατὰ ἕνα μέρος ἡ θέση τῶν Λογικιστῶν, ποὺ ζητοῦν ν' ἀναγάγουν τὰ Μαθηματικὰ στὴν Λογική, ἀφοῦ ὁ παραγωγικὸς διαλογισμὸς εἶναι «ἐκ τῶν ὧν οὐκ ἄνευ» γιὰ τὰ Μαθηματικά. Στὴ θέση ὅμως αὐτὴ τῶν Λογικιστῶν ὑπάρχουν βάσιμοι ἀντιρρήσεις, ἀπὸ τὶς ὁποῖες ὁ συγγραφεὺς τοῦ ἄρθρου αὐτοῦ ἀναφέρει τὶς τρεῖς κυριώτερες. Εἶναι ἐξ ἄλλου ἀκριβές, ὅτι γιὰ τὴν θεμελίωση τῆς Λογικῆς εἴτε τῶν Μαθηματικῶν ὡρισμένες προϋποθέσεις γίνονται δεκτὲς ἀπὸ τὴν ἐνόραση, χωρὶς ἄλλη ἑδραίωση. Ἡ ἀναγωγὴ στὸ ἐλάχιστο τῶν προϋποθέσεων αὐτῶν εἶναι κάτι τὸ ἐπιθυμητὸ μιὰ καὶ εἶναι ἀδύνατη ἡ πλήρης ἐξαφάνισή τους. Τὸ πῶς θὰ καλέσωμε τὶς ἐλάχιστες αὐτὲς προϋποθέσεις, —λογικὲς εἴτε μαθηματικὲς ἢ καὶ τίποτε ἀπὸ τὰ δύο— εἶναι πιὰ ζήτημα ἁπλῆς ὁρολογίας.

Τὸ ἑπόμενο ἄρθρο *Λογικὴ καὶ Ὀντολογία* (G. Hasenjaeger, σελ. 241-249) πραγματεύεται τὴν ἄμεση σχέση ποὺ ὑπάρχει ἀνάμεσα στὴν Λογικὴ καὶ τὴν Ὀντολογία. Στὴν ὕπαρξη τῆς σχέσεως αὐτῆς ὁδηγεῖται κανεὶς ἀμέσως ἀπ' αὐτὸν τὸν ὁρισμὸ τῆς Λογικῆς ὡς τῆς ὁλότητος τῶν προτάσεων ποὺ ἀληθεύουν «σὲ κάθε δυνατὸ» κόσμο, ἄρα καὶ στὸν πραγματικό. Μαζὶ μὲ τὸν Leibniz, ὀπαδὸς τοῦ ὁρισμοῦ αὐτοῦ εἶναι καὶ ὁ σύγχρονος φιλόσοφος τῆς Σχολῆς τοῦ Marburg, ὁ H. Scholz. Ὡστόσο, ἡ ἀμεσότης τῆς ἐν λόγω σχέσεως δὲν μᾶς ἀπαλλάσσει ἀπὸ ὡρισμένα ἐρωτήματα. Γιατί, ἡ ἀπαίτηση ποὺ διατυπώνεται στὸν ὁρισμὸ αὐτὸν μὲ τὴν ἔκφραση «σὲ κάθε δυνατὸ κόσμο» δὲν μᾶς παρέχει τὴν δυνατότητα γιὰ ἕνα «ἔξωθεν» βάσιμο ἐπιχείρημα ἀναφορικὰ μὲ τὴν δικαιολόγηση τῆς ἀνάγκης γιὰ τὴν ἰσχὺ τῶν λογικῶν νόμων μέσα στὸν πραγματικὸ κόσμο. Ὁ συγγραφεὺς τοῦ παρόντος ἄρθρου, μὲ μιὰ προσεκτικὴ χρήση τῆς ἄνω ἐκφράσεως καὶ μέσα στὰ ὅρια τῶν μεταγλωσσικῶν ὑποθέσεων ποὺ ὑποδεικνύει, κατορθώνει νὰ κάνη κατανοητὴ τὴν μνημονευθεῖσα ἀνάγκη, δηλαδὴ τὴν ἀνάγκη γιὰ τὴν ἰσχὺ τῶν λογικῶν νόμων μέσα στὸν πραγματικὸ κόσμο.

Οἱ *Παρατηρήσεις ἐπάνω σὲ προβλήματα τῶν Μαθηματικῶν στὴ Διάσκεψη τῶν διακοσίων χρόνων τοῦ Princeton* (K. Goedel, σελ. 250-253) εἶναι δημοσίευση, μὲ μερικὲς ἀλλαγές, μιᾶς ὁμιλίας ποὺ δόθηκε τὸ 1946 ἀπὸ τὸν συγγραφέα. Ἐδῶ ὁ Goedel εἰσηγεῖται μιὰ νέα ἔννοια, τὴν ἔννοια τῆς μαθηματικῆς ὁριστότητος (Definability), ἀναχωρώντας ἀπὸ μερικὲς ἀπόψεις ἐνορατικῆς φύσεως. Τὰ ἑξῆς προβλήματα προκύπτουν ἀπὸ τὴν εἰσαγωγὴ τῆς νέας αὐτῆς ἐννοίας: Πρῶτον, ὅτι τὰ σύνολα ποὺ ὁρίζονται σύμφωνα μὲ τὴν ἔννοια αὐτὴ δὲν εἶναι βέβαιο, ἂν ὑπακούουν στὰ ἀξιώματα τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων. Δεύτερον, ὅτι δὲν εἶναι βέβαιο, ἂν οἱ τακτικοὶ ἀριθμοί, ποὺ ἀναγκαιοῦν γιὰ τὸν ὁρισμὸ ὅλων τῶν συνόλων ἀπὸ ἀκεραίους καὶ ποὺ ὁρίζονται σύμφωνα μὲ τὴν ἄνω ἔννοια, ἔχουν ἄνω πέρας τὸν ὑπερπεπερασμένο τακτικὸ ἀριθμὸ ω_1. Ἀναφορικὰ μὲ τὸ πρῶτο πρόβλημα, ὁ συγγραφεὺς διατυπώνει τὴν ὑπόθεση, ὅτι ἡ ἀπάντηση πρέπει νὰ εἶναι καταφατική, ἐνῶ γιὰ τὸ δεύτερο πρόβλημα ἀμφιβάλλει κατὰ πόσον θὰ καταστῆ ποτὲ δυνατὸν ν' ἀποδειχθῆ, ὅτι τὸ ὑπάρχον ἄνω πέρας εἶναι πραγματικὰ ὁ ὑπερπεπερασμένος ἀριθμὸς ω_1 ὅπως τοῦτο συμβαίνει εἰς τὰ λεγόμενα κατασκευάσιμα σύνολα. Πέραν τούτων ὁ συγγραφεὺς εἰκάζει, ὅτι ἡ καταφατικὴ ἀπάντηση εἰς τὸ πρῶτο πρόβλημα θέλει ὁδηγήση σὲ μιὰ ἀκόμη, καὶ μάλιστα ἁπλούστερη, ἀπόδειξη γιὰ τὸ συμβιβαστὸ τοῦ λεγομένου ἀξιώματος ἐπιλογῆς.

Τὰ ἐπιτεύγματα τῆς δεκαετίας 1956-1966 ἐπάνω στὸ πρόβλημα τῆς συμβιβαστότητος τῶν τυποποιημένων (φορμαλιστικῶν) μαθηματικῶν θεωριῶν σύμφωνα μὲ τὴν ἀξιωματικὴ μέθοδο, ἐκτίθενται στὸ ἄρθρο *Foundations of Mathematics: Consistency* (A. Kino, σελ. 266-274). Ὅπως εἶναι γνωστόν, τυποποιημένα Μαθηματικὰ εἶναι ἐκεῖνα τὰ ὁποῖα ἀνάγονται σὲ ἕνα σύστημα τύπων μὲ σύμβολα καὶ κανόνες γιὰ τὴν παραγωγὴ τῶν τύπων αὐτῶν ἀπὸ ὡρισμένα ἀξιώματα. Στὸ σύστημα αὐτὸ τύπων, στὸ ὁποῖον γίνεται ἀφαίρεση ἀπὸ τὴν σημασία των, ἀσκεῖται μαθηματικὴ ἔρευνα —αὐτὴ ποὺ καλοῦμε Θεωρία ἀποδείξεων, ἀλλιῶς Μεταμαθηματικά. Ἕνα βασικὸ πρόβλημα τῶν Μεταμαθηματικῶν εἶναι ἡ ἀπόδειξη τῆς συμβιβαστότητος τῶν ἀξιωμάτων τῆς ὑπ' ὄψη θεωρίας. Κατὰ τὸν ἱδρυτὴ τῆς νεώτερης ἀξιωματικῆς κατευθύνσεως, τὸν D. Hilbert, ἡ ἀπόδειξη τῆς συμβιβαστότητος ἀνεμένετο νὰ γίνη μὲ τὴν λεγόμενη πεπερασμένη (finitary) μέθοδο σὲ τρόπο, ὥστε νὰ μὴ γεννιέται καμμιὰ ἀμφιβολία ἀναφορικὰ μὲ τὶς ἀποδεικτικὲς παραγωγὲς στὸ θεωρούμενο τυπικὸ σύστημα. Ὁ συνήθης τρόπος γιὰ μιὰ τέτοια ἀπόδειξη συμβιβαστότητος συνίσταται στὴν κατασκευὴ καταλλήλου προτύπου (μοντέλου) τῆς θεωρίας μέσα σὲ μιὰ ἄλλη θεωρία, ὁπότε βέβαια ἡ ἀποδεικνυομένη συμβιβαστότης καθίσταται σχετική. Ἡ μέθοδος αὐτὴ δὲν ἐφαρμόζεται φυσικὰ σ' ὁλόκληρη τὴν Ἀριθμητικὴ ἢ τὴν Ἀνάλυση, θεωρίες μέσα στὶς ὁποῖες δὲν ἔχει ἰσχὺν ἡ ἀπόδειξη μιᾶς σχετικῆς συμβιβαστότητος. Ὁ K. Goedel ἀπέδειξεν ὅμως, τὸ 1931, ὅτι ἡ συμβιβαστότης τῶν ἀξιωμάτων τῆς Ἀριθμητικῆς ἢ τῆς Ἀναλύσεως δὲν εἶναι δυνατὲς μέσα στὶς ἴδιες αὐτὲς θεωρίες. Ἔτσι, τὸ περίφημο θεώρημα Goedel ἀπεδείκνυε τὸ μὴ πραγματοποιήσιμο τοῦ ἀρχικοῦ προγράμματος τοῦ Hilbert. Ἀλλὰ μὲ τὴν πρόσληψη καὶ τῆς «ὑπερπεπερασμένης ἐπαγωγῆς» εἰς τὰ δεδομένα τῆς πεπερασμένης μεθόδου, ὁ Gentzen κατώρθωσεν, ὀλίγον ἀργότερα (τὸ 1936), νὰ ἀποδείξη τὴν συμβιβαστότητα τῆς Ἀριθμητικῆς. Πρόδηλον ἦταν λοιπὸν νὰ ὑποθέση κανείς, ὅτι καὶ ἡ ἀπόδειξη τῆς συμβιβαστότητος γιὰ τὴν Ἀνάλυση θὰ ἠμποροῦσε νὰ ζητηθῆ μὲ κάποια ἐπέκταση τῆς πεπερασμένης μεθόδου. Ἀκριβῶς τὸ παρὸν ἄρθρον ἀποσκοπεῖ στὸ νὰ σκιαγραφήση τὶς γενόμενες τελευταῖες ἔρευνες ἐπάνω στὸ πρόβλημα τῆς συμβιβαστότητος γιὰ τὴν Ἀνάλυση.

Σχετικὸ μὲ τὶς ἐργασίες γιὰ τὴν θεμελίωση τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων εἶναι τὸ ἄρθρο ποὺ ἀκολουθεῖ μὲ τὸν τίτλο *Foundations of Set Theory* (H. Putnam, σελ. 275-285). Μαζὶ μὲ τὰ ἐξαγόμενα γιὰ τὴν θεμελίωση μνημονεύονται στὴν παροῦσα ἔκθεση καὶ τὰ ὀνόματα τῶν πιὸ ἀντιπροσωπευτικῶν ἐρευνητῶν. Στὸ διάστημα τῆς δεκαετίας, ποὺ ἀναφέρεται ἡ *«Σύγχρονη Φιλοσοφία»* καὶ μάλιστα τὸ 1963, ἡ ἀπόδειξη ποὺ ἔκανε ὁ P. J. Cohen τῆς ἀνεξαρτησίας τῆς λεγόμενης ὑποθέσεως τοῦ συνεχοῦς, ἔθεσε τὸ πρόβλημα τῆς θεωρουμένης θεμελιώσεως ἐπάνω σὲ τελείως νέα βάση. Δὲν εἶναι ἔξω τῆς πραγματικότητος τὸ νὰ εἰπῆ κανείς, ὅτι τόσον τὸ ἀποτέλεσμα ὅσον καὶ οἱ μέθοδοι τῆς ἀποδείξεως τοῦ Cohen εἶχαν ἐπαναστατικὴ ἐπίδραση γιὰ τὴν θεμελίωση τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων.

Μὲ τὴν θεμελίωση τῶν Μαθηματικῶν μὲ βάση τὶς κατηγορίες ἀσχολεῖται τὸ ἄρθρο *Foundations of Mathematics, Category Theory* (S. Mac Lane, σελ. 284-294). Ἡ σχετικὰ νέα ἔννοια τῆς κατηγορίας ὀφείλεται στὸν ἴδιον τὸν συγγραφέα τοῦ ἄρθρου ὅπως καὶ στὸν μαθηματικὸ Eilenberg. Ἡ ἔννοια τῆς κατηγορίας ξεκίνησεν ἀπὸ ἀντικείμενα, ὅπως οἱ «ὁμάδες» ἢ οἱ «χῶροι» καὶ οἱ «ἀπεικονίσεις» αὐτῶν, ποὺ τὶς καλοῦμε μορφισμούς, τῶν ὁποίων κάθε μία ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα ἀντικείμενο ὡς περιοχὴ καὶ ἕνα ἄλλο ὡς συμπεριοχή. Ἕνα διατεταγμένο ζεῦγος μορφισμῶν συντίθεται ἔτσι, ὥστε ἡ σύνθεσή τους νὰ εἶναι πάλιν μορφισμός, μὲ περιοχὴ ἐκείνη τοῦ πρώτου μορφισμοῦ τοῦ ζεύγους καὶ συμπεριοχὴ ἐκείνη τοῦ δευτέρου. Μὲ τοὺς ὅρους, ὅμως, «ἀντικείμενο», «μορφισμός», «περιοχή», «συμπεριοχή» καὶ «σύνθεση», ποὺ ἠμποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ὡς πρωταρχικοὶ ὅροι (ὅροι δίχως ὁρισμό), ὁ ὁρισμὸς ποὺ δόθηκε παραπάνω γιὰ τὴν κατηγορία εἶναι ἀνεξάρτητος ἀπὸ τὴν Θεωρία τῶν Συνόλων. Γιὰ τὴν θεμελίωση τώρα τῶν Μαθηματικῶν, πρῶτος ὁ Lawvere ἐπρότεινεν, ὅπως ἀντὶ νὰ προσπαθῆ κανεὶς νὰ ὁρίση τὶς κατηγορίες μὲ βάση τὰ «σύνολα» καὶ τὶς «κλάσεις», εἶναι δυνατὸν νὰ ἀντιστρέψη τὴν πρόβαση καὶ νὰ ὁρίση τὰ σύνολα μὲ βάση τὶς κατηγορίες. Πῶς γίνεται αὐτὸ καὶ ποιὰ ἀξιώματα (ὑποθέσεις) ἀπαιτοῦνται γιὰ τὸν σκοπὸ αὐτόν, ἐκθέτει λεπτομερῶς ὁ συγγραφεὺς στὸ προκείμενο ἄρθρο.

Τὰ ἑπόμενα δύο ἄρθρα γιὰ τὸν Ἐνορατισμὸ στὰ Μαθηματικὰ (*Intuitionism in Mathematics*, A. Heyting, σελ. 316-323) καὶ τὴν τυποποίηση τοῦ Ἐνορατισμοῦ (*The Formalization of Intuitionism*, J. Myhill, σελ. 324-342), ἀναφέρονται στὴν μαθηματικὴ ἐκείνη Σχολὴ ποὺ εἶχεν ἀρχηγὸ τὸν L. E. J. Brouwer. Βασικὴ ἔννοια τῆς Σχολῆς αὐτῆς εἶναι ἡ ἐ ν ό ρ α σ η, τὴν ὁποίαν οἱ ὀπαδοί της θεωροῦν ὡς μιὰ a priori κατασκευαστικὴ δραστηριότητα τῆς ἀντιλήψεώς μας. Γιὰ τοὺς Ἐνορατικοὺς εἶναι ἀδύνατον νὰ διαστείλη κανεὶς τὴν δόμηση τῶν Μαθηματικῶν ἀπὸ τὴν ἀπαιτούμενη γι' αὐτὸ δραστηριότητα τοῦ μαθηματικοῦ νοῦ. Δύο ἄλλες γνωστὲς Σχολὲς στὰ Μαθηματικὰ εἶναι οἱ ἤδη μνημονευθεῖσες, ἡ Λογικιστικὴ καὶ ἡ Ἀξιωματική, ποὺ ὅπως καὶ ἡ Ἐνορατικὴ δὲν ἠμποροῦν νὰ ἀξιώσουν, ὅτι ἀποτελεῖ καμμιὰ τὰ μόνα ἀληθινὰ Μαθηματικά. Ὅ,τι ἀπετέλεσεν ἀντικείμενον ἐρεύνης τῶν ὀπαδῶν τῆς Ἐνορατικῆς Σχολῆς στὰ νεώτερα χρόνια, ἦταν κυρίως ἡ ἀναζήτηση γιὰ τὴν ἐξακρίβωση τῆς ἐκτάσεως ποὺ γι' αὐτοὺς ἔχουν οἱ παραδεκτὲς μέθοδοι, ὅπως ἀκόμη ἡ ἔρευνα στὴν κατεύθυνση τῆς τυποποιήσεως — ἔρευνα ποὺ εἶναι ἀπαραίτητη γιὰ νὰ δοθῆ στὴν Σχολὴ αὐτὴ ἡ ἀπαιτούμενη ἀ κ ρ ί β ε ι α. Τὸ πρῶτο ἀπὸ τὰ ἀντικείμενα αὐτά, καὶ γιὰ τὴν ἐπισκοπούμενη δεκαετία, ἐξετάζει μὲ λεπτομέρεια τὸ πρῶτο ἄρθρον τοῦ Ἐνορατισμοῦ στὰ Μαθηματικά, ἐνῶ στὸ δεύτερο ἄρθρο εὑρίσκονται τὰ νεώτερα ἀποτελέσματα ἀναφορικὰ μὲ τὴν τυποποίηση τοῦ Ἐνορατισμοῦ. Τὸ δεύτερο αὐτὸ ἄρθρο ἐξετάζει ἀπὸ τὸ ἕνα μέρος τὸ καθαρὰ φιλοσοφικὸ πρόβλημα τῆς ἑρμηνείας τῶν λογικῶν ἐννοιῶν καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος τὴν ἑρμηνεία τῶν εἰδικὰ μαθηματικῶν ἐννοιῶν τοῦ Ἐνορατισμοῦ. Σήμερα καὶ ὁ Ἐνορατισμὸς ὑπόκειται σὲ εὐρεῖα κλίμακα στὴν ἀξιωματικοποίηση καὶ μ' αὐτὴν στὴν τυποποίηση χάρη στὶς ἔρευνες ποὺ βλέπει κανεὶς νὰ ἐκτίθενται ἐδῶ.

Τὸ τελευταῖο ἄρθρο ἔχει τίτλο ἡ «μὴ ἐκπεφρασμένη» Φιλοσοφία τῶν Μαθηματικῶν (*The Implicit Philosophy of Mathematics*, H. Freudenthal, σελ. 342-68), θέμα ποὺ σπάνια προσελκύει τὸ ἐνδιαφέρον τῶν ἐρευνητῶν. Πρόκειται γιὰ τὶς βασικὲς ἀρχὲς ποὺ διέπουν τὴν μαθηματικὴ σκέψη. Τέτοιο θέμα μαθηματικῆς σκέψεως εἶναι ἡ ἀλληλοδιείσδυση ποὺ παρατηρεῖται στοὺς μαθηματικοὺς κλάδους σὲ τρόπο, ὥστε νὰ γίνωνται ὁλοένα καὶ πιὸ ἀσαφῆ τὰ παραδοσιακὰ ὅρια ποὺ ἐχώριζαν τοὺς κλάδους αὐτούς. Ἐκεῖνο ποὺ συνετέλεσε στὴν ἀλληλοδιείσδυση αὐτὴ εἶναι ἀναμφισβήτητα καὶ ἡ ὑπάρχουσα δυνατότης γιὰ εὐκολώτερη ἐπικοινωνία τῶν ἐρευνητῶν, τῶν ὁποίων ἄλλωστε ὁ ἀριθμὸς ὁλοένα αὐξάνει. Ὡστόσο, πιὸ σημαντικὸς ἀκόμη παράγων εἶναι ἡ συνειδητὴ προσπάθεια γιὰ τὴν ὀργάνωση τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Μέσον γιὰ τὴν ὀργάνωση αὐτὴ εἶναι σήμερα ἡ ἀξιωματικοποίηση καθὼς καὶ ἡ τυποποίηση, ποὺ στὴν οὐσία ἰσοδυναμεῖ μὲ τὴν ἐκ νέου διαμόρφωση τῆς μαθηματικῆς Γλώσσης. Ἡ φιλοσοφία ποὺ ἐνυπάρχει σὲ μιὰ νέα μαθηματικὴ ἐπινόηση εἶναι φυσικὸ νὰ μὴν γίνεται κατανοητὴ ἀπὸ τὸν ἴδιο τὸν δημιουργό της, ἀλλὰ ἀπὸ ἐκεῖνον ποὺ προσπαθεῖ ἔπειτα νὰ διεισδύση στὴν οὐσία της σύμφωνα μὲ τὴν ἰδική του σκοπιά. Ἔτσι, ἡ Φιλοσοφία μέσα στὰ Μαθηματικὰ γίνεται βαθύτερα κατανοητὴ ὄχι τόσον ἀπ' αὐτὸν τὸν ἐπινοητὴ μιᾶς μαθηματικῆς θεωρίας, ὅσο ἀπὸ τοὺς μαθηματικοὺς τῆς ἑπομένης γενεᾶς. Ὁ συγγραφεὺς τοῦ προκειμένου ἄρθρου διατυπώνει τὴν γνώμη, ὅτι ἡ φιλοσοφία τῆς μαθηματικῆς σκέψεως γιὰ τὴν ἑπομένη γενεὰ θὰ διαφέρη ἀπὸ τὴν σημερινή, ὅπως ἄλλωστε τὸ ἴδιο συνέβαινε καὶ στὸ παρελθόν. Ἐκεῖνο ποὺ ὁ συγγραφεὺς ἐπιδιώκει μὲ τὴν ἔκθεσή του, εἶναι κυρίως ἡ διαπραγμάτευση μερικῶν ἀ ρ χ ῶ ν, ποὺ χαρακτηρίζουν τὴν μαθηματικὴ σκέψη τῆς ἐποχῆς του, κι αὐτὸ μὲ τὴν κατὰ τὸ δυνατὸν ἀποφυγὴ εἰδικῶν τεχνικῶν ὅρων.

Ἡ καθολικὴ εἰκόνα ποὺ δίνει στὸν ἀναγνώστη ἡ μελέτη τοῦ πρώτου τόμου τῆς *«Σύγχρονης Φιλοσοφίας»*, ἀναφορικὰ μὲ τὶς ἔρευνες γιὰ τὴν Λογικὴ καὶ τὴν θεμελίωση τῶν Μαθηματικῶν στὴν δεκαετία 1956-66, εἶναι πραγματικὰ ἀριστοτεχνικὴ καὶ πλήρης σὲ τρόπο, ὥστε νὰ εἶναι πέρα γιὰ πέρα δικαιολογημένος ὁ χαρακτηρισμὸς ποὺ διετυπώσαμε στὴν ἀρχή, ὅτι τὸ ἔργον αὐτὸ ἀποτελεῖ ἕνα πολύτιμον ὁδηγὸ καὶ ἕνα βοήθημα γιὰ καθένα ἐνδιαφερόμενο γιὰ τὶς νεώτερες προόδους στὴν Φιλοσοφία τῶν Μαθηματικῶν. Ἐξ ἄλλου τὸ ἔργον παρέχει, μαζὶ μὲ τὴν ἐνημέρωση, τὸ ἔδαφος καὶ τὴν δυνατότητα στὸν ἐρευνητὴ γιὰ τὴν περαιτέρω συνέχιση καὶ τὴν ἐπίλυση προβλημάτων ποὺ μέχρι σήμερα μένουν ἀναπάντητα. Ἐκτὸς ὅμως ἀπὸ τὴν χρησιμότητα, τὸ ἔργον δὲν παύει ν' ἀποτελῆ πρωτίστως ἕνα σημαντικὸν ἀπολογισμὸ γιὰ τὴν δραστηριότητα τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος σ' ἕνα τομέα, ποὺ δίκαια τοποθετεῖται ὡς εἰσαγωγικὸς στὶς σύγχρονες τάσεις καὶ ἔρευνες τῆς Φιλοσοφίας.

Ἀθῆναι

Φίλων Βασιλείου,
τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν

Ν. Γ. Α ὐ γ ε λ ῆ ς, *Ἡ ἔννοια τῆς μαθηματικῆς ἀλήθειας καὶ ἡ ἀπόδειξη τοῦ Goedel. Φιλοσοφικὲς συνέπειες*, Θεσσαλονίκη 1972, 72 σελ.

Μιὰ πολὺ ἐνδιαφέρουσα ἐργασία τοῦ διδάκτορος τῆς Φιλοσοφίας, καὶ τώρα ἐπικ. καθηγητοῦ στὸ Ἀριστοτέλειο Πανεπιστήμιο Θεσσαλονίκης Ν. Αὐγελῆ, ἐκυκλοφόρησε τελευταῖα μὲ τὸν ἄνω τίτλο. Ἡ ἐργασία ἀναφέρεται στὸ περίφημο θεώρημα τοῦ Κ. Goedel, τοῦ ὁποίου ἕνα βασικὸ συμπέρασμα εἶναι ἡ πρόταση, ὅτι σὲ ἕνα λογικοαριθμητικὸ παραγωγικὸ σύστημα ὑπάρχουν πάντοτε ἔννοιες ποὺ δὲν ἠμποροῦν νὰ ὁρισθοῦν καὶ προτάσεις ποὺ δὲν ἐπιδέχονται ἀπόδειξη, οὔτε γιὰ τὴν θέση τους οὔτε γιὰ τὴν ἄρνηση, μέσα στὸ ἴδιο τὸ σύστημα. Εἶναι γνωστὸν πόσον ἐπαναστατικὲς ὑπῆρξαν οἱ συνέπειες τοῦ θεωρήματος ἀναφορικὰ μὲ τὶς δοξασίες ποὺ κυριάρχησαν γιὰ χιλιετίες