Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ • AKADEMIE ATHEN

FORSCHUNGSINSTITUT FÜR
GRIECHISCHE PHILOSOPHIE

Á. SZABÓ - E. MAULA

# ENKLIMA - ΕΓΚΛΙΜΑ

## UNTERSUCHUNGEN ZUR FRÜHGESCHICHTE DER GRIECHISCHEN ASTRONOMIE, GEOGRAPHIE UND DER SEHNENTAFELN

ΑΘΗΝΑΙ • ATHEN 1982

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ
ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ
ΚΕΝΤΡΟΝ ΕΡΕΥΝΗΣ ΤΗΣ ΕΛΛΗΝΙΚΗΣ ΓΛΩΣΣΗΣ
ΑΡΙΘΜ. ΕΙΣΑΓ. 2449/1985
ΤΑΞΙΝΟΜΗΣΗ 5/2/1985

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens

ÁRPÁD SZABÓ - ERKKA MAULA

# ΕΓΚΛΙΜΑ. UNTERSUCHUNGEN ZUR FRÜHGESCHICHTE DER ANTIKEN GRIECHISCHEN ASTRONOMIE, GEOGRAPHIE UND DER SEHNENTAFELN

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ · AKADEMIE ATHEN

FORSCHUNGSINSTITUT FÜR
GRIECHISCHE PHILOSOPHIE

Á. SZABÓ - E. MAULA

# ENKLIMA - ΕΓΚΛΙΜΑ

## UNTERSUCHUNGEN ZUR FRÜHGESCHICHTE DER GRIECHISCHEN ASTRONOMIE, GEOGRAPHIE UND DER SEHNENTAFELN

ΑΘΗΝΑΙ · ATHEN 1982

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

© ACADEMY OF ATHENS, ATHENS 1982

PRINTED IN GREECE
BY ATHANASOPOULOS-PAPADAMIS-ZACHAROPOULOS, G.P.
EMM. BENAKI 76, ATHENS (145)

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens

# INHALTSVERZEICHNIS


Ἑλληνικὴ Εἰσαγωγή, τῶν Ἀκαδημαϊκῶν Ἰωάννου Ξανθάκη καὶ Φίλωνος Βασιλείου (Einleitung von Prof. Johannes Xanthakis und Prof. Philon Vassiliou) ..... 5
Vorwort 15
Zur chronologischen Orientierung ..... 17
Einleitung ..... 21

*I. Der Schattenzeiger*

1. Herodot und Anaximandros ..... 33
2. Das Heliotropion ..... 38
3. Die Verdienste des Anaximandros ..... 40
4. Vitruvius ..... 45
5. Die Rekonstruktion nach Vitruvius ..... 56
6. Eratosthenes ..... 64
7. Ptolemaios II 5 ..... 69
8. Die Umkehrung der alten Berechnungen ..... 75
9. Hipparchos ..... 79
10. Verschiedene Approximationen ..... 81
11. Eine vorläufige Zusammenfassung ..... 85
12. Strabon ..... 89
13. Vom Äquator bis zum Nordpol ..... 92
14. Zwei Beispiele aus den 39 Kreisen ..... 95
15. Ein Unterschied zwischen Hipparchos und Ptolemaios 98
16. Das Vorbild des Hipparchos ..... 101
17. Pytheas von Massalia ..... 106
18. Die Messungen des Pytheas ..... 112
19. Zusammenfassung ..... 118
    1. Anaximandros ..... 118
    2. Oinopides ..... 120
    3. Herodot ..... 122
    4. Pytheas ..... 123
    5. Euklid ..... 124
    6. Philon ..... 129
    7. Aristarchos ..... 129
    8. Eratosthenes ..... 130
    9. Hipparchos ..... 131
    10. Strabon-Vitruvius ..... 131
    11. Ptolemaios ..... 132


ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



*II. Der längste Tag*

1. Das Verhältnis des längsten Tages zum kürzesten .... 135
2. Die Umgestaltung des Gnomon-Weltbildes ..... 139
3. Lösung in drei Schritten ..... 144
4. Drei konkrete Fälle ..... 151
5. Berechnungen vor HIPPARCHOS ..... 157
6. Der Begriff *κλῖμα* bei EUDOXOS ..... 170
7. Eine Aufgabe für die künftige Forschung ..... 173
8. Die bisherigen Vermutungen ..... 176
9. EUDOXOS zwischen OINOPIDES und PYTHEAS ..... 182

*III. Winkel, Bogen, Sehnentafeln*

1. Die Winkel in EUKLIDS Geometrie ..... 189
2. Die 360 Grade in der Forschung ..... 195
3. Zodion als Bogenmaß ..... 199
4. Das Problem der Sehnentafeln ..... 209
5. Zwei neuere Versuche ..... 216
6. Einige Vorschläge ..... 223
7. Der Aufbau der Tafeln ..... 228

Schlußwort ..... 241
Antike Quellen ..... 243
Verfasser und Werke ..... 245
Indices ..... 249

Am Ende des Bandes auf Doppelseiten 26 gezeichnete Figuren.

Auf der Titelseite des Bandes: Meridian, Horizont, Äquator, Sommer- und Winterwende, Achse der Welt.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens

# Ε Ι Σ Α Γ Ω Γ Η

Ὁ πανεπιστημιακὸς καθηγητὴς καὶ ἀκαδημαϊκὸς Árpád Szabó μὲ τὸ ἔργο του αὐτό, γραμμένο γερμανικά, μὲ τὴ συνεργασία σὲ ὁρισμένα τμήματα τοῦ Φιλλανδοῦ καθηγητῆ Erkka Maula, διευρύνει τὸ πεδίο τῶν ἐπιστημονικῶν του ἐρευνῶν στὴν Ἀστρονομία καὶ γενικώτερα στὰ Ἐφαρμοσμένα Μαθηματικὰ τῆς ἑλληνικῆς ἀρχαιότητας. Ὕστερα ἀπὸ τὸ περισπούδαστο σύγγραμμά του *Ἀπαρχαὶ τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν*, ποὺ πρωτοεκδόθηκε ἐπίσης γερμανικὰ (1969) καὶ μεταφράσθηκε ἔπειτα σὲ πολλὲς ἄλλες γλῶσσες (οὐγγρικά, ἑλληνικά, γαλλικά, ἀγγλικὰ καὶ ἰαπωνικά), ὁ καθηγητὴς Szabó προβαίνει τώρα στὴ διατύπωση ὁρισμένων νέων ἀπόψεων καθὼς καὶ στὴ διασκευὴ παλαιοτέρων γιὰ τὴν ἀρχαία Ἑλληνικὴ Ἀστρονομία, παρέχοντας ἔτσι μιὰ νέα εἰκόνα σχετικὰ μὲ τὴν ἐξέλιξη τῆς ἀρχαιότατης αὐτῆς ἐπιστήμης.

Καὶ τὸ ἔργο αὐτὸ τοῦ Οὔγγρου καθηγητῆ, ποὺ ἀποδεικνύει βαθειὰ γνώση τῶν ἀρχαίων κειμένων — ἂς σημειωθεῖ ὅτι ὁ ἴδιος ἄρχισε τὴν ἐπιστημονική του σταδιοδρομία ὡς καθηγητὴς τῆς Κλασικῆς Φιλολογίας — εἶναι γραμμένο μὲ μεγάλη ἀκριβολογία καὶ σαφήνεια, ἀρετὲς ποὺ χαρακτηρίζουν ὅλες τὶς ἐπιστημονικὲς ἐργασίες του.

Ἀξίζει ἰδιαίτερα νὰ τονισθεῖ τὸ γεγονός, ὅτι οἱ συγγραφεῖς ἐφιλοδόξησαν ἡ ἔκδοση τοῦ ἔργου αὐτοῦ νὰ γίνει στὴν Ἑλλάδα, τὴν χώρα ὅπου εἶδαν γιὰ πρώτη φορὰ τὸ φῶς οἱ σχετικὲς μὲ τὸ θέμα ἔρευνες. Ἐφιλοδόξησαν μάλιστα ἡ ἔκδοση αὐτὴ νὰ περιληφθεῖ στὰ δημοσιεύματα τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν, τῆς φυσικῆς αὐτῆς διαδόχου τῆς Πλατωνικῆς Ἀκαδημίας.

Πρέπει ἀκόμη νὰ γίνει γνωστό, ὅτι ὁ καθηγητὴς Szabó εἶναι ἀπὸ τὸ 1976 ἀντεπιστέλλον μέλος τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν, καὶ ὅτι τοῦ ἔργου αὐτοῦ ἔχει ἑτοιμασθεῖ ἤδη καὶ γαλλικὴ μετάφραση, ποὺ θὰ κυκλοφορήσει σὲ εὔθετο χρόνο στὴν Γαλλία.

Χάριν τοῦ ἑλληνικοῦ κοινοῦ, ποὺ δὲν γνωρίζει καλὰ τὴ γλώσσα τοῦ πρωτοτύπου, δίνουμε στὰ ἑπόμενα μιὰ κάπως ἐκτενέστερη ἀνάλυση τοῦ περιεχομένου τοῦ ἔργου, καθιστώντας ἔτσι προσιτὲς τὶς κύριες θέσεις του σὲ εὐρύτερο κύκλο ἐνδιαφερομένων.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Τὴν ἔκδοση αὐτὴ ἐπιμελήθηκε μὲ μεγάλο ἐνδιαφέρον ὁ Διευθυντὴς τοῦ Κέντρου Φιλοσοφίας τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν κ. ΛΙΝΟΣ ΜΠΕΝΑΚΗΣ, ποὺ εἶχε ἐπιμεληθεῖ καὶ τὴν ἑλληνικὴ ἔκδοση τῶν *Ἀπαρχῶν τῶν Ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν* (ἔκδοση τοῦ Τεχνικοῦ Ἐπιμελητηρίου τῆς Ἑλλάδος, 1973). Τὸ χειρόγραφο προετοίμασε καὶ τὰ τυπογραφικὰ δοκίμια διόρθωσε ἡ κα REGINA ΕΥΣΤΑΘΙΑΔΗ, Δρ. Ἱστορίας τοῦ Ἐλευθέρου Πανεπιστημίου τοῦ Βερολίνου.

Στὴν ἀρχαιότητα ἡ λέξη *ἔ γ κ λ ι μ α* ἦταν συνώνυμη μὲ τὴν λέξη *κ λ ῖ μ α*. Ὅταν σήμερα λέμε κλίμα, ἐννοοῦμε γενικὰ τὴν μ έ σ η κ α ι ρ ι κ ὴ κ α τ ά σ τ α σ η ἑνὸς τόπου. Γιὰ τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνες ὅμως οἱ λέξεις *κλῖμα* καὶ *ἔγκλιμα* ἦσαν ἐπιστημονικοὶ ὅροι, ποὺ προέρχονταν ἀπὸ τὸ ρῆμα *κλίνω* καὶ εἶχαν τὴ σημασία τῆς κ λ ί σ η ς τ ο ῦ ἄ ξ ο ν ο ς π ε ρ ι σ τ ρ ο φ ῆ ς τῆς γῆς ἀναφορικὰ μὲ δοσμένο τόπο, ποὺ εἶναι ἴση μὲ τὸ γ ε ω γ ρ α φ ι κ ὸ π λ ά τ ο ς. Αὐτό, ὅπως εἶναι γνωστό, εἶναι «ἡ γωνιώδης ἀπόσταση τῆς κατακορύφου ἑνὸς τόπου ἀπὸ τὸν ἰσημερινὸ κατὰ μῆκος τοῦ μεσημβρινοῦ τοῦ τόπου». Τοὺς ἐπιστημονικοὺς αὐτοὺς ὅρους, μὲ τὴ σημασία τῆς κλίσης, τοὺς συναντοῦμε γιὰ πρώτη φορὰ σὲ ἕνα ἀστρονομικὸ κείμενο τοῦ ΑΥΤΟΛΥΚΟΥ, στὸ τέλος τοῦ 4ου αἰώνα π.Χ. Ὡστόσο δὲν εἶναι ἐξακριβωμένο, ἂν οἱ ὅροι αὐτοὶ ἦσαν γνωστοὶ καὶ στὸν ΕΥΔΟΞΟ, δηλαδὴ στὸ πρῶτο μισὸ τοῦ 4ου π.Χ. αἰώνα. Ἐκεῖνο ποὺ εἶναι βέβαιο εἶναι ὅτι ὁ μεγάλος ἀστρονόμος ΙΠΠΑΡΧΟΣ, στὸν 2ο· π.Χ. αἰ., χρησιμοποιοῦσε τοὺς ὅρους *κλῖμα* καὶ *ἔγκλιμα* μὲ τὴν διασαφηνισθεῖσα ἔννοια σὲ ἕνα σχόλιό του στὰ ἔργα τῶν ΕΥΔΟΞΟΥ καὶ ΑΡΑΤΟΥ *(Φαινόμενα)*.

Τὴν ἀφετηρία τῶν ἐρευνῶν, ποὺ περιέχονται στὸν παρόντα τόμο, ἀποτέλεσε ἡ κριτικὴ τοῦ ΙΠΠΑΡΧΟΥ σὲ ἰσχυρισμὸ τῶν ΕΥΔΟΞΟΥ - ΑΡΑΤΟΥ. Σύμφωνα μὲ τὴν κριτικὴ αὐτὴ οἱ τελευταῖοι εἶχαν ὑπολογίσει ἐσφαλμένα τὸ γεωγραφικὸ πλάτος τῶν Ἀθηνῶν. Τὸ γεωγραφικὸ αὐτὸ πλάτος εἶναι $41^0$, ἂν τὸ ὑπολογίσει κανεὶς μὲ τὰ δεδομένα τοῦ ΑΡΑΤΟΥ, ἐνῶ κατὰ τοὺς ὑπολογισμοὺς τοῦ ΙΠΠΑΡΧΟΥ τὸ γεωγραφικὸ πλάτος τῶν Ἀθηνῶν εἶναι $37^0$, μὲ βάση τὰ δικά του διορθωμένα δεδομένα. Δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία ὅτι τὸ ἐξαγόμενο τοῦ ΙΠΠΑΡΧΟΥ πλησιάζει περισσότερο τὴν πραγματικὴ τιμὴ ($38^0$ περίπου).

Ὡστόσο δὲν εἶναι κυρίως τὰ ἐξαγόμενα τῶν ἀρχαίων ἀστρονόμων ($41^0$ ἢ $37^0$) ἐκεῖνα ποὺ κάνουν γιὰ μᾶς ἐνδιαφέρον τὸ κείμενο τοῦ ΙΠΠΑΡΧΟΥ. Πιὸ ἀξιόλογο εἶναι τὸ γεγονός, ὅτι ὁ ΙΠΠΑΡΧΟΣ ἀνακοινώνει ἁπλῶς τὰ δεδομένα τῶν μετρήσεών του καὶ τὰ ἐξαγόμενα τῶν ὑπολογισμῶν του αὐτῶν. Αὐτὸ ἰσχύει καὶ γιὰ τὴν ἀναφορὰ στὰ ἐξαγόμενα τῶν ΕΥΔΟΞΟΥ - ΑΡΑΤΟΥ. Πουθενὰ ὅμως στὸ κείμενό του ὁ ΙΠΠΑΡΧΟΣ δὲν δηλώνει καὶ τὸν τρόπο, μὲ τὸν ὁποῖο φθάνει στὰ ἐξα-

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



γόμενα τῶν ὑπολογισμῶν του. Νεώτεροι ἐρευνητὲς προσπάθησαν κατὰ καιροὺς νὰ εὕρουν, ἂν πραγματικὰ ἦταν δυνατὸν νὰ φθάσουν στὰ ἴδια ἐξαγόμενα μὲ τὰ δεδομένα τοῦ ΙΠΠΑΡΧΟΥ. Ὁ ἔλεγχος αὐτὸς ἦταν ἀπόλυτα ἱκανοποιητικός. Παρὰ ταῦτα εἶχε παραβλεφθεῖ, ὅτι κατὰ τὸν ἔλεγχο αὐτὸν ἐφαρμόσθηκαν νεώτερες μέθοδοι, ποὺ σὲ καμιὰ περίπτωση δὲν θὰ μποροῦσε νὰ εἶχε χρησιμοποιήσει ὁ ΙΠΠΑΡΧΟΣ.

Στὸν παρόντα τόμο ὁ καθηγητὴς SZABÓ ἐπιχειρεῖ ἕνα διάφορο τρόπο ἐλέγχου. Μὲ τὰ δεδομένα τοῦ ΙΠΠΑΡΧΟΥ καταφεύγει στὴ μέθοδο ἑνὸς μεταγενέστερου ἀστρονόμου τοῦ 2ου μ.Χ. αἰ., τοῦ ΚΛΑΥΔΙΟΥ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ. Καὶ τοῦτο, γιατὶ εἶναι πέρα ἀπὸ κάθε ἀμφιβολία γνωστό, ὅτι ὁ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΣ εἶναι ἀκριβῶς συνεχιστὴς τοῦ ἔργου τοῦ ΙΠΠΑΡΧΟΥ. Ἐξ ἄλλου ἡ ὑπολογιστικὴ μέθοδος, ποὺ χρησιμοποιεῖ ὁ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΣ, μᾶς εἶναι γνωστὴ ἀπὸ τὸ περίφημο ἔργο του *Μαθηματικὴ Σύνταξις*.

Μὲ τὸν δρόμο ποὺ ἀκολουθεῖ τώρα ὁ καθηγητὴς SZABÓ καταλήγει στὰ ἑξῆς δύο συμπεράσματα: Πρῶτον, ἡ νέα μέθοδος ἐπανευρίσκει τὰ ἐξαγόμενα τοῦ ΙΠΠΑΡΧΟΥ, ὅπως συνέβη καὶ μὲ τὸν ἔλεγχο τῶν νεώτερων ἐρευνητῶν ποὺ προαναφέραμε. Δεύτερον, ὁ ΙΠΠΑΡΧΟΣ πρέπει νὰ εἶχε ἤδη χρησιμοποιήσει τὴν μέθοδο αὐτὴ κατὰ τὸν ὑπολογισμὸ τοῦ γεωγραφικοῦ πλάτους, παρὰ τὸ ὅτι τοῦτο δὲν ἀποκαλύπτεται στὸ ἔργο του. Ἂς τονισθεῖ ἐδῶ, ὅτι τὸ δεύτερο αὐτὸ συμπέρασμα εἶναι κατὰ τοῦτο οὐσιῶδες, ἐπειδὴ καὶ κατὰ τὴν τελευταία δεκαετία ἀκόμη ὁρισμένοι ἐρασιτέχνες ἀστρονόμοι προσπάθησαν νὰ εὕρουν κάποια ἀρχέγονη ὑπολογιστικὴ μέθοδο ὅμοια ἴσως μὲ αὐτήν, ποὺ θὰ εἶχε χρησιμοποιήσει ὁ ΙΠΠΑΡΧΟΣ. Ἀντίθετα, τὸ δεύτερο συμπέρασμα τοῦ καθηγητῆ SZABÓ καταδεικνύει ὅτι οἱ ὑπολογισμοὶ τοῦ ΙΠΠΑΡΧΟΥ πρέπει κατὰ βάση νὰ εἶναι οἱ ἴδιοι μὲ ἐκείνους τοῦ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ, καὶ ὅτι ἑπομένως ὁ ΙΠΠΑΡΧΟΣ διέθετε ἤδη τὰ ἴδια μαθηματικὰ μέσα, ποὺ χρησιμοποιοῦν μεταγενέστεροί του, ὅπως ὁ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΣ.

Ὡστόσο τὸ ἱστορικὸ πρόβλημα δὲν περιορίζεται μόνο στὸ ἐρώτημα, πῶς γίνονταν οἱ ὑπολογισμοὶ ἀπὸ τὸν ΙΠΠΑΡΧΟ, ὑπολογισμοὶ ἀπὸ τοὺς ὁποίους δὲν διασώθηκαν σὲ μᾶς παρὰ μόνο τὰ δεδομένα καὶ τὰ ἐξαγόμενα. Ἕνα πιὸ ἀξιόλογο ἐρώτημα συνίσταται στὸ ἂν ὁ ΙΠΠΑΡΧΟΣ εἶναι ἢ ὄχι ὁ ἐπινοητὴς τῆς σχετικῆς ὑπολογιστικῆς μεθόδου ἢ μήπως ὁ ἴδιος χρησιμοποίησε μεθόδους, ποὺ ἦσαν κιόλας γνωστὲς σὲ παλαιότερους ἀστρονόμους. Ἀπάντηση στὸ ἐρώτημα αὐτὸ ἐπιχειρεῖται στὸν παρόντα τόμο μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο. Στὸ κείμενο τοῦ ΙΠΠΑΡΧΟΥ ὑποδηλώνονται δύο κυρίως διαφορετικοὶ τρόποι ὑπολογισμοῦ: ἢ δηλαδὴ μπορεῖ κανεὶς νὰ ὑπολογίσει τὸ *κλῖμα* (τὴν κλίση τοῦ ἄξονος περιστροφῆς τῆς γῆς σέ δοσμένο τόπο, ἀλλιῶς τὴν γωνιώδη ἀπόσταση ἀπὸ τὸν ἰσημερινὸ τῆς κατακορύφου τοῦ τόπου κατὰ μῆκος τοῦ μεσημβρινοῦ) μὲ βάση τὴν παρατήρηση ὡρολογιακῆς

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



σκιᾶς, ἢ μπορεῖ νὰ ὑπολογίσει τὸ ὕψος τοῦ πόλου *(τὸ ἔξαρμα τοῦ πόλου)* ἀπὸ τὴν χρονικὴ διάρκεια τῆς μεγαλύτερης ἡμέρας τοῦ ἔτους. Ὅπως εἶναι φυσικό, οἱ δύο αὐτοὶ ὑπολογισμοὶ ὁδηγοῦν στὸ ἴδιο ἐξαγόμενο, ἀφοῦ σὲ δοσμένο τόπο τὸ *κλῖμα* καὶ τὸ *ἔξαρμα τοῦ πόλου* ἔχουν τὸ ἴδιο μῆκος τόξου, τὴν ἴδια γωνία.

Ἡ περαιτέρω ἔρευνα ἀναχωρεῖ ἀπὸ τὴν ὑπόθεση, ὅτι ἀπὸ τοὺς δύο τρόπους ὑπολογισμοῦ παλαιότερος εἶναι ἐκεῖνος ποὺ βασίζεται στὴν παρατήρηση τῆς ὡρολογιακῆς σκιᾶς. Μὲ βάση τὴν ὑπόθεση αὐτὴ τὸ παρὸν ἔργο χωρίζεται σὲ τρία κύρια μέρη. Στὸ πρῶτο ἐρευνᾶται τὸ ἱστορικὸ τῆς ἐπιστημονικῆς παρατήρησης τοῦ μήκους τῆς σκιᾶς τοῦ *γνώμονος*. Τὸ δεύτερο μέρος εἶναι ἀφιερωμένο στὸν τρόπο ὑπολογισμοῦ σύμφωνα μὲ τὴν χρονικὴ διάρκεια τῆς μεγαλύτερης ἡμέρας. Τέλος τὸ τρίτο μέρος ἀποτελεῖ ἱστορικὴ ἔρευνα γιὰ ὅ,τι προαπαιτεῖται καὶ στοὺς δύο τρόπους ὑπολογισμοῦ, δηλαδὴ γιὰ τὸν πίνακα χορδῶν *(κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν)*, ποὺ ὑπάρχει στὸ ἔργο τοῦ ΚΛΑΥΔΙΟΥ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ.

Τὸ πρῶτο μέρος τοῦ βιβλίου περιέχει 19 συνολικὰ ἔρευνες ἀναφορικὰ μὲ τὴν παρατήρηση τῆς μεταβολῆς τῆς σκιᾶς τοῦ γνώμονος. Ὑπενθυμίζεται προπάντων ἐδῶ, ὅτι μὲ τὴν μεσημβρινὴ σκιὰ εἶχαν ἀρχικὰ μετρηθεῖ οἱ διάρκειες τῶν ἐποχῶν τοῦ ἔτους. Ἔχει δηλαδὴ κανεὶς τὴν βραχύτερη μεσημβρινὴ σκιὰ τοῦ ἔτους κατὰ τὴ θερινὴ τροπὴ (τὴν μεγαλύτερη ἡμέρα τοῦ ἔτους) καὶ τὴν μακρότερη μεσημβρινὴ σκιὰ κατὰ τὴν χειμερινὴ τροπὴ (τὴν μικρότερη ἡμέρα τοῦ ἔτους). Δυσκολώτερο ὅμως ἦταν νὰ βρεθεῖ ἡ μεσημβρινὴ σκιὰ τῶν ἰσημεριῶν. Σύμφωνα μὲ μεταγενέστερη παράδοση αὐτὸ ἐπιτεύχθηκε γιὰ πρώτη φορὰ στὸν ἕκτο αἰώνα π.Χ. ἀπὸ τὸν φιλόσοφο καὶ φυσιοδίφη ΑΝΑΞΙΜΑΝΔΡΟ[1]. Ἡ περίπτωση αὐτή, ὅπως κι ἐκείνη τοῦ ΕΥΔΟΞΟΥ, μαθητῆ τοῦ ΠΛΑΤΩΝΟΣ, ὑπενθυμίζει πόσο στενὰ συνδεδεμένη εἶναι στὴν ἑλληνικὴ ἀρχαιότητα ἡ φιλοσοφικὴ μὲ τὴν ἐπιστημονικὴ σκέψη.

Μὲ προσεκτικὴ ἑρμηνεία ἑνὸς κειμένου τοῦ ΒΙΤΡΟΥΒΙΟΥ (VITRUVIUS) συνάγεται μὲ ποιὸ τρόπο διεξάγονταν οἱ μετρήσεις μὲ τὴ σκιὰ τοῦ γνώμονος, μετρήσεις ποὺ ἀποσκοποῦσαν ἀρχικὰ μόνο σὲ ἡμερολογιακοὺς σκοποὺς καὶ ὁδήγησαν ταυτόχρονα στὴ γνωστὴ ἐνδιαφέρουσα ἀστρονομικὴ εἰκόνα τοῦ κόσμου. Ἀπὸ τὴν ἀρχὴ κιόλας στὴν κοσμοεικόνα αὐτὴν χρησιμοποιήθηκαν βασικὲς ἔννοιες τῆς Ἀστρονομίας (καὶ τῆς μεταγενέστερης Μαθηματικῆς Γεωγρα-

---

1. Βλ. τὸ ἄρθρο τοῦ καθηγ. Α. SZABÓ, *Ὁ Ἀναξίμανδρος καὶ ὁ γνώμων*, στὴν Ἐπετηρίδα τοῦ Κέντρου Φιλοσοφίας τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν «Φιλοσοφία» 8-9 (1978-79), 65-73.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



φίας), ὅπως εἶναι οἱ ἔννοιες τοῦ *ὁρίζοντος*, τοῦ *μεσημβρινοῦ κύκλου*, τῶν *σημείων τροπῆς*, τοῦ *ἰσημερινοῦ*, τῶν *παραλλήλων τροπικῶν κύκλων* καὶ τῶν *διαμέτρων* των, τῶν *οὐρανίων πόλων* καὶ τοῦ *ἄξονος τοῦ κόσμου*. Στὴν κοσμοεικόνα μάλιστα αὐτὴν μὲ τὸν γνώμονα χρωστοῦμε καὶ τὴν πρώτη ἀξιόλογη μ ε τ ρ ι κ ὴ τιμή, τὴν λεγόμενη κ λ ί σ η τ ῆ ς ἐ κ λ ε ι π τ ι κ ῆ ς *(λόξωσις τῆς ἐκλειπτικῆς)*. Ἡ τελευταία αὐτὴ βρέθηκε μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο: διχοτόμησαν τὸ οὐράνιο τόξο τοῦ μεσημβρινοῦ κύκλου, τὸ μεταξὺ τῶν δύο σημείων τροπῆς, ἢ τὴν κατοπτρικὴ εἰκόνα τοῦ τόξου αὐτοῦ. Μὲ τὴν πλευρὰ ἐγγεγραμμένου σὲ κύκλο κανονικοῦ δεκαπενταγώνου ἡ *λόξωσις τῆς ἐκλειπτικῆς* μετρήθηκε σὲ $24^0$ — καὶ τοῦτο χωρὶς ἄλλο ἤδη στὸν πέμπτο π.Χ. αἰ. ἀπὸ τὸν Οινοπιδη τὸν Χίο. Ἡ πρώτη αὐτὴ προσεγγιστικὴ τιμὴ βελτιώθηκε ἀργότερα ἀπὸ τὸν Ερατοσθενη, ποὺ κατόρθωσε νὰ προσδιορίσει μὲ καταπληκτική, γιὰ τὴν ἐποχὴ ἐκείνη, προσέγγιση τὸ μῆκος τοῦ ἰσημερινοῦ τῆς γῆς.

Ἡ κατασκευὴ τοῦ κανονικοῦ δεκαπενταγώνου ἦταν ἕνα σημαντικὸ ἐπίτευγμα τῆς παλαιᾶς Πυθαγορικῆς Γεωμετρίας, κατασκευὴ ποὺ ἔγινε στὴν 5η ἑκατονταετία π.Χ., ἀκριβῶς τὴν ἐποχὴ ποὺ ἔδρασε ὁ Οινοπιδης ὁ Χίος. Ὁ σχολιαστὴς τοῦ Ευκλειδου Προκλος μᾶς πληροφορεῖ, ὅτι ἡ κατασκευὴ τοῦ δεκαπενταγώνου εἶχε περιληφθεῖ στὰ *Στοιχεῖα* γιὰ τὸ λόγο ὅτι ἦταν ἰδιαίτερα σημαντικὴ γιὰ τὴν Ἀστρονομία. Εἶναι φανερὸ ὅτι ὁ κύκλος, στὸν ὁποῖο περιγραφόταν τὸ ὑπόψη πολύγωνο γιὰ τὴν μέτρηση τῆς κλίσης τῆς ἐκλειπτικῆς, ἦταν ἀρχικὰ ὁ μεσημβρινὸς κύκλος τῆς κοσμοεικόνας γιὰ τὴν ὁποία μιλήσαμε πιὸ πάνω.

Τὸ ὅτι ἕνα τόσο ἁπλὸ ὄργανο ὅπως ὁ γνώμων μποροῦσε νὰ χρησιμοποιηθεῖ ὄχι μόνο γιὰ ἡμερολογιακοὺς σκοποὺς (εὕρεση ἡλιακῶν τροπῶν καὶ ἰσημεριῶν) ἀλλὰ καὶ γιὰ τὸν ὑπολογισμὸ τῆς λόξωσης τῆς ἐκλειπτικῆς καὶ γιὰ τὴν μέτρηση τοῦ *κλίματος*, τὸ γεγονὸς αὐτὸ ἦταν πραγματικὰ μιὰ πολὺ σημαντικὴ ἐπινόηση. Ὡστόσο ἀπὸ καμιὰ σχετικὴ παράδοση δὲν εἶναι γνωστὸ πότε ἔγιναν γιὰ πρώτη φορὰ τέτοιες μετρήσεις καὶ ὑπολογισμοὶ μὲ τὸν γνώμονα. Μόνο στὸν Ιππαρχο ὑπάρχουν μερικὰ δεδομένα, πού πράγματι προέκυψαν ἀπὸ μετρήσεις τοῦ γνώμονος, καθὼς ἐπίσης ὑπάρχουν καὶ τὰ ἐξαγόμενα τῶν ὑπολογισμῶν ἀπὸ τὰ παραπάνω δεδομένα. Ὅπως ἀναφέραμε ἤδη, τοὺς ὑπολογισμοὺς αὐτοὺς τοῦ Ιππαρχου κατόρθωσε νὰ ἀναπαραγάγει ὁ καθηγητὴς Szabó κατὰ τὸ πρότυπο τοῦ Πτολεμαιου. Εἶναι αὐτονόητο ὅτι ὁ Ιππαρχος ἦταν σὲ θέση νὰ κάνει τέτοιους ὑπολογισμούς. Ὅμως τὸ ζήτημα εἶναι, ἂν καὶ πολὺ πρὶν ἀπὸ αὐτὸν οἱ Ἕλληνες ἀστρονόμοι ἦταν σὲ θέση νὰ ἐκτελοῦν παρόμοιους ὑπολογισμούς.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Κατὰ τὴν παράδοση ἤδη στὸν τέταρτο π.Χ. αἰώνα ὁ ΠΥΘΕΑΣ κατόρθωσε νὰ προσδιορίσει μὲ καταπληκτικὴ προσέγγιση τὸ γεωγραφικὸ πλάτος τῆς Μασσαλίας μὲ μετρήσεις τοῦ γνώμονος. Ἀλλὰ τὸ πιὸ σημαντικὸ εἶναι, ὅτι ἡ μέθοδος τοῦ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ, μὲ τὴν ὁποία ὁ καθηγητὴς SZABÓ ἐπέτυχε νὰ ἀνακατασκευάσει τοὺς ὑπολογισμοὺς τοῦ ΙΠΠΑΡΧΟΥ, ἐφαρμόζεται κατὰ τρόπο ἄψογο καὶ στὴν περίπτωση τοῦ ΠΥΘΕΑ. Ἔτσι πρέπει νὰ συμπεράνει κανείς, ὅτι ἡ ἀναπτυγμένη λογιστικὴ μέθοδος τοῦ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ θὰ ἔπρεπε νὰ ἦταν γνωστὴ κιόλας στοὺς χρόνους τοῦ ΠΥΘΕΑ.

Τὸ πρῶτο μέρος τοῦ ἔργου κλείνει (κεφάλαιο 19) μὲ τὴν χρονολογικὴ ἀνασκόπηση τῶν μαρτυριῶν ἐκείνων, ποὺ ἔχουν σχέση μὲ τὴν χρήση τοῦ ἐπιστημονικοῦ ὀργάνου *γνώμων* ἀπὸ τοὺς Ἕλληνες. Πρόκειται γιὰ τὶς μαρτυρίες ποὺ γιὰ τὴν ὥρα μπορεῖ κανεὶς νὰ συγκεντρώσει ἀπὸ τὶς ἀρχαῖες πηγές.

Ἀπὸ τὰ 19 κεφάλαια τοῦ πρώτου μέρους προκύπτει ἀκόμη τὸ ἐκπληκτικὸ συμπέρασμα, ὅτι ἡ παρατήρηση τῆς μεταβολῆς τῆς σκιᾶς μὲ τὴ βοήθεια τοῦ γνώμονος στὴν ἑλληνικὴ Ἀστρονομία, καθὼς γνωρίζομε ἀπὸ τὸ ἔργο τοῦ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ, στὴν πράξη δὲν χρησιμοποιήθηκε πιὰ σχεδὸν καθόλου. Τὸ χωρίο ἐκεῖνο τοῦ ΙΠΠΑΡΧΟΥ, ἀπ' ὅπου ξεκίνησαν οἱ ἔρευνες τοῦ ἔργου, φαίνεται νὰ συνηγορεῖ στὸ ὅτι ὁ ΙΠΠΑΡΧΟΣ συνήθιζε κατὰ κανόνα νὰ ὑπολογίζει τὸ γεωγραφικὸ πλάτος εἴτε μὲ τὴ βοήθεια τοῦ γνώμονος εἴτε ἀπὸ τὴν χρονικὴ διάρκεια τῆς μεγαλύτερης ἡμέρας.

Ὅμως ἡ κατάσταση ἦταν τελείως διαφορετικὴ γιὰ τὸν ΠΤΟΛΕΜΑΙΟ. Στὴν ἐποχή του ὁ γνώμων ἦταν πιὰ ἕνα παραδοσιακὸ ἐπιστημονικὸ ὄργανο. Εἶναι, λόγου χάρη, χαρακτηριστικό, ὅτι ὁ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΣ δὲν ὑπολόγιζε τὸ γεωγραφικὸ πλάτος (καθὼς καὶ τοὺς παραλλήλους κύκλους στὸ κεφ. II 6 τοῦ μεγάλου ἀστρονομικοῦ ἔργου του) μὲ βάση τὴ σκιὰ ποὺ παρεῖχε ὁ γνώμων. Ἀντίθετα, οἱ παράλληλοι κύκλοι καθὼς καὶ οἱ ἀποστάσεις τους ἀπὸ τὸν ἰσημερινὸ σὲ *ἀκτίνια* δίνονταν ἐκ τῶν προτέρων, καὶ ἔπειτα ὑπολόγιζε ὁ ἴδιος τὶς τρεῖς διάφορες σκιὲς τοῦ γνώμονος κατὰ τὶς τροπὲς καὶ τὴν ἰσημερία.

Δὲν ἔχουν λοιπὸν πιὰ καμιὰ πρακτικὴ ἀξία γιὰ τὴν Ἀστρονομία ἡ τὴν Μαθηματικὴ Γεωγραφία τὰ μήκη αὐτὰ τῆς σκιᾶς. Ὁ ἀξιόλογος ρόλος τοῦ γνώμονος διατηρήθηκε μόνο στὴν Μαθηματικὴ Γεωγραφία. Δυστυχῶς ὅμως οἱ περισσότεροι γεωγράφοι ἀγνοοῦσαν πῶς ἦταν δυνατὸ νὰ μετατρέψουν σὲ *ἀκτίνια* τὶς ἐνδείξεις τοῦ γνώμονος, ποὺ μὲ προσήλωση κατέγραφαν (π.χ. ΣΤΡΑΒΩΝ). Στὴν ἀρχαιότητα ἡ γνώση τῆς μετατροπῆς αὐτῆς ἦταν κτῆμα μόνο τῶν μαθηματικῶν καὶ τῶν ἀστρονόμων.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Τὸ δεύτερο μέρος τοῦ παρόντος ἔργου, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ 9 κεφάλαια, εἶναι ἀφιερωμένο στὸ πρόβλημα τῆς «μεγαλύτερης ἡμέρας». Προπάντων ἦταν ἀνάγκη νὰ ξεκαθαρισθεῖ μὲ ποιὸ τρόπο ἀνακαλύφθηκε ὅτι τὸ ἔξαρμα τοῦ πόλου γιὰ ὁρισμένο τόπο μποροῦσε νὰ ὑπολογισθεῖ ἀπὸ τὴν χρονικὴ διάρκεια τῆς μεγαλύτερης ἡμέρας. Γιὰ τὴν ἀπάντηση στὸ ἐρώτημα αὐτὸ ἀφετηρία ἦταν ἡ παρατήρηση, ὅτι στὶς ἀρχαῖες πηγές μας ἡ διάρκεια τῆς μεγαλύτερης ἡμέρας δὲν προσδιορίζεται συχνὰ σὲ ὧρες. Ἀντὶ γι' αὐτὸ γίνεται συχνὰ λόγος γιὰ «τὸν *λόγον* τῆς μεγαλύτερης ἡμέρας πρὸς τὴν μικρότερη». Ἡ ἔκφραση αὐτὴ φανερώνει, ὅτι ἦταν εὐκολώτερα δυνατὸ νὰ προσδιορισθεῖ κάπως ὁ ἀνωτέρω *λόγος* παρὰ ὁ χρόνος σὲ ὧρες τῆς μεγαλύτερης ἡμέρας. Πραγματικὰ ἡ κοσμοεικόνα μὲ βάση τὸν γνώμονα, ποὺ ἀνακατασκευάσθηκε στὸ πρῶτο μέρος τοῦ βιβλίου σύμφωνα μὲ τὴν περιγραφὴ τοῦ ΒΙΤΡΟΥΒΙΟΥ, δείχνει ἀκριβῶς τὸν *λόγον* τῆς μεγαλύτερης ἡμέρας σχετικὰ μὲ τὴν μικρότερη, ἀφοῦ πρῶτα εἶχε ἐξευρεθεῖ τὸ πῶς ἔπρεπε νὰ μετρηθεῖ ἡ μεσημβρινὴ σκιὰ τοῦ γνώμονος κατὰ τὶς ἰσημερίες. Δηλαδὴ ἡ κοσμοεικόνα αὐτὴ τοῦ γνώμονος δείχνει καὶ τὶς διαμέτρους τῶν δύο τροπικῶν κύκλων, ποὺ εἶναι παράλληλοι μὲ τὴν διάμετρο τοῦ ἰσημερινοῦ. Καὶ τὰ τμήματα μάλιστα ποὺ ὁρίζουν οἱ διάμετροι τῶν τροπικῶν κύκλων π ά ν ω ἀ π ὸ τ ὸ ν ὁ ρ ί ζ ο ν τ α παρέχουν ἀκριβῶς τὸν *λόγον* τῆς διάρκειας τῆς μεγαλύτερης πρὸς τὴν μικρότερη ἡμέρα στὸν ὑπόψη τόπο.

Ἡ παρατήρηση αὐτὴ ὁδήγησε τὸν καθηγητὴ SZABÓ στὴν εἰκασία, ὅτι ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἐξάρματος τοῦ πόλου ἀπὸ τὴ διάρκεια τῆς μεγαλύτερης ἡμέρας μποροῦσε νὰ ἐπιτευχθεῖ καὶ μὲ τὴν βοήθεια τοῦ γνώμονος. Ὁ ΚΛΑΥΔΙΟΣ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΣ διασαφηνίζει πράγματι τὴν ὑπολογιστικὴ αὐτὴ μέθοδο (*Σύνταξις* II 3) μὲ τὴ βοήθεια ἑνὸς σχεδιαγράμματος, ποὺ συνοδεύει τὸ προηγούμενο κεφάλαιο II 2. Δυστυχῶς τὸ σχεδιάγραμμα αὐτό, κατὰ τὸν καθηγητὴ SZABÓ, δὲν ἀποδίδεται μὲ ἀκρίβεια στὴν κατὰ τὰ ἄλλα ἄριστη ἔκδοση τοῦ J.L. HEIBERG (1898, σελ. 90). Ὀρθότερη εἶναι ἡ ἀπόδοση τοῦ σχεδιαγράμματος τοῦ ΠΤΟΛΕΜΑΙΟΥ στὴν γερμανικὴ μετάφραση τῆς *Συντάξεως* ἀπὸ τὸν K. MANITIUS (1912, σελ. 60). Ἐκεῖνο ποὺ προπάντων καταδεικνύεται στὸ παρὸν ἔργο εἶναι, ὅτι τὸ ὑπόψη σχεδιάγραμμα δὲν παριστάνει στὴν πραγματικότητα παρὰ μόνο μιὰ παραλλαγὴ τῆς κοσμοεικόνας τοῦ γνώμονος. Ἱστορικὰ ὁ ὑπολογισμὸς τοῦ ἐξάρματος τοῦ πόλου ἀπὸ τὴν χρονικὴ διάρκεια τῆς μεγαλύτερης ἡμέρας ἔγινε δυνατὸς μὲ βάση τὴν ἐξελιγμένη αὐτὴ κοσμοεικόνα τοῦ γνώμονος.

Ὁ ἀνωτέρω ὑπολογισμὸς ἐπιτυγχάνεται ἀπὸ τὸν ΠΤΟΛΕΜΑΙΟ (II 2 καὶ 3) μὲ δύο διαδοχικὰ βήματα. Πρῶτα ὑπολογίζει τὸ τόξο τοῦ ὁρί-

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



ζοντος ποὺ κεῖται μεταξὺ ἰσημερινοῦ καὶ ἐκλειπτικῆς, ὅταν δίνεται ἡ διάρκεια τῆς μεγαλύτερης ἡμέρας *(τὰς τοῦ ὁρίζοντος περιφερείας, τὰς ὑπὸ τοῦ ἰσημερινοῦ καὶ τοῦ λοξοῦ κύκλου ἀπολαμβανομένας)*. Σήμερα ἡ Ἀστρονομία ὀνομάζει τὰ τόξα αὐτὰ πρωϊνὲς ἢ βραδυνὲς ἐκτάσεις τοῦ ἡλίου, καθ' ὅσον κεῖνται στὸν ἀνατολικὸ ἢ στὸν δυτικὸ ὁρίζοντα (βλ. σελ. 144 ἐπ.). Ἔπειτα, μὲ τὸ δεύτερο βῆμα, ὁ Πτολεμαιος ὑπολογίζει τὸ ἴδιο τὸ ὕψος τοῦ πόλου, χρησιμοποιώντας τὸν ἀνωτέρω πρῶτο τύπο. Καὶ οἱ δύο τύποι τοῦ Πτολεμαιου διασαφηνίζονται στὸ δεύτερο μέρος τοῦ παρόντος ἔργου (ὡς κεφάλαιο 3: «Ἐπίλυση μὲ τρία βήματα») μὲ τέτοιο τρόπο ὥστε νὰ εἶναι κατανοητοὶ γενικὰ καὶ σὲ μὴ μαθηματικούς.

Οἱ τύποι ποὺ χρειάζονταν οἱ ἀρχαῖοι ἀστρονόμοι γιὰ νὰ ὑπολογίσουν τὸ ἔξαρμα τοῦ πόλου ἀπὸ τὴ διάρκεια τῆς μεγαλύτερης ἡμέρας καὶ ποὺ μᾶς εἶναι γνωστοὶ ἀπὸ τὸν Πτολεμαιο εἶναι ἀρκετὰ πολύπλοκοι. Δὲν ὑπάρχει ἀμφιβολία ὅτι καὶ ὁ μεγάλος ἀστρονόμος Ιππαρχος θὰ πρέπει νὰ ἤξερε τοὺς τύπους αὐτοὺς ἤδη στὸν δεύτερο αἰ. π.Χ., γιατὶ ἀλλιῶς δὲν θὰ μποροῦσε καθόλου νὰ ὑπολογίσει τὰ ἐξαγόμενα, ἀπὸ τὰ ὁποῖα οἱ συγγραφεῖς τοῦ παρόντος ἔργου ἀφορμήθηκαν γιὰ τὶς σχετικὲς ἔρευνές τους. Ἡ ἱστορικὴ ὡστόσο διαπίστωση-ἔκπληξη ἀπὸ τὶς ὑπόψη ἔρευνες δὲν συνίσταται στὸ ὅτι ἤδη ὁ Ιππαρχος κατεῖχε τόσο προχωρημένες μαθηματικὲς γνώσεις — ἂς μὴ ξεχνοῦμε, ὅτι ὑπῆρξαν σοβαροὶ ἱστορικοί, ποὺ θεωροῦσαν τὸν μεγάλο αὐτὸν ἀστρονόμο καὶ ὡς καλὸ μαθηματικό. (Στὸ παρὸν ἔργο δείχνεται «ἐν παρόδῳ», ὅτι καὶ οἱ νεώτερες ἀμφιβολίες γιὰ τὶς μαθηματικὲς ἱκανότητες τοῦ Ιππαρχου ἀνάγονται σὲ ἁπλὴ παρεξήγηση).

Ἐκεῖνο πραγματικὰ ποὺ καταπλήσσει εἶναι τὸ ὅτι πιθανότατα ἤδη στὸν τέταρτο π.Χ. αἰώνα ὁ Ευδοξος ἦταν ἐντελῶς σὲ θέση νὰ ὑπολογίσει τὸ ἔξαρμα τοῦ πόλου ἀπὸ τὴ διάρκεια τῆς μεγαλύτερης ἡμέρας[2]. Ἡ εἰκασία αὐτὴ ἔρχεται χωρὶς ἄλλο σὲ ἀντίφαση πρὸς τὴν γενικὰ σήμερα παραδεκτὴ ἀντίληψη στὴν Ἱστορία τῆς ἐπιστήμης, ὅτι εἶναι ἀπίθανο στὸ πρῶτο μισὸ τοῦ τετάρτου π.Χ. αἰ. νὰ ὑπῆρχαν κιόλας τόσο ἀναπτυγμένες γνώσεις. Ἀντίθετα, στὰ ἑπτὰ κεφάλαια ποὺ συνθέτουν τὸ τρίτο μέρος τοῦ παρόντος ἔργου, οἱ συγγραφεῖς ὑποστηρίζουν τὴν ἄποψη, ὅτι τὰ ἀρχαῖα ἑλληνικὰ σπερματοκύτταρα τόσο τῆς Ἐπίπεδης ὅσο καὶ τῆς Σφαιρικῆς Τριγωνομετρίας, τὸ λεγόμενο *κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν* στὸν Κλαυδιο Πτολεμαιο, βρίσκονταν τουλάχιστον σέ προετοιμασία ἤδη στὸν πέμπτο καὶ τέταρτο π.Χ. αἰώ-

---

2. Βλ. καὶ τὸ ἄρθρο τοῦ καθηγ. E. Maula, *The Spider in the Sphere. Eudoxus' Arachne.* («Η «ἀράχνη» τοῦ Εὐδόξου. Τὸ πρῶτο γωνιόμετρο γιὰ τὴ μέτρηση τῶν οὐρανίων σφαιρῶν), «Φιλοσοφία» 5-6 (1975-76), 225-258.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



να. Ἡ ἄποψη αὐτὴ στηρίζεται ἐδῶ στὸ ὅτι θὰ ἔπρεπε οἱ Ἕλληνες τῆς ἐποχῆς ἐκείνης νὰ χρησιμοποιοῦσαν τὴν λεγόμενη τ ρ ι χ ο τ ό μ η σ η γ ω ν ί α ς γιὰ τὴν κατασκευὴ τῶν πινάκων χορδῶν τους. Ἔτσι τὸ πρόβλημα τῆς τριχοτόμησης γωνίας, ποὺ ἡ ἐπίλυσή του δὲν εἶναι δυνατὴ μὲ κανόνα καὶ διαβήτη, πρωτοεμφανίσθηκε ἀκριβῶς στὴν Ἀστρονομία.

Στὸ τέλος τοῦ ἔργου ὁ καθηγητὴς Szabó διερωτᾶται, μήπως ὅταν ὁ Ιππιας, ὁ κατὰ τὰ ἄλλα λιγώτερο γνωστὸς σοφιστὴς τοῦ πέμπτου π.Χ. αἰ., ἐπρότεινε δική του λύση στὸ πρόβλημα τῆς τριχοτόμησης γωνίας (ὄχι βέβαια μὲ τὰ κλασικὰ μέσα, δηλαδὴ τὸν κανόνα καὶ τὸν διαβήτη), μήπως λοιπὸν ἡ λύση του αὐτὴ προερχόταν ἀπὸ τὴν ἀνάγκη νὰ συμπληρώσει κάποιο *κανόνιον τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν.*

Ἰωάννης Ξανθάκης
τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν

Φίλων Βασιλείου
τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens

# VORWORT

ERKKA MAULA ist Mitverfasser dieses Buches. Denn ohne seine Anregung und Mitwirkung wären diese Untersuchungen wohl nie unternommen worden. Seine Studien über EUDOXOS und die *Arachne* haben zuerst mein Interesse für das Problem *Winkel und Bogen* in der antiken Geometrie erweckt. Er hat dann für mich eine längere und intensive Zusammenarbeit im Rahmen des Forschungsprogramms der Oulu-Universität in Finnland (i.J. 1977) ermöglicht. Wir haben während jener Zeit manche Teilaspekte der antiken Astronomie zusammen erforscht, oft Besprechungen und Diskussionen über die hier behandelten gemeinsamen Themen geführt, und obwohl unsere Ansichten damals manchmal auseinandergingen, waren die Gespräche mit ERKKA MAULA für mich immer anregend und fruchtbar. Oft konnte ich auch *seine* Gedanken weiterentwickeln.

Außerdem soll dieses Werk auch zum Programm unserer gemeinsamen *Interdisciplinary Academy, Finland* beitragen. Unsere Zusammenarbeit begann und entfaltete sich ja im Rahmen dieser Gelehrten-Organisation.

Auf der anderen Seite erachte ich die hier zusammengestellten Studien auch als eine Art Fortsetzung meiner i.J. 1969 veröffentlichten *Anfänge der griechischen Mathematik*, München-Wien (R. Oldenbourg). Damals dachte ich, «am Anfang jener gar nicht leichten Arbeit zu stehen, die später einmal hoffentlich zu einem vollkommen neuen Bild über die historische Entfaltung der griechischen Mathematik führen wird». Nun möchte das vorliegende ENKLIMA mindestens ein Schritt weiter auf dem damals angetretenen Weg sein. Wie das frühere Buch den historischen Anfängen der *reinen Mathematik* gewidmet war, so sollen diese Untersuchungen die Frühgeschichte der griechischen *angewandten Mathematik* in eine neue Beleuchtung stellen.

Budapest, September 1981

Árpád Szabó
Mathematisches Institut
der Ungarischen Akademie
der Wissenschaften

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΚΑΔΗΜΙΑ
ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens

## ZUR CHRONOLOGISCHEN ORIENTIERUNG

Es ist zum Verständnis der hier folgenden Untersuchungen unerläßlich nötig, daß man die genannten Personen auch *zeitlich* unterbringen kann. Darum habe ich jedesmal, wenn im Text ein neuer Name das erste Mal genannt wird, sogleich auch die Lebenszeit oder etwaige chronologische Angaben über den Betreffenden notiert. Um die Lektüre zu erleichtern, zähle ich auch hier, im voraus – möglichst in zeitlicher Reihenfolge – jene wichtigsten Namen auf, die im Band vorkommen. Der Leser wird also – falls er während des Studiums dieser Erörterungen in bezug auf das zeitliche Unterbringen irgendeines Namens Zweifel hat – diese Liste immer wieder aufschlagen können. Es darf jedoch nicht verschwiegen werden, daß die angegebenen Jahreszahlen meistens nur approximativ, in einigen Fällen sogar völlig unsicher sind.

HESIODOS *(Werke und Tage),* 7. Jahrhundert v.Chr.
THALES 6. Jahrhundert v.Chr.
ANAXIMANDROS 6. Jahrhundert
ANAXIMENES 6. »
PYTHAGORAS 6. »
HERODOTOS, etwa von 480-424 v.Chr.
HIPPIAS von Elis, berühmter Sophist (Dreiteilung des Winkels); 5. Jahrhundert; eher ein *älterer* als ein jüngerer Zeitgenosse des SOKRATES (469-399).
HIPPOKRATES von Chios, der Erfinder der Möndchenquadratur im 5. Jahrhundert v.Chr., der um 430 nach Athen kam und dort Mathematikunterricht erteilte.
OINOPIDES von Chios; seine Blüte wird durch K.v. FRITZ (RE s.v.) etwa auf 450-425 v.Chr. angesetzt.
PLATON 427-347 v.Chr.
EUDOXOS 408-350 v.Chr.
ARISTOTELES 384-322 v.Chr.
THEOPHRASTOS, etwa zwischen 370-270 v.Chr.
EUDEMOS, Schüler des ARISTOTELES, Zeitgenosse des THEOPHRASTOS, Verfasser einer Mathematik- und Astronomie-Geschichte.
PYTHEAS, Ende des 4. Jahrhunderts v.Chr.; seine Reisen fallen vermutlich noch in die Zeit *vor* 330 v.Chr.



ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



AUTOLYKOS von Pitane, Verfasser der beiden ältesten erhaltengebliebenen astronomisch-mathematischen Werke der griechischen Wissenschaft. Seine Lebenszeit läßt sich einigermaßen dadurch bestimmen, daß der Begründer der sog. «mittleren Akademie», ARKESILAOS (etwa 315-240 v.Chr.) auch bei AUTOLYKOS gelernt hat. AUTOLYKOS war demnach mindestens um eine Generation älter; seine Lebenszeit fiel also etwa in die zweite Hälfte des 4. Jahrhunderts v.Chr.

EUKLID, Verfasser der *Elemente,* etwa um 300 v.Chr.

PHILON, vermutlich Admiral von PTOLEMAIOS I. (367-283), der Äthiopien besucht hat.

MEGASTHENES, Gesandter des SELEUKOS NIKATOR (357-280) nach Indien zu ČANDRAGUPTA.

ARKESILAOS, etwa 315-250; Begründer der sog. Mittleren Akademie.

DEIMACHOS, Gesandter des Herrschers ANTIOCHOS SOTER (293-261) nach Indien zum Nachfolger von ČANDRAGUPTA.

ANTIGONOS GONATAS, makedonischer König, 320-240 v.Chr.

ARATOS, Verfasser der *Phainomena,* 315-240 v.Chr.

ARISTARCHOS von Samos, Astronom; Anfang des 3. Jahrhunderts v.Chr. Seine Blütezeit fällt um 280 v.Chr.; nach KLAUDIOS PTOLEMAIOS (*Almagest* III 1; ed. J.L. HEIBERG) hat er nämlich in diesem Jahr die Sommerwende beobachtet.

TIMOCHARIS und ARISTYLLOS, zwei von KLAUDIOS PTOLEMAIOS erwähnte Astronomen, die zwischen 295-280 v.Chr. in Alexandria tätig waren.

ARCHIMEDES, einer der größten Mathematiker der Weltgeschichte, 280-211 v.Chr.

ERATOSTHENES 276-195 v.Chr.

APOLLONIOS aus Perge in Pamphylien, Mathematiker in Alexandria, etwa 265-190.

HYPSIKLES, Astronom, wahrscheinlich in Alexandria, um 180 v.Chr.

PHILIPPOS, ein Astronom; er scheint einer älteren Generation als der des HIPPARCHOS von Nikaia angehört zu haben, also etwa Ende des 3. Jahrhunderts v.Chr.

ATTALOS, ein Astronom, Zeitgenosse des HIPPARCHOS von Nikaia im 2. Jahrhundert v.Chr.

HIPPARCHOS von Nikaia, Astronom; etwa 160-120 v.Chr. (Die beiden Jahreszahlen bezeichnen nur zwei beinahe zufällige Daten in seinem Lebenslauf).

THEODOSIOS von Bithynien lebte am Ende des 2. oder am Anfang des 1. Jahrhunderts v.Chr. (Man vgl. übrigens mit dieser Angabe

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



G. LORIA, *Histoire des Sciences Mathématiques dans l'Antiquité Hellénique*, Paris 1929, S. 175: «THEODOSE, personnage si peu connu que certains historiens lui donnent pour patrie Tripoli, tandis que d'autres le disent bithynien». (Dieser THEODOSIOS war Verfasser einer *Sphairika*, außerdem schrieb er auch andere mathematische und astronomische Werke.

POSEIDONIOS 135-51 v.Chr.

PSEUDO-SKYMNOS, etwa um 90 v.Chr.

GEMINUS, vielleicht ein Schüler des POSEIDONIOS, also wohl im letzten Jahrhundert vor der Zeitwende; Verfasser eines populärwissenschaftlichen Werkes, das unter dem Titel *Elemente der Astronomie* oder als *Einführung in die Phainomena* zitiert wird.

VITRUVIUS, römischer Architekt des JULIUS CAESAR und AUGUSTUS; er lebte also im letzten Jahrhundert vor der Zeitwende.

STRABON, 64 v.Chr. - 19 n.Chr.

DERKYLLIDES, etwa *vor* der Zeit des römischen Kaisers TIBERIUS (14-37 n.Chr.).

PLINIUS MAIOR, Verfasser der *Naturalis historia*, 23-79 n.Chr.

PLINIUS MINOR, Neffe und Adoptivsohn des ÄLTEREN PLINIUS; Verfasser der *Briefe*, 62-114 n.Chr.

MENELAOS, machte astronomische Beobachtungen in Rom im Jahre 98 n.Chr. Unter anderem Verfasser einer *Sphairika*.

HERON aus Alexandria. Die Datierung seiner Lebenszeit ist eine sehr umstrittene Frage. Man hat ihn schon zu jeder Zeit – vom 2. Jahrhundert v.Chr. bis zum 3. Jahrhundert n.Chr. – unterzubringen versucht.

KLEOMEDES, etwa 1. Jahrhundert n.Chr. (?)

AETIOS, der Doxograph; es laufen unter diesem Namen wertvolle Exzerpte, die Geschichte der Naturphilosophie und Naturwissenschaft betreffend, aber ohne Urteil von einem Eklektiker des 1. oder 2. Jahrhunderts n.Chr. angefertigt. Vgl. H. DIELS, *Doxographi Graeci*, Berlin 1879, *(Aëtii Placita)*.

SEXTUS EMPIRICUS, skeptischer Philosoph vom Ende des 2. Jahrhunderts n.Chr.; sein Hauptwerk wird unter dem Titel *Adversus mathematicos* zitiert.

DIOGENES LAERTIOS, etwa zur Zeit des römischen Kaisers HADRIANUS (Kaiser von 117-138). Nach einer anderen Datierung: 3. Jahrhundert n.Chr.; vgl. M. GIGANTE, *Diogene Laerzio, Vite dei filosofi*, Editori Laterza 1976, S. IX.

KLAUDIOS PTOLEMAIOS, Astronom, 2. Jahrhundert n.Chr. Sein Werk, die *Syntaxis mathematica* wird in diesem Band häufig auch unter

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



seinem bei den Arabern des Mittelalters üblich gewordenen Namen als *Almagest* zitiert.

THEON SMYRNAEUS, 2. Jahrhundert n.Chr.

EUSEBIOS, Bischof *(Praeparatio Evangelica)*, 4. Jahrhundert n.Chr.

THEON, Mathematiker in Alexandria, etwa um 380 n.Chr. Er war Vater der berühmten Mathematikerin HYPATIA; er ist also nicht zu verwechseln mit dem anderen, vorhin genannten THEON von Smyrna.

PROKLOS (DIADOCHOS 410-485), Neuplatoniker; besonders berühmt sein Kommentar zum ersten Buch der Euklidischen *Elemente*.

EUTOKIOS, schrieb Kommentare zu ARCHIMEDES, APOLLONIOS und wohl auch zu PTOLEMAIOS; seine Blütezeit: vom Ende des 5. Jahrhunderts bis in die erste Hälfte des 6. Jh.

SUDA-Lexikon, 10. Jahrhundert. Der Name SUDA heißt «Gestrüpp», wohl daher, daß das Lexikon *allerlei* - darunter manchmal auch sehr wertvolles Material - enthält. - Früher hielt man SUIDAS für einen Personennamen; so wird das Lexikon manchmal auch heute noch zitiert.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens

# EINLEITUNG

Die Untersuchungen, die ich in diesem Band aneinanderreihe, verdanken ihre Entstehung einer Textstelle bei HIPPARCHOS. Wie bekannt, schrieb der große Astronom von Nikaia – vermutlich um die vierziger Jahre des 2. Jahrhunderts v. Chr. – einen kritischen Kommentar zu den *Phainomena* des ARATOS und EUDOXOS[1]. Diese drei Bücher sind überhaupt die einzigen, die wir von ihm besitzen[1a].

Die Stelle bei HIPPARCHOS – die ich hier gleich zitieren werde – beginnt mit einer Stellungnahme gegen ARATOS: «Zunächst scheint mir ARATOS... im Irrtum zu sein, wenn er meint...» – sagt HIPPARCHOS[2]. Und so hat man nach diesen Worten vorerst den Eindruck, als handele es sich hier um das Zurechtstellen eines Versehens seitens des ARATOS. Aber es stellt sich bald heraus, daß eigentlich doch nicht ARATOS selber für den gerügten Irrtum verantwortlich sei. Denn HIPPARCHOS schreibt ja – unmittelbar nach dem Skizzieren der eigenen Stellungnahme[3] :

«Allerdings hat ARATOS eine selbständige bestimmte Ansicht über derartige Verhältnisse in seinem Werk *nicht* vorgebracht, sondern ist auch hierin dem EUDOXOS gefolgt...»

Die Kritik des HIPPARCHOS trifft also, über den Vermittler ARATOS, den älteren Urheber des Irrtums, EUDOXOS. Das Lehrgedicht des ARATOS (etwa 315-240 v. Chr.) – verfaßt auf Geheiß des makedonischen Königs, ANTIGONOS GONATAS (320-240) – ist keine selbständige wissenschaftliche Leistung. Wie später der römische Dichter LUCRETIUS die Lehren des Philosophen EPIKUROS popularisierte, so trug ARATOS in seinen Hexametern das astronomische System des EUDOXOS vor. Ja, die Abhängigkeit des ARATOS von EUDOXOS war noch enger und unmittelbarer. Hinter allen Behauptungen der *Phainomena* des ARATOS stecken nämlich

---

1. HIPPARCHI, *In Arati et Eudoxi Phaenomena Commentariorum libri tres*, rec. C. MANITIUS (mit deutscher Übersetzung, Lipsiae 1894. Zitiert im folgenden nach dem Übersetzer: MANITIUS 1894).

1a. Seltener wird der *Fixstern-Katalog* des HIPPARCHOS (zuerst veröffentlicht durch VITTORIO in Florenz 1567, in Folio) als erhaltenes Werk von ihm in Evidenz gehalten; so z.B. in der Übersetzung von P. Ver EECKE, «Les coniques d'Apollonius de Perge», 1922, S. VIII.

2. MANITIUS 1894, 27.

3. Ebd.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Erklärungen von jenem EUDOXOS, der ein jüngerer Zeitgenosse des PLATON (427-347 v. Chr.) war. Darum ist nun die Stellungnahme des HIPPARCHOS gegen ARATOS noch mehr eine solche gegen EUDOXOS[4].

Als ich nun vor ein paar Jahren die angedeutete HIPPARCHOS-Stelle das erste Mal etwas aufmerksamer gelesen hatte, mußte ich mich erstaunt fragen: Welche Ansichten setzt denn die Kritik des HIPPARCHOS nicht von seiner eigenen Seite, sondern *von der Seite des* ARATOS *und* EUDOXOS *her voraus*? Welche astronomischen, geographischen, mathematischen und sonstigen Kenntnisse müssen schon ARATOS und EUDOXOS besessen und angewendet haben, um solche «Fehler» zu begehen, die dann HIPPARCHOS seinerseits korrigieren wollte?

Es werden nun in den folgenden Studien Antworten auf solche Fragen versucht, und man kommt auf diese Weise zu einem Bild von der Entfaltung der griechischen Wissenschaft, das von dem bisher üblichen allerdings etwas abweichend ist.

Hier zitiere ich nun vor allem jenen Text des HIPPARCHOS, der meine danach folgenden Studien ausgelöst hat. Der beigefügte provisorische Kommentar steht hier selbstverständlich nur im Dienste der Einleitung selbst. Zu demselben Text komme ich später, am Ende des Bandes, wieder zurück.

Man liest nun bei HIPPARCHOS[5] :

---

4. Es seien hier, zur Illustrierung dieser Behauptung, noch die folgenden zwei Stellen aus dem Werk des HIPPARCHOS angeführt. MANITIUS 1894, 7: «Freilich verdient ARATOS vielleicht keinen Tadel, selbst wenn er in manchen Fällen falsche Angaben macht; hat er doch seine Himmelserscheinungen im engen Anschluß an die Darstellungen des EUDOXOS geschrieben, durchaus nicht nach selbständigen Beobachtungen, oder gar unter prunkender Ankündigung, der Himmelskunde eine streng wissenschaftliche Behandlung angedeihen zu lassen...» – Ebd. S. 9: «Daß sich ARATOS an des EUDOXOS Darstellung der Himmelserscheinungen eng angeschlossen hat, kann man aus vielen Stellen erkennen, wenn man mit seinen Versen Punkt für Punkt den Wortlaut bei EUDOXOS vergleicht. Es ist nicht überflüssig, auch hier mit einigen Worten darauf zurückzukommen, weil dieses Abhängigkeitsverhältnis von der großen Mehrzahl in Zweifel gezogen wird...».

5. MANITIUS 1894, 27. Der griechische Text lautet: Πρῶτον μὲν οὖν Ἄρατος ἀγνοεῖν μοι δοκεῖ τὸ ἔγκλιμα τοῦ κόσμου νομίζων ἐν τοῖς περὶ τὴν Ἑλλάδα τόποις τοιοῦτον εἶναι, ὥστε τὴν μεγίστην ἡμέραν λόγον ἔχειν πρὸς τὴν ἐλαχίστην τὸν αὐτόν, ὃν ἔχει τὰ ε΄ πρὸς τὰ γ΄. λέγει γὰρ ἐπὶ τοῦ θερινοῦ τροπικοῦ·

> *τοῦ μέν, ὅσον τε μάλιστα, δι᾽ ὀκτὼ μετρηθέντος*
> *πέντε μὲν ἔνδια στρέφεται καὶ ὑπέρτερα γαίης,*
> *τὰ τρία δ᾽ ἐν περάτῃ.*

συμφωνεῖται δή, διότι ἐν μὲν τοῖς περὶ τὴν Ἑλλάδα τόποις ὁ γνώμων λόγον ἔχει πρὸς τὴν ἰσημερινὴν σκιάν, ὃν ἔχει τὰ δ΄ πρὸς τὰ γ΄. ἐκεῖ δὴ τοίνυν ἡ μεγίστη ἡμέρα ἐστὶν ὡρῶν ἰσημερινῶν ιδ΄ καὶ τριῶν ἔγγιστα πεμπτημορίων, τὸ δὲ ἔξαρμα τοῦ πόλου μοιρῶν λζ΄ ὡς ἔγγιστα. ὅπου δὲ ἡ μεγίστη ἡμέρα λόγον ἔχει πρὸς τὴν ἐλαχίστην, ὃν ἔχει τὰ ε΄

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



«Zunächst scheint mir ARATOS über die geographische Breite im Irrtum zu sein, wenn er meint, daß sie in den Gegenden von Griechenland zur Folge habe, daß der längste Tag zum kürzesten in dem Verhältnis von 5:3 stehe. Er sagt nämlich bezüglich des Sommerwendekreises :

Wenn du den Umfang desselben in acht Abschnitte zerteilst,
Drehen sich fünf dann über der Erde am Himmelsgewölbe,
Drei in der unteren Hälfte.

Darüber ist man jedenfalls einig, daß in den Gegenden von Griechenland der Schattenzeiger zum Mittagschatten der Tag- und Nachtgleichen in dem Verhältnis von 4:3 steht. Folglich hat dort der längste Tag eine Dauer von 14 3/5 Stunden, während die Polhöhe ungefähr $37^0$ beträgt. – Wo aber der längste Tag zum kürzesten in dem Verhältnis von 5:3 steht, dort hat der längste Tag eine Dauer von 15 Stunden, während die Polhöhe ungefähr $41^0$ beträgt. – Demnach ist klar, daß in den Gegenden von Griechenland das letztgenannte Verhältnis des längsten Tages zum kürzesten unmöglich stattfinden, sondern vielmehr für die Gegenden am Hellespont gelten kann».

Nun muß ich hier vor allem einiges zur Terminologie des angeführten Textes bemerken.

1. Wie man sieht, spricht HIPPARCHOS – mit den Worten des Übersetzers – von der *geographischen Breite*. Im Original wird dieser Begriff mit dem Terminus τὸ ἔγκλιμα – oder an anderen Stellen des Werkes: τὸ κλῖμα τοῦ κόσμου – zum Ausdruck gebracht. Selbstverständlich ist dieses griechische Wort dasselbe, wie unser *Klima*, auch wenn wir nicht mehr genau dasselbe darunter verstehen wie die alten Gelehrten. Für uns ist nämlich das *Klima* eher der «mittlere Zustand der *Witterung*»[6]. Der griechische Fachausdruck hieß ursprünglich – aus dem Verbum κλίνω — «die *Biegung*, die *Krümmung* des Himmelsgewölbes» mit der scheinbaren Sonnenbahn. Die Klimaverhältnisse – in unserem Sinne – sind ja weitgehend davon abhängig, wie hoch oder wie tief die Sonnenbahn an der Krümmung des Himmels über der betreffenden Gegend zu sein scheint. – Doch wurden im Sinne des geozentrischen Weltbildes die gedachten Kreise des Himmels – als Projektionen – auf die Erde übertragen. Der irdische *Äquator* ist z.B. die Projektion jenes größten Kreises am Himmel, den die Sonne an den Tag- und Nachtgleichen zu

---

πρὸς τὰ γ΄, ἐκεῖ ἡ μὲν μεγίστη ἡμέρα ἐστὶν ὡρῶν ιε΄, τὸ δὲ ἔξαρμα τοῦ πόλου μοιρῶν μα΄ ὡς ἔγγιστα. δῆλον τοίνυν ὅτι οὐ δυνατὸν ἐν τοῖς περὶ τὴν Ἑλλάδα (τόποις) τὸν προειρημένον εἶναι λόγον τῆς μεγίστης ἡμέρας πρὸς τὴν ἐλαχίστην, ἀλλά μᾶλλον ἐν τοῖς περὶ τὸν Ἑλλήσποντον τόποις.

6. Nach dem DUDEN der Rechtschreibung (1967).

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



beschreiben scheint. Der griechische Name dafür – ἰσημερινὸς κύκλος = *taggleicher Kreis* – bringt eben die Tatsache zum Ausdruck, daß auf jenem größten Kreis der Erde, der unter dem himmlischen Äquator liegt, alle Tage (und Nächte) gleich sind. – Darum heißt nun das Wort κλῖμα nicht nur «*Krümmung* des Himmelsgewölbes», sondern in der Tat – wie K. MANITIUS übersetzt – auch «*irdische* (geographische) *Breite*».

2. Es gibt jedoch im vorigen Zitat auch noch einen anderen, sozusagen *äquivalenten Begriff* für die «geographische Breite»; das ist der Begriff *Polhöhe* (τὸ ἔξαρμα τοῦ πόλου). Die beiden Winkel – derjenige der irdischen *Breite* eines gegebenen Ortes und der Winkel der *Höhe des Pols* an demselben Ort – sind natürlich *nicht* identisch. Denn der eine von ihnen (die «Breite») wird als die Biegung der *Erdoberfläche* vom Äquator bis zum gegebenen Punkt, und der andere (die «Polhöhe») wird als die scheinbare Biegung des *Himmelsgewölbes* – vom Horizont des betreffenden Punktes bis hinauf zum gedachten Pol des Weltalls – gemessen. Aber die beiden Winkel – derjenige der Erdoberfläche vom Äquator und der andere des Himmelsgewölbes vom Horizont ab – sind untereinander dennoch *gleich*. Die Stadt Athen liegt z.B. – nach einer nicht sehr genauen antiken Messung – ungefähr auf dem 37. Breitengrad[7] (sie ist etwa 37⁰ vom Äquator entfernt; das ist ihre «Breite»); und daselbst sieht man den Polarstern (oder genauer: jene Stelle am Himmelsgewölbe in der Nähe dieses Sterns, die als «Pol des Weltalls» gilt) 37⁰ hoch über dem Horizont am Himmel. – In einem späteren Kapitel werden wir uns mit der Gleichheit dieser beiden Winkel («irdische Breite» und «Polhöhe» für denselben Ort) noch näher beschäftigen (S. 70ff. u. 166). Hier wollen wir nur soviel merken, daß die beiden Begriffe als äquivalent untereinander auch vertauschbar sind. Darum spricht HIPPARCHOS bald von «Breite», bald von «Polhöhe», denn dasselbe ist das Winkelmaß für beide Begriffe, wenn von demselben Ort die Rede ist.

3. Die «geographische Breite» bzw. die «Polhöhe» wird in *Graden* (griechisch: in μοῖραι, also in «*Teilen*») gemessen, die man auf dem Wege gewinnt, daß man den Kreis in 360 Einheiten zerlegt. Kleinere Maßeinheiten als die 360 μοῖραι (also unsere «Minuten» und «Sekunden») werden im vorliegenden Zusammenhang nicht berücksichtigt. Doch

---

7. Nach dem HIPPARCHOS-Zitat liegen die «Gegenden von Griechenland» *ungefähr* bei 37⁰. Dieselbe ist in den antiken Quellen gewöhnlich die «Breite von Athen». Vgl. z.B. VITRUVIUS, *De architectura* IX 7, 1, wo die Breite von Athen zwar nicht in Graden angegeben wird, wo es jedoch heißt, daß die Verhältniszahl des Gnomons zu seinem Mittagschatten bei Tag- und Nachtgleiche in Athen 4:3 sei – woraus sich dann die Breite von 37⁰ ergibt. – Nach heutiger Messung liegt Athen eher um 38⁰.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



werden gewissermaßen auch die Bruchteile des Grades dadurch angedeutet, daß es oben beide Male heißt: der betreffende Winkel sei nur *«ungefähr»* (ὡς ἔγγιστα) $37^0$ bzw. $41^0$.

4. Wie der Winkel in *Graden* (μοῖραι), so wird die Zeitdauer des Tages in *Stunden* gemessen. Es wird in der zitierten Übersetzung *nicht* hervorgehoben, daß der griechische Text ausdrücklich von *«Stunden der Tag- und Nachtgleiche»* (ὧραι ἰσημεριναὶ) redet. Man hat nämlich in der Antike die Zeitdauer des Tages immer von Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang in 12 Stunden eingeteilt. Die Länge dieser sozusagen «alltäglichen» Stunden hing darum von der Jahreszeit ab: Die Stunden im Sommer wurden (bis ungefähr zum 21. Juni) von Tag zu Tag immer länger; und dieselben wurden im Winter (bis zum 21. Dezember) immer kürzer. Diese hießen griechisch: ὧραι καιρικαὶ = «Stunden je nach den Jahreszeiten». Dagegen waren die *«Stunden der Tag- und Nachtgleiche»* – die vor allem in der Astronomie benutzt wurden – unabhängig von der Jahreszeit. Man rechnete von einem Mittag bis zum nächsten 24 *«Stunden der Tag- und Nachtgleiche»*. Diese letzteren entsprachen unseren gewöhnlichen Stunden. – Ihre Bruchteile haben in unserer Textstelle keine besonderen Namen; HIPPARCHOS spricht *nicht* von «Minuten» und «Sekunden». Aber seine «3/5 Stunden» entsprechen zweifellos unseren *36 Minuten.*

5. Und zum Schluß muß ich hier noch auf eine nur *scheinbare* Inkonsequenz im obigen Zitat aufmerksam machen. HIPPARCHOS spricht nämlich dort auch dreimal vom *«Verhältnis des längsten Tages zum kürzesten»*, und zwar in einer Form, als hätte auch ARATOS dieselbe Bezeichnung benutzt. Liest man jedoch den Text aufmerksamer, so sieht man sogleich, daß dies nicht genau der Fall ist. – ARATOS spricht nämlich vom *«Sommerwendekreis»* (θερινὸς τροπικὸς scil. κύκλος), also von der vollen Sonnenbahn am Tag der Sommerwende; und er behauptet, daß, wenn man diesen Kreis *in acht Abschnitte* zerteilt, sich fünf Achtel davon über der Erde (über dem Horizont) und drei Achtel unter der Erde befinden. Während nun die Sonne über der Erde ist, hat man Tag und in der übrigen Zeit, während die Sonne unter dem Horizont ist, Nacht. Und da der volle Tag (der volle Kreis der Sonnenlaufbahn) aus 24 Stunden besteht, entsprechen den fünf Achteln des Kreises 15 und den drei Achteln 9 Stunden. – Es ist auf diese Weise klar, daß ARATOS eigentlich vom «Verhältnis des längsten Tages zur kürzesten N a c h t» spricht. Die Zeitdauer der kürzesten Nacht, die auf den längsten Tag folgt, wurde jedoch in der Antike derjenigen des kürzesten *Tages* gleichgesetzt[8]. Darum konnte HIPPARCHOS – unter

8. Man vgl. dazu O. NEUGEBAUER, *The Exact Sciences in Antiquity*, 2nd edition,

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



leichter Inkonsequenz der Bezeichnung – vom «Verhältnis des längsten Tages zum kürzesten (Tag)» sprechen.

Und fassen wir nun – nach dem Vorausschicken dieser Einzelheiten – die Streitfrage (zwischen HIPPARCHOS und ARATOS) selbst näher ins Auge. ARATOS behauptete – wie dies mit einem Zitat aus seinem Werk belegt wird – daß in den Gegenden von Griechenland am Tag der Sommerwende *fünf Achtel* der Sonnenbahn über der Erde und *drei Achtel* davon unter der Erde sind, oder mit anderen Worten: daß daselbst das Verhältnis des längsten Tages und der kürzesten Nacht wie 5:3 sei. Demnach müßte hier der längste Tag 15 und die kürzeste Nacht 9 Stunden lang sein. – Doch dies ist – wie HIPPARCHOS behauptet – nur ein Irrtum *in bezug auf die geographische Breite.* Denn, so wird es am Ende der angeführten Worte erklärt: Wo der längste Tag eine Dauer von 15 Stunden hat, dort ist die geographische Breite (die Polhöhe) ungefähr $41^0$. Und dies gilt *nicht* für Griechenland, sondern eher für die Gegenden am Hellespont.

Es ist auch interessant, wie HIPPARCHOS gegen ARATOS argumentiert. Er schreibt nämlich:

«Darüber ist man jedenfalls einig, daß in den Gegenden von Griechenland der Schattenzeiger zum Mittagschatten der Tag- und Nachtgleichen in dem Verhältnis von 4:3 steht. Folglich hat dort der längste Tag eine Dauer von etwa 14 3/5 Stunden, während die Polhöhe ungefähr $37^0$ beträgt.»

Er beruft sich also auf eine allgemein anerkannte Tatsache, worüber *nicht* gestritten wird, und diese ist, daß in Griechenland an Tag- und Nachtgleichen der Schattenzeiger (der Gnomon) zu seinem Mittagschatten im Verhältnis von 4:3 steht, und *daraus folgt* sowohl eine *andere Zeitdauer des längsten Tages* (14 3/5 Stunden) – nicht dieselbe, die ARATOS und EUDOXOS angeben (15 Stunden) – als auch *die geographische Breite (die Polhöhe)* für Griechenland: $37^0$.

Man weiß nun aus dem Werk jenes KLAUDIOS PTOLEMAIOS[9], der im 2. Jahrhundert n.Chr. gelebt hat, daß die alten Astronomen in der Tat

---

Providence, Rhode Island 1957, 158: «the shortest night is assumed to be equal in length to the shortest day. This convenient assumption of exact symmetry was always made in ancient astronomy. Actually, however, atmospheric influences make the sun visible longer than would be the case with a mathematical horizon. Consequently the shortest daylight is *longer* than the shortest night».

9. CLAUDII PTOLEMAEI, *Syntaxis mathematica,* ed. J.L. HEIBERG. I-II. Lipsiae 1898-1903. (Zitiert im folgenden als HEIBERG und Jahreszahl des betreffenden Bandes oder als *Almagest,* Buch und Kapitel.) Ich zitiere außerdem in diesen Untersuchungen häufig die Übersetzung von K. MANITIUS, *Des Claudius Ptolemaeus' Handbuch der Astronomie,* I-II. Leipzig 1912-13 (in den späteren Zitaten: MANITIUS 1912-13).

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



imstande waren, die beiden Angaben (die «Zeitdauer des längsten Tages» und die «irdische Breite eines gegebenen Ortes») bloß aus der Verhältniszahl des Gnomons und seines Mittagschattens an Tag- und Nachtgleichen (am gegebenen Ort) zu berechnen. Es ist beinahe überflüssig, hier noch hervorzuheben, daß man selbstverständlich wußte, dieselben Berechnungen seien natürlich auch umgekehrt möglich: Auch aus der Zeitdauer des längsten Tages an einem Ort kann man leicht sowohl die geographische Breite wie auch die Schattenlänge des Gnomons an gewissen Tagen des Jahres daselbst berechnen. Offenbar besaß auch schon HIPPARCHOS im 2. Jahrhundert v.Chr. dieselben Kenntnisse, selbst wenn eine derartige Berechnung an der angeführten Stelle seines Werkes dem Leser *nicht* vorgelegt wird.

Überraschend finde ich jedoch die eben zitierten Worte *nicht* deswegen, weil sie bezeugen, daß schon HIPPARCHOS solcher Berechnungen fähig war, die wir unmittelbar erst aus dem Werk des PTOLEMAIOS kennen. Denn, soviel ich weiß, hat noch niemand dem HIPPARCHOS diese Kenntnisse absprechen wollen. Aber es überrascht mich die Wendung, mit der HIPPARCHOS sein Argumentieren gegen ARATOS-EUDOXOS beginnt: «*Darüber ist man jedenfalls einig* (συμφωνεῖται δὴ ...)...»

Es ist wohl überhaupt nicht möglich, diese Wendung anders zu verstehen, als daß HIPPARCHOS ausdrücklich betont: die Tatsache, auf die er sich beruft, ist keineswegs seine eigene und auch nicht eine neue Entdeckung. Im Gegenteil, die Verhältniszahl des Gnomons und seiner Schattenlänge zu Mittag an Tag- und Nachtgleichen in Griechenland ist – mindestens unter den Astronomen – allgemein bekannt, und daraus kann man, nach den Regeln des Faches, sowohl die Zeitdauer des längsten Tages wie auch die irdische Breite der betreffenden Gegenden ohne weiteres berechnen. Ja, diese Berechnung ist für HIPPARCHOS so selbstverständlich, daß er sie gar nicht näher schildert, er deutet nur die beiden Ergebnisse an: 14 3/5 Äquinoktialstunden für den längsten Tag und $37^0$ für die geographische Breite.

Ich muß gestehen, daß diese Tatsache schon in sich genügte, um in mir den Verdacht gegen eine verbreitete Ansicht der Historiker zu erwecken. Man vergesse nämlich folgendes nicht: Es ist ohne gewisse *trigonometrische Kenntnisse* gar nicht möglich, solche Tatsachen wie diejenigen, die HIPPARCHOS andeutet, bloß aus der Verhältniszahl des Gnomons zu berechnen. Darum halten ja auch die meisten Historiker eben den HIPPARCHOS sozusagen für den «Vater der Trigonometrie»[10].

10. MANITIUS 1894, S. 285: «Durch Berechnung einer Sehnentafel wurde HIPPARCH Schöpfer der Trigonometrie.»

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Ihm sei die erste Schöpfung dieses wichtigen Fachgebietes der Geometrie und Astronomie zu verdanken[11]. Keiner habe vor ihm rein trigonometrische Probleme lösen können[12].

Ich frage mich jedoch folgendes: Wäre es denn überhaupt möglich, daß HIPPARCHOS – wie seine zuletzt zitierten Worte zeigen – die Lösung von derartigen Aufgaben als etwas *Selbstverständliches* hinstellt, wenn wirklich er selber der erste gewesen wäre, der diese Aufgaben lösen konnte? Hätte er dann die eigene Entdeckung nicht viel ausführlicher geschildert? Sollte man aus seinen Worten nicht gerade das Gegenteil schließen, daß er nämlich jene Berechnungen deswegen nicht eingehender behandelt, weil er diese als etwas Selbstverständliches und allgemein Bekanntes voraussetzen konnte?

Man könnte sich außerdem auch fragen: An wen soll man überhaupt denken, wenn man die zitierten Worte liest: «*Darüber ist man jedenfalls einig...*»? Mit welchen Leuten hebt HIPPARCHOS seine Übereinstimmung – mindestens in bezug auf einige Einzelheiten – hervor?

Es wäre natürlich möglich, diese Wendung bloß in einem solchen Sinne zu verstehen: Die *Astronomen* waren zur Zeit des HIPPARCHOS darüber einig, wie die Verhältniszahl des Gnomons in Griechenland ist, und es war auch keine Streitfrage unter ihnen, wie man diese Zahl benutzen soll und zu welchen Ergebnissen die Berechnungen auf Grund der betreffenden Verhältniszahl führen. Eben auf diese Tatsache weise HIPPARCHOS in seiner Kritik gegen ARATOS hin.

Aber man kann auch die Möglichkeit einer anderen, zum Teil unterschiedlichen Interpretation nicht völlig ausschließen. Es wäre nämlich – auf Grund dessen, wie HIPPARCHOS seine Worte formuliert – möglich, auch daran zu denken, er wolle darauf hinweisen, daß keine Uneinigkeit zwischen ihm (HIPPARCHOS) und EUDOXOS bestehe, was die Verhältniszahl des Gnomons zu seinem Mittagschatten an Tag- und Nachtgleichen in Griechenland betrifft. Mit anderen Worten: Man hätte die für die Wissenschaft wichtigen Gnomon-Messungen auch schon in der ersten

---

11. Vgl. z.B. PHILIP E.B. JOURDAIN (in: JAMES R. NEWMAN, *The World of Mathematics*, vol. I, New York 1956, S. 18): «HIPPARCHUS (born about 160 B.C.) seems to have invented this practical science of the complete measurement of triangles from certain data, or as it is called, *trigonometry* etc.»

12. J.B.J. DELAMBRE, *Histoire de l'astronomie ancienne*, (1817) I, S. IX: «HIPPARQUE... qui le premier donna aux Grecs une *Trigonométrie*... En vain chercherait-on ces connaissances dans ARISTARQUE, ARCHIMEDE, EUCLIDE. Aucun de ces géomètres fameux ne savait résoudre un triangle même rectangle autrement que par opérations graphiques.» – Etwas vorsichtiger jedoch T. HEATH, *History of Greek Mathematics* II. (Oxford 1921) S. 257: «Even if he did not invent it, HIPPARCHUS is the first person of whose systematic use of *trigonometry* we have documentary evidence.»

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Hälfte des 4. Jahrhunderts, zur Zeit des EUDOXOS, ebenso gekannt, wie dieselben zur Zeit des HIPPARCHOS gang und gäbe waren.

Diese letztere Vermutung läßt sich einstweilen, soviel ich weiß, mit keinem antiken Text eindeutig belegen. Aber es gibt andere Anzeichen, die in der Tat den Verdacht erhärten, daß EUDOXOS auf dem anderen Wege eben das Problem der geographischen Breite klären wollte. Man überlege sich nämlich folgendes :

Unmittelbar nach der Stelle, die vorhin zitiert wurde, spricht HIPPARCHOS davon, wie er sich wundert, daß der Astronom ATTALOS[13] nicht gemerkt hat, daß die Behauptung des EUDOXOS – wonach das Verhältnis des längsten Tages zur kürzesten Nacht wie 5:3 sei – *irrtümlich ist.* Dann setzt er seine Worte folgendermaßen fort:[14]

«Noch mehr muß man sich wundern, daß er (ATTALOS) nicht aufmerksam geworden ist, wo doch EUDOXOS in der anderen Schrift *ein abweichendes Zahlenverhältnis angibt und schreibt, daß der Abschnitt des Wendekreises über der Erde sich zu dem unter der Erde verhalte wie 12:7;* wo ferner in Übereinstimmung mit diesem auch die Astronomen aus der Schule des PHILIPPOS[15] und andere mehr ihre Aufzeichnungen machen – allerdings mit dem Unterschied, daß sie die gleichzeitig erfolgenden Auf- und Untergänge der Gestirne ausdrücklich nach Beobachtungen, die in den Gegenden von Griechenland gemacht sein sollen, zusammengestellt haben – wobei sie freilich *hinsichtlich der geographischen Breite dieser Gegenden eine fehlerhafte Bestimmung getroffen haben.*»

Man ersieht nun aus Teilen des Zitates, die ich hervorgehoben habe, zweierlei :

1. Wie HIPPARCHOS berichtet, hat EUDOXOS das Verhältnis des längsten Tages zur kürzesten Nacht ein anderes Mal in der Tat abweichend von der vorhin zitierten Stelle angeben wollen, obwohl die beiden Verhältnisse nahezu gleich sind : $12:7 \approx 5:3$. Nebenbei gesagt, wäre es interessant zu wissen, welcher von den beiden Versuchen der spätere ist. Hat sich EUDOXOS das zweite Mal – mindestens zum Teil – «korrigiert», oder hat er den von HIPPARCHOS gerügten Irrtum «vergrößert»?[16]

---

13. Astronom und Mathematiker, Zeitgenosse des HIPPARCHOS. Wir wissen von ihm aus einem Bericht des HIPPARCHOS selber; vgl. MANITIUS 1894, S. 5.

14. MANITIUS 1894, S. 29.

15. Ein nicht näher bekannter Astronom, der – wie man es aus dem Zitat selber ersieht – zum Teil den Angaben des EUDOXOS gefolgt war.

16. HIPPARCHOS behauptet nämlich, daß die Zeitdauer des längsten Tages in Griechenland 14 3/5 (= 14,6) Stunden sei. Dagegen entspricht der einen Verhältniszahl des EUDOXOS (5:3) ein längster Tag von 15 Stunden, also eine um 24 Minuten *längere* Zeitdauer als diejenige nach der Berechnung des HIPPARCHOS. Der Unterschied macht 0,4 Stunden aus. Noch

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



2. Es geht – nach dem ausdrücklichen Zeugnis des HIPPARCHOS – die fehlerhafte Bestimmung der geographischen Breite für die Gegenden von Griechenland *seitens einiger späteren Astronomen* – «einige aus der Schule des PHILIPPOS und andere mehr», wie HIPPARCHOS schreibt – auf diese andere Verhältniszahl des EUDOXOS zurück.

Es besteht also gar kein Zweifel darüber, daß jene beiden Zahlenpaare, mit denen EUDOXOS das Verhältnis der Zeitdauer des längsten Tages und der kürzesten Nacht an einem Ort möglichst genau bestimmen wollte (12:7 oder 5:3 für Griechenland) nicht nur von HIPPARCHOS, sondern auch schon vor ihm durch andere Astronomen zur Bestimmung der Breite des betreffenden Ortes benutzt wurden. Wir legen einstweilen gar keinen besonderen Wert auf jene Streitfrage, die HIPPARCHOS hervorhebt, nämlich in welchem Maße diese frühen Berechnungen in der Tat ungenau und unzutreffend waren. Viel wichtiger ist für uns jetzt die andere Frage: War nicht auch EUDOXOS schon bestrebt, die betreffende Verhältniszahl genau festzustellen, weil er daraus eben die *geographische Breite* der Gegenden von Griechenland berechnen wollte?

Man wird von vornherein und aus mehreren Gründen geneigt sein, diese zuletzt gestellte Frage in bejahendem Sinne zu beantworten. Denn vor allem: man könnte gar keinen anderen Zweck namhaft machen. Wozu wäre es sonst nötig – von astronomischem oder von geographischem Gesichtspunkt aus – ein solches Verhältnis genau zu bestimmen, wenn nicht gerade, um auf diesem Wege die *geographische Lage* des betreffenden Ortes auf der Erdkugel zu charakterisieren? Man kennt die antike Art und Weise dieser Berechnung aus dem Werk des KLAUDIOS PTOLEMAIOS (2. Jahrhundert n.Chr.).

Man verliere außerdem auch die folgende Tatsache nicht aus dem Auge. Nicht nur die beiden Verhältniszahlen des EUDOXOS – 12:7 und 5:3 – sind *nahezu* gleich; auch jener Unterschied der Zeitdauer, den HIPPARCHOS nachdrücklich hervorhebt, ist eigentlich – wenn man an die alltäglichen Zeitbeobachtungen und Zeitbestimmungen der Alten denkt – *nicht so auffallend groß.* EUDOXOS sprach von einem längsten Tag von *genau 15 Stunden,* während HIPPARCHOS betonen wollte, daß dieselbe Zeitspanne *um 24 Minuten kürzer* sei. Dieser Unterschied der Zeitspanne

---

weniger zutreffend ist – nach den Maßstäben des HIPPARCHOS – die andere Verhältniszahl des EUDOXOS (12:7): denn dieser letzteren entspricht ein längster Tag von etwa 15, 156... Stunden, also eine noch längere Zeitdauer als diejenige nach der anderen Berechnung des EUDOXOS, die auch schon zu lang war. In diesem Fall (12:7) macht der Unterschied, gegen die durch HIPPARCHOS berechnete Zeitdauer, 0,556... Stunden aus. – Man vgl. dazu auch E. MAAS, *Aratea,* Berlin 1892, S. 286 ff.: F. LASSERRE, *Die Fragmente des Eudoxos von Knidos.* Berlin 1966, S. 194 f.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



wird eigentlich erst dann interessant, wenn man aus den beiden Angaben über die Zeitdauer des längsten Tages die *geographische Breite* des betreffenden Ortes berechnet. Erst dann stellt sich nämlich heraus, daß die eine Angabe $41^0$, dagegen die andere nur $37^0$ geographische Breite ergibt. Dieser Unterschied der Grade ($4^0$) in nord-südlicher Richtung – also einem irdischen Meridian entlang – ist schon eine beträchtliche räumliche Entfernung. (Nach einer Umrechnung des HIPPARCHOS : $4 \times 700 = 2800$ Stadien; vgl. STRABON, C 132). Interessant war also für die Alten der verhältnismäßig *kleine* zeitliche Unterschied in der Dauer des längsten Tages – 24 Minuten – deswegen, weil man auf Grund dessen auf eine ziemlich *große* räumliche Entfernung schließen konnte. Darum mag also auch schon EUDOXOS bestrebt gewesen sein, das Verhältnis des längsten Tages und der kürzesten Nacht möglichst genau zu bestimmen.

Man könnte sich nun – auf Grund einer sorgfältigen Erwägung jener Ausdrücke, in denen HIPPARCHOS seine Kritik gegen ARATOS-EUDOXOS formuliert – fragen, ob nicht auch schon EUDOXOS im 4. Jahrhundert v.Chr. die geographische Breite für Griechenland *nach derselben Methode hat berechnen können, deren Kenntnis für den Astronomen des 2. Jahrhunderts v.Chr. ohne jeden Zweifel erschlossen werden kann.*

Interessant ist die eben gestellte Frage auch schon deswegen, weil wir selbst für HIPPARCHOS die Kenntnis der fraglichen Methode erst nachweisen müssen. Wie gesagt, liegen die betreffenden Berechnungen im Werke des HIPPARCHOS n i c h t vor. Er deutet nur die *Ergebnisse* seiner Berechnungen an. Darum muß man zu allererst auf Grund von bloß ähnlichen Berechnungen im vorliegenden Werk des KLAUDIOS PTOLEMAIOS zeigen, wie HIPPARCHOS zweieinhalb Jahrhunderte v o r PTOLEMAIOS die eigenen Berechnungen ausgeführt haben *muß*. Erst danach kann man versuchen zu zeigen, daß die Methode selber doch n i c h t von HIPPARCHOS stammen kann. Man hat nämlich unzweifelhafte Zeugnisse, die verraten, daß auch schon v o r HIPPARCHOS andere Gelehrten im Grunde ähnliche Berechnungen angestellt haben müssen.

Es wird also durch die vorhin zitierte HIPPARCHOS-Stelle eine Reihe von interessanten wissenschaftshistorischen Problemen gestellt. Man kann sie um die folgenden drei Knotenpunkte gruppieren.

1. Seit wann gab es solche Beobachtungen des Schattenzeigers (des Gnomons), die das Hauptargument des HIPPARCHOS gegen die irrtümliche Angabe des EUDOXOS-ARATOS bilden? Wie und wann hat man jene Theorie ausgebaut, die es ermöglichte, bloß aus der Verhältniszahl der Schattenlänge zu einer bestimmten Zeit sowohl die geographische Breite des betreffenden Ortes wie auch die Zeitdauer des längsten Tages

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



daselbst zu berechnen? Welche historischen Belege besitzen wir denn – abgesehen von dem obigen Ausgangspunkt, der HIPPARCHOS-Stelle, – mit denen man die Vermutung erhärten könnte, daß derartige Kenntnisse und Berechnungen mit dem Gnomon evtl. tatsächlich schon dem EUDOXOS im 4. Jahrhundert v.Chr. zugeschrieben werden können?

2. Welches ist eigentlich der Zusammenhang zwischen den beiden Arten von Methoden: bloß aus der Schattenlänge des *Gnomon* genannten Stabes zu einem bestimmten Zeitpunkt die geographische Breite des betreffenden Ortes zu berechnen oder ein ähnliches Resultat aus der *Zeitdauer des längsten Tages* daselbst zu erzielen? Welche Theorie liegt der einen Art Berechnung zu Grunde und welche der anderen? Kann man etwa die Ergebnisse der beiden Berechnungsmethoden – einerseits mit dem Gnomon und andererseits mit Hilfe der Zeitdauer des längsten Tages – auch zu einer gegenseitigen *Kontrolle* anwenden? Oder ist der Zusammenhang der beiden Berechnungen von solcher Art, daß der etwaige Fehler in der einen Berechnung sich notwendig auch in der anderen wiederholt? Und wie verhält sich historisch die Berechnung aus der Zeitdauer des längsten Tages zu derjenigen auf Grund der Schattenlänge zu einem bestimmten Zeitpunkt?

3. Und schließlich: welche mathematischen–geometrischen und besonders *trigonometrischen* Kenntnisse sind unentbehrlich notwendig, um solche Berechnungen anstellen zu können, die in den vorigen zwei Punkten angedeutet wurden? Seit wann besaßen die griechischen Astronomen derartige Kenntnisse? Wo haben sie diese hergenommen? Oder auf welchem Wege haben sie jenen neuen Zweig der Mathematik aufgebaut, der dies alles ermöglichte? – Diese letztere Gruppe von historischen Problemen ist besonders darum interessant, weil die Antworten auf die hier gestellten Fragen die Entfaltung der griechischen Wissenschaft in ein anderes Licht stellen, als man bisher darüber zu denken gewohnt war.

Demnach gliedert sich der vorliegende Band – gemäß den drei «Knotenpunkten» – in drei Hauptteile. Im ersten Teil untersuchen wir vor allem das historische Problem des *Gnomon* genannten astronomischen Instrumentes. Daran schließt sich als zweiter Teil das *Problem des längsten Tages* an, während der dritte Teil jenen mathematikhistorischen Fragen gewidmet ist, die man sich – im Zusammenhang mit den astronomischen Berechnungen, die in den beiden vorangehenden Teilen berührt werden – unumgänglich stellen muß.

Erst nach den historischen Untersuchungen, die in den bei Hauptteilen des Buches vorgelegt werden, kommen wir zur Interpretation jener Textstelle bei HIPPARCHOS zurück, die am Anfang zitiert wurde.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens

# I. DER SCHATTENZEIGER

## 1. *Herodot und Anaximandros*

HERODOT im 5. Jahrhundert v.Chr. ist der älteste Verfasser der Antike, der den Schattenzeiger, den *Gnomon* der Griechen erwähnt. Er sagt nämlich – am Ende jener berühmten Stelle seines Werkes, die den Ursprung der Geometrie auf Ägypten zurückführt, – daß auf der anderen Seite «den *Polos* und den *Gnomon* sowie die zwölf Teile des Tages die Griechen von den Babyloniern gelernt» hätten[1]. Leider schildert der «Vater der Geschichte» mit keinem Wort, wie dieses Instrument zu seiner Zeit bei den Griechen benutzt wurde. – Eigentlich kann man auch das auf Grund seiner eben zitierten Bemerkung nicht mit Bestimmtheit wissen: Wie sind die Worte «Polos *und* Gnomon» zu verstehen? Handelt es sich hier um ein einziges Instrument? Oder ist der Polos von dem Gnomon irgendwie zu unterscheiden?

Ja, es erwiesen sich HERODOTS Worte beinahe als «irreführend», auch noch in einer anderen Hinsicht. Es war nämlich – da bei ihm der Polos und der Gnomon zusammen mit den «zwölf Teilen des Tages» sozusagen in einem Atem genannt werden – naheliegend, daran zu denken, daß es sich hier um eine Art *Sonnenuhr* handele, die *zur Bestimmung der Tageszeit* gedient hat.

Ohne Zweifel kann man mit dem sorgfältigen Beobachten der Schatten auch die Tageszeit bestimmen. Und in der Tat hat man den Gnomon in der Antike auch für solche Zwecke benutzt. Darum wird der Schattenzeiger gewöhnlich unter solchen Instrumenten behandelt, mit denen man die Tageszeit zu messen pflegte; er gilt eben als eine Art *horologium*[2].

Aber es gab auch unter den modernen Bearbeitern schon solche, die betonten: was wir von der ursprünglichen Bestimmung dieses Instrumentes hören, spricht eher dafür, daß es ebensosehr – *oder in noch höherem Maße* – astronomisch-kalendarischen Zwecken, nämlich der

---

1. HERODOT II 109.

2. So z.B. in den Artikeln *Horologium* in RE VIII (1913), 2416 ff. (A. REHM) und in: CH. DAREMBERG – E. SAGLIO, *Dictionnaire des Antiquités Grecques et Romaines*, t. III, p. 256-264 (E. ARDAILLON).



ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Bestimmung der Sonnenwenden und der Gleichen, diente wie der Messung der Tageszeit. Ja, der eine Verfasser[3] betonte sogar, daß der Gnomon auch später – also selbst bei den Römern, bei denen er schon sozusagen zu einem Inventarstück des Alltagslebens geworden war – immer noch ein «Hilfsmittel der gelehrten Forschung» geblieben sei.

Besonders erhärtet wird die Ansicht, daß der Gnomon ursprünglich auch anderen Zwecken, nicht bloß zur Bestimmung der Tageszeit gedient haben mag, wenn man jenen ältesten Fall seiner Anwendung ins Auge faßt, über den unsere Quellen berichten. Ich denke an den Fall des großen Milesiers, ANAXIMANDROS im 6. Jahrhundert v.Chr., dessen Name mehrmals im Zusammenhang mit dem Gnomon genannt wird. Nur sind in diesem Fall die Quellen, die über den Gnomon des ANAXIMANDROS berichten, ziemlich spät[4].

Die eine Quelle ist der Grammatiker DIOGENES LAERTIOS, der wohl erst im 2. Jahrhundert n.Chr., etwa unter HADRIANUS (Kaiser zwischen 117-138) sein berühmtes Werk über das Leben und die Lehren der Philosophen zusammengestellt hat. Der andere Gewährsmann, der Bischof EUSEBIOS, ist noch später, er lebte nämlich im 4. Jahrhundert n.Chr. Und schließlich ist die dritte Quelle, die die Errungenschaften des ANAXIMANDROS mit dem Gnomon erwähnt, das SUDA genannte Lexikon, das vermutlich erst im 10. Jahrhundert n.Chr. zusammengestellt wurde.

Natürlich ist die späte Zeit dieser Quellen in sich noch kein Beweis gegen ihre Glaubwürdigkeit. Es mag sein, daß sie ihr Wissen aus älteren und zuverlässigen Werken geschöpft haben, die für uns erst später verloren gingen. – Was unmittelbar die Berichte über den Gnomon des ANAXIMANDROS betrifft, so findet man unter diesen eigentlich nur einen einzigen, der von vornherein verdächtig ist. DIOGENES LAERTIOS behauptet nämlich, daß ANAXIMANDROS der «Erfinder» des Gnomons schlechthin gewesen sei.

Mit Zurückhaltung nimmt man diese Behauptung entgegen, nicht nur deshalb, weil schon HERODOT die Griechen ihren Gnomon von den Babyloniern übernehmen ließ und weil wir in der Tat Angaben besitzen, mit denen die ältere, vorgriechische Existenz des Gnomons in Babylon belegt werden kann. Es gibt auch sonst noch Gründe, die in uns Skepsis einer solchen Behauptung gegenüber erwecken. Wie kann man überhaupt wissen, wer zum ersten Male auf die Idee der Schattenbeobachtung gekommen ist? Ein Lichtbild in der volkstümlichen «Astronomie» von FRED HOYLE zeigt z.B., wie die Angehörigen eines

---

3. A. REHM in seinem ausgezeichneten Artikel; s. die vorige Anm.
4. H. DIELS – W. KRANZ, *Fragmente der Vorsokratiker* (8. Aufl. 1956) 12 A 1,2 und 4.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



primitiven Stammes auf Borneo versuchen, die Schattenlänge eines senkrecht stehenden Stabes in der Nähe der Sommerwende zu messen[5]. Der Gedanke an die Beobachtung des Schattens ist so einfach und naheliegend, daß der Gnomon – der senkrechte Stab, dessen Schatten das Vergehen der Zeit veranschaulicht, – selbst im vorgriechischen Mesopotamien offenbar schon eine uralte Tradition war.

Darum pflegt man nun den Bericht des Diogenes Laertios, wonach Anaximandros selber den Gnomon «erfunden» habe, in dem Sinne auszulegen, daß er den Schattenzeiger - den er vielleicht in Babylon kennengelernt hatte – wohl nur als erster bei den Griechen eingeführt hat.

Nicht so leicht von der Hand zu weisen ist die andere, alleinstehende Behauptung des Diogenes Laertios, wonach Anaximandros einen Gnomon in Sparta aufgestellt habe. – Wir sind zwar auch in diesem Fall nicht in der Lage, die Glaubwürdigkeit des Berichtes zu erhärten, aber man wird zugeben müssen: es ist nicht ausgeschlossen, daß in diesem Bericht auch noch in der späteren Antike die Erinnerung an eine historische Tatsache weiterlebte.

Interessanter werden jedoch die erwähnten drei Berichte über den Gnomon des Anaximandros erst dann, wenn man ihre gemeinsamen Züge aufmerksamer ins Auge faßt. Es fällt nämlich vor allem auf, daß keiner dieser Berichte einen solchen Hinweis enthält, der uns unmittelbar an die Tageszeit denken ließe. Wohl benutzt zwar Eusebios in diesem Zusammenhang den Ausdruck *Zeiten und Horen* (χρόνοι καὶ ὧραι), aber man denkt bei diesen Worten vielmehr an die *Jahreszeiten,* und nicht an unsere Stunden des Tages. Noch eindeutiger wird dies, wenn man bedenkt, daß alle drei Quellen dabei auch noch die *Sonnenwenden* und die *Tag- und Nachtgleichen* hervorheben.

Der völlig übereinstimmende Bericht der drei Quellen ließe sich also darin zusammenfassen, daß nach diesen Anaximandros mit dem Gnomon die *Jahreszeiten,* die *Sonnenwenden* sowie die *Tag- und Nachtgleichen* bestimmt hat. Die letzteren sind eben die exakten Grenzen der Jahreszeiten. – Man kann den wesentlichen Inhalt derselben Berichte noch weiter präzisieren, wenn man sich überlegt, wie man ein solches einfaches Instrument überhaupt benutzen kann.

Der Gnomon ist zunächst ein gerader Stab, den man in der horizontalen Ebene senkrecht aufstellt, um seinen Schatten sorgfältig zu beobachten. Von Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang verändert sich

---

5. Ich sah dieses Lichtbild in der italienischen Übersetzung des Buches von Fred Hoyle, *L'astronomia. Il cammino della scienza,* Sansoni editore, 1962 auf S. 31.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



dieser Schatten eigentlich ununterbrochen. In der ersten Tageshälfte verkürzt er sich, und dann verlängert er sich wieder ständig. Es gibt jedoch zwischen den beiden größeren Zeiträumen des Sich-Verkürzens und Sich-Verlängerns jenen beachtenswerten Zeitpunkt, bei dem der Schatten des Stabes am kürzesten ist. Das ist der Mittagschatten des Gnomons. Zu diesem Zeitpunkt scheint die Sonne die höchste Stelle ihrer täglichen Laufbahn am Himmel einzunehmen, und die Richtung des Schattens ist zu diesem Zeitpunkt – und auf jenem Teil der Erde, wo wir leben (auf der nördlichen Hemisphäre) – die süd-nördliche. Man kann diese letztere Tatsache auch so formulieren: Zur Mittagszeit fällt die Richtung des Schattens von einem senkrechten Stab mit dem *Meridian* des Beobachtungsortes zusammen.

Frühzeitig muß den Menschen wohl auch jene Tatsache aufgefallen sein, daß der Mittagschatten eines senkrechten Stabes keineswegs immer dieselbe Länge hat. Im Sommer scheint die tägliche Laufbahn der Sonne ein solch größerer Bogen am Himmelsgewölbe zu sein, dessen höchster Punkt nördlicher, d.h. dem scheinbar höchsten Punkt des Himmels, demjenigen über dem Kopf des Beobachters (dem Zenitpunkt), *näher* als im Winter gelegen zu sein scheint. Der Mittagstand der Sonne ist im Sommer *höher* als im Winter. – Dagegen scheint im Winter die Laufbahn der Sonne am Himmel ein kürzerer Kreisbogen zu sein, der dem vorhin erwähnten anderen Kreisbogen (der Sommer-Laufbahn der Sonne) zwar parallel ist, dessen höchster Punkt jedoch von dem Zenitpunkt entfernter, mehr nach Süden zu auf das Himmelsgewölbe gelegt zu sein scheint. Der Mittagstand der Sonne ist im Winter *niedriger* als im Sommer. Darum ist der Mittagschatten des senkrechten Stabes im Winter immer *länger* als im Sommer. – Es gibt also einen *kürzesten* Mittagschatten des Gnomons im Sommer und einen *längsten* Mittagschatten des Gnomons im Winter.

Bedient man sich nun derselben Skizze, mit deren Hilfe PTOLEMAIOS im Kapitel 5. des II. Buches[6] seine Berechnungen mit dem Gnomon illustriert, so kann man an unserer beigelegten Fig. 1 den einfachsten Gebrauch des Schattenzeigers folgendermaßen veranschaulichen[6a].

Es sei ΕΓ der senkrecht stehende Gnomon. Die waagerechte Linie ΓΚΝ zeige einen Abschnitt des irdischen Meridians in der horizontalen Ebene, d.h. der Mittagschatten des Stabes falle immer auf diese Linie, die auf diese Weise die süd-nördliche Richtung vom Punkt Γ ab angibt. Es gibt einen *kürzesten Mittagschatten* des Gnomons — ΓΚ — im

---

6. MANITIUS 1912-13, S. 67.

6a. Man findet alle Figuren, auf die der Text Bezug nimmt, am Ende dieses Bandes.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Sommer (gewöhnlich am 21. Juni), an dem Tag nämlich, an dem der Punkt H (am Himmel) den Mittagstand der Sonne veranschaulicht. Und es gibt einen *längsten Mittagschatten* des Gnomons (ΓN) im Winter (etwa am 21. Dezember); an diesem Tag scheint die Sonne zu Mittag – vom Punkt Γ aus betrachtet – im Punkt Λ des Himmels zu stehen.

Der kürzeste und der längste Mittagschatten des Gnomons entsprechen also zwei wichtigen Daten des Jahres: einem Sommertag und einem Wintertag. An einem bestimmten Sommertag ist der Mittagstand der Sonne – vom Punkt Γ aus betrachtet – der *höchste* am Himmel. Je näher man diesem Datum kommt, umso höher scheint die Sonne zu Mittag am Himmel zu stehen, so als fiele ihr Aufgangsort jeden Tag mehr und mehr nach Norden zu. (Wohl könnte man in Wirklichkeit eher von einer scheinbaren «Schraubenbewegung» der Sonne sprechen, mit der ihre Laufbahn am Himmel vom Bogen des einen Tages in denjenigen des anderen hinübergeht. Aber noch einfacher denkt man sich die täglichen Bogen der Sonnenlaufbahn am Himmel – wenn der Sommer herannaht – als immer größer werdende Abschnitte von *parallelen* Kreisen).

Hat jedoch einmal der Mittagstand der Sonne seinen höchsten Kulminationspunkt in H – und der Gnomon seinen kürzesten Mittagschatten ΓK — erreicht, so hat man nachher bald den Eindruck, als hätte sich die Sonne *gewendet.* Je mehr man sich vom Sommer entfernt, und je mehr der Winter herannaht, umso niedriger scheint der tägliche Kulminationspunkt der Sonne am Himmel zu sein, und umso länger ist der Mittagschatten des Gnomons. Ihren nächsten Wendepunkt erreicht die Sonne, bzw. ihr täglicher Kulminationspunkt den *niedrigsten* Stand in Λ, mit dem längsten Mittagschatten (ΓN) an einem bestimmten Dezembertag.

Es sind also eigentlich die *Wendepunkte* der Sonne – ihr höchster und ihr niedrigster täglicher Kulminationspunkt im Jahr –, die durch den kürzesten und längsten Mittagschatten des Gnomons sozusagen «exakt» nachweisbar werden. Denn man könnte am Himmel die Wendepunkte – d.h. genauer: die scheinbaren Stellen der höchsten und der tiefsten täglichen Kulmination – gar nicht bestimmen, während die entsprechenden Schatten die nicht fixierbaren himmlischen Punkte sozusagen «greifbar» machen.

Man sieht auch am kürzesten und am längsten Mittagschatten des senkrechten Stabes zwei wichtige Grenzpunkte des Jahres. Es nimmt genau ein *halbes Jahr* Zeitspanne in Anspruch, während der Mittagschatten des Gnomons von ΓK sich auf ΓN verlängert – von Sommerwende bis Winterwende. Ebenso wird es ein halbes Jahr dauern, bis der

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Mittagschatten sich von ΓN auf ΓK verkürzt – diesmal von Wintersonnenwende bis Sommersonnenwende[7]. Es leuchtet auch ohne weiteres ein, daß die Tage mit dem Sich-Verkürzen des Mittagschattens immer länger werden, nachdem die Laufbahn der Sonne von Wintersonnenwende bis Sommersonnenwende (auf unserer nördlichen Hemisphäre) von Tag zu Tag einen größeren Bogen zu beschreiben scheint. Dagegen werden die Tage mit dem Sich-Verlängern des Mittagschattens (von Sommerwende bis Winterwende) immer kürzer, wie auch die tägliche Laufbahn der Sonne am Himmelsgewölbe ein immer kleinerer (niedrigerer) Bogen zu werden scheint.

Der jährliche Prozeß des Sich-Verlängerns und Sich-Verkürzens der Tage läuft selbstverständlich parallel (doch in entgegengesetztem Sinne) mit dem Sich-Verkürzen bzw. Sich-Verlängern der Nächte: Wenn die Tage sich verlängern, verkürzen sich die Nächte, und umgekehrt.

## *2. Das Heliotropion*

Das Zeigen der *Sonnenwenden* – mit dem kürzesten bzw. mit dem längsten Mittagschatten – mag wohl die älteste Bestimmung des Gnomons gewesen sein. Darum heißt der Gnomon manchmal auch *heliotropion* (etwa: «Sonnwend-Zeiger»).

Das erste Mal werden in der antiken Literatur die *Sonnenwenden* in der Odyssee erwähnt – allerdings in einer Form, aus der der Sinn nicht klar genug hervorgeht. EUMAIOS, der Schweinehirt, spricht im 15. Gesang (403-404) von seiner Heimat, der Insel Syrie - über Ortygie -, wo die «Wenden der Sonne» (τροπαὶ ἡελίοιο) sind. – Man kann kaum mit Bestimmtheit sagen, wie dieser rätselhafte Ausdruck hier zu verstehen sei. Es ist beinahe leichter, sich darüber zu äußern, was er *nicht* heißen kann. – Genau mit diesem Ausdruck bezeichnet nämlich der spätere, der wissenschaftliche Sprachgebrauch entweder die bloß gedachten *Wendekreise der Sonne* am Himmelsgewölbe – etwa je $24^0$ nördlich und südlich vom himmlischen Äquator – oder die *Projektionen* derselben Kreise auf die Erdkugel. – Doch ist es völlig ausgeschlossen, daß der Dichter in diesem Sinne von den Sonnenwenden gesprochen hat – einfach deswegen, weil er dann das Wort *nicht* im Plural hätte benutzen können. Wohl könnte eine Insel unter dem *einen* der Wendekreise der Sonne liegen; oder man könnte auch sagen, daß «auf der Insel» die

---

7. Man vgl. zu dieser Behauptung auch weiter unten (S. 119): die Entdeckung des THALES über die Perioden der Sonnenwenden.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Wende der Sonne wäre (die nördliche oder die südliche). Aber unmöglich können die W e n d e n d e r S o n n e – im eben angedeuteten astronomisch-geographischen Sinne – auf einer einzigen Insel sein. – Es mag zwar befremden, aber wollte man irgendeinen konkreten Sinn hinter dem Ausdruck der Odyssee, «die Wenden der Sonne», vermuten, so ließe sich vor allem an ein mächtiges *Heliotropion*, etwa an eine hohe Säule auf der märchenhaften Insel Syrie denken, die mit ihrem kürzesten und längsten Mittagschatten im Jahr die «Wenden der Sonne» zeigen könnte.

Man kennt in der Tat solche großen Sonnwend-Zeiger auch aus anderen, späteren Quellen. Einen solchen hat wohl der legendenhafte PHEREKYDES VON SYROS – Zeitgenosse der sieben Weisen und Lehrer des PYTHAGORAS – in seiner Heimat, auf der Insel Syros, aufgestellt[8]. Und ähnlich mag in historischen Zeiten derjenige von Theben[9] bzw. der andere von Syrakus gewesen sein. Über den letzteren liest man in unserer Quelle[10]: Es stand am Fuß der Burg und der *Pentepylen* (so hieß das schöne *fünffache Tor*, durch das man von der Stadt Syrakus aus zur Burg zog), von DIONYSIOS[11] hergestellt, *ein weit sichtbarer, hoher Sonnwend-Zeiger (heliotropion)*.

Es wird nun – da die Quellen selbst den Gebrauch der Sonnwend-Zeiger meistens *nicht* schildern – in den Übersetzungen und Erklärungen manchmal vermutet, daß diese Gegenstände ebenso zum Zeigen der *täglichen Stunden* gedient hätten wie etwa unsere Turmuhren. Eine solche Ansicht wurde z.B. im Zusammenhang mit dem Sonnwend-Zeiger von Syrakus formuliert[12]. Aber ich halte es doch für viel wahrscheinlicher, daß diese monumentalen Gnomone ebenso *kalendarischen Zwecken* dienten wie der berühmte *obeliscus* des AUGUSTUS auf dem Campus Martius, anläßlich dessen PLINIUS eben die «Längen der Tage und Nächte» hervorhebt[13]. (*«Ei, qui est in campo, divus Augustus addidit mirabilem usum ad deprendendas solis umbras d i e r u m q u e e t n o c t i u m ita m a g n i t u d i n e s»*). Es war mit Stein ausgelegt, wie lang der Mittagschatten der Säule bei Wintersonnenwende ist (*«strato*

---

8. DIOG. LAERT. I 11, S. 6.
9. POLYB. V 99, S. 8.
10. PLUT. DION 29.
11. Der ältere DIONYSIOS, Tyrannos von Syrakus, lebte von 431-367 v.Chr. – Der jüngere dagegen, Sohn des vorigen, war von 367-343 daselbst politisch tätig.
12. Über diesen heißt es in J.G. HUTTENS PLUTARCH-Ausgabe (*Plutarchi Chaeronensis quae supersunt omnia*, vol. VI. Tübingen 1794) auf S. 196 Anm. 1: «*Solarium*, quod est fere horologium, in quo ex umbra gnomonis in sole *horae possunt dignosci*.»
13. PLINIUS, *N.h.* XXXVI 10.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



*lapide ad longitudinem obelisci, cui par fieret umbra brumae confectae sexta hora»).* Außerdem waren, in Erz geschnitten, auch die Regeln auf der Säule aufgezeichnet, wonach der Schatten sich von Tag zu Tag verkürzen bzw. später sich wieder verlängern sollte *(«paulatimque per regulas, quae sunt ex aere inclusae, singulis diebus decresceret ac rursus augesceret»).* Und dies alles sei der Begabung des zeitgenössischen Mathematikers, FACUNDUS NOVUS, würdig gewesen *(«digna res cognitu ingenio Facundi Novi mathematici etc.»)*; er hat also offenbar die Regeln für den Schatten des *obeliscus* formuliert. – Aber leider funktionierte dieser Sonnwend-Zeiger, wie PLINIUS bemerkt, in seinen Tagen seit etwa 30 Jahren nicht mehr tadellos[14].

### *3. Die Verdienste des ANAXIMANDROS*

Welches mögen nun die Verdienste des ANAXIMANDROS um den Gnomon – im Sinne der drei genannten Quellen (DIOGENES LAERTIOS, EUSEBIOS und SUDA) – gewesen sein? Es wurde schon hervorgehoben, daß man das «Erfinden» des Gnomons – wie dies bei DIOGENES LAERTIOS heißt – kaum ihm zuschreiben können wird. Hätte er dann etwa bloß die *Sonnenwenden* mit seinem Instrument gezeigt? – Dies ist deswegen nicht wahrscheinlich, weil erstens das Zeigen der Sonnenwenden wohl ebenso alt ist wie der Schattenzeiger selber, und zweitens, weil das Messen des kürzesten und längsten Mittagschattens gar keine besondere Schwierigkeit bedeutet.

Den kürzesten Mittagschatten, denjenigen der Sommerwende (ΓK auf Fig. 1) findet man in der Tat sehr leicht. Im Sommer sind die Schatten schärfer, darum kann man diese Länge ziemlich leicht messen. – Ein wenig anders ist es, wenn es auf den Mittagschatten der *Winterwende* ankommt (ΓN). So behauptet KLAUDIOS PTOLEMAIOS im 2. Jahrhundert n.Chr.[15]: «Die äußersten Endpunkte der Mittagschatten bei *Wintersonnenwende* können nicht mit genügender Schärfe ermittelt werden». – Den Grund für diese Tatsache erklärt der Übersetzer, K.

---

14. Es ist bezeichnend, auf welche Gründe PLINIUS das Versagen des Instrumentes zurückzuführen versuchte; l.c.: *«haec observatio XXX iam fere annis non congruit, sive solis ipsius dissono cursu et caeli aliqua ratione mutato sive universa tellure a centro suo aliquid emota (ut deprehendi et aliis in locis accipio) sive urbis tremoribus ibi tantum gnomone intorto, sive inundationibus Tiberis sedimento molis facto, quamquam ad altitudinem impositi oneris in terram dicuntur fundamenta».*

15. II 5. MANITIUS 1912-13 I, S. 68.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



MANITIUS, an der hier wiederholten Skizze (Fig. 2) folgendermaßen[16] :

«Je tiefer die Sonne steht, umso länger wird der über den Kernschatten hinausgehende Halbschatten. Das Ende des Kernschattens *(a)* liegt da, wo eine vom *oberen* Sonnenrande durch die Spitze des Gnomons gezogene Gerade die horizontale Ebene trifft; das Ende des Halbschattens *(c)* da, wo die vom *unteren* Sonnenrande gezogene Gerade auftrifft. Es liegt mithin der für die Länge des Schattens maßgebende Punkt *(b)*, in welchem die vom *Mittelpunkt* der Sonne durch die Spitze des Stabes gezogene Gerade auftrifft, im *Halbschatten* und wird umso schwieriger zu bestimmen sein, je länger der Schatten ist. – Erst die byzantinischen Astronomen des fünften Jahrhunderts n.Chr. suchten dieser Schwierigkeit dadurch abzuhelfen, daß sie an der Spitze des Gnomons eine kleine Scheibe mit einer kreisrunden Öffnung anbrachten, um in dem Mittelpunkt des so erzeugten Sonnenbildchens den maßgebenden Punkt der Schattenlänge zu erhalten».

Wie das Zitat zeigt, war also die Beseitigung der praktischen Schwierigkeit des Schattenmessens in diesem Fall eher nur eine technische Vervollkommung. Etwas ähnliches scheint übrigens – im Sinne der Fortsetzung der vorhin erwähnten PLINIUS-Stelle – auch schon der Mathematiker FACUNDUS NOVUS zur Zeit des AUGUSTUS erstrebt zu haben. Die Errungenschaft des ANAXIMANDROS mit dem Gnomon, deren Andenken die Überlieferung aufbewahrt hatte, war wohl etwas anderes.

Liest man nämlich die Berichte über den Gnomon des ANAXIMANDROS aufmerksamer, so fällt einem sogleich auf, daß in allen dreien die *Tag- und Nachtgleichen* mit besonderem Nachdruck betont werden. Ja, nach der Formulierung des SUDA-Berichtes hat sogar ANAXIMANDROS als *erster die Tag- und Nachtgleichen gefunden* (πρῶτος δὲ ἰσημερίαν εὗρε).

Natürlich fragt man sich auch in diesem Fall wieder etwas mißtrauisch: Und hätten die Menschen v o r ANAXIMANDROS in der Tat gar nichts von der Tag-und Nachtgleiche gewußt? – Es wäre wohl verkehrt, wenn man den alten Bericht in diesem strengsten Sinne des Wortes auszulegen versuchte. Der Gedanke an die Tag- und Nachtgleiche stammt vermutlich aus viel älteren Zeiten als ANAXIMANDROS. Haben nämlich die Menschen einmal entdeckt, daß in der einen Jahreshälfte die Tage sich verlängern und die Nächte sich verkürzen, während in der anderen, umgekehrt, die Tage sich verkürzen und die Nächte länger werden, so war es naheliegend, wohl auch daran zu denken, daß in dem wechselseitigen Prozeß des Sich-Verlängerns und Sich-Verkürzens der Zeitdauer der beiden natürlich zweimal jener Zustand eintreten muß, bei dem Tag und

16. MANITIUS 1912-13 I, S. 419-420.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Nacht gleich sind. In diesem Sinne muß das Äquinoktium eine sehr alte Entdeckung sein.

Aber auf der anderen Seite kann die Bedeutung der Tag- und Nachtgleiche für das alltägliche Leben der Menschen – besonders unter einfacheren Verhältnissen – mit der Bedeutung der Sonnenwenden doch nicht verglichen werden. Man hat auch beobachtet, daß der Verfasser des ältesten griechischen Bauernkalenders, HESIODOS im 7. Jahrhundert v.Chr., die Sonnenwenden als Grenzen von Perioden zwar mehrmals nennt[17], aber die Tag- und Nachtgleichen nie erwähnt[18]. Außerdem ist auch für die sinnliche Wahrnehmung die gleichlange Zeitdauer des Tages und der Nacht nicht so unmittelbar gegeben wie der auffallendere Unterschied beider Perioden anläßlich der Sonnenwenden. Selbst PTOLEMAIOS im 2. Jahrhundert n.Chr. spricht noch davon, daß es gar nicht leicht ist, den genauen Zeitpunkt der Tag- und Nachtgleiche durch Beobachtung festzustellen[19]. Der große Unterschied besteht nämlich eben darin, daß die beiden Sonnenwenden in der Tat beobachtet werden, während die Tag- und Nachtgleichen *berechnet* werden müssen[20].

Und dies ist wohl auch der Grund, warum jene vorgriechischen Angaben über die Längenmaße des Mittagschattens von einem Gnomon, die uns aus älteren Zeiten zur Verfügung stehen, für die Tag- und Nachtgleichen immer unzuverlässig sind. Wir besitzen nämlich babylonische Texte, die solche Längenmaße für verschiedene Tageszeiten, *doch nur für vier Tage des Jahres, für je die beiden Sonnenwenden und Tag- und Nachtgleichen aufzeigen*[21]. (Ebenso war es übrigens auch bei den Griechen in hellenistischer Zeit; auch jene Linien, die in die hellenistischen konkav-halbkugelförmigen Sonnenuhren eingeritzt sind, zeigen nur die Stundenschatten an Solstitien und Äquinoktien)[22]. Man mußte

---

17. HESIODOS, *Erga*, S. 564, 663 (ἀνατολαὶ bzw. δυσμαὶ — ἡλίου θερινὰι χειμερινὰι).

18. T.L. HEATH, *Aristarchus of Samos*, Oxford 1913, S. 11.

19. Er spricht in diesem Zusammenhang (II 5) von χρόνος ἀόριστος; vgl. dazu die Übersetzung von MANITIUS 1912-13, I, S. 68.

20. M.P. NILSSON, *Die Entstehung und religiöse Bedeutung des griechischen Kalenders*. 2. Aufl. 1962, S. 27-28 Fn. 3.

21. D.R. DICKS, *Early Greek Astronomy to Aristotle*. Ithaca-New York 1970, S. 166: «... the mulAPIN texts include a list of shadow lengths for a gnomon at different hours of the day on four days in the year, namely, the equinoxes and solstices». – DICKS verweist in diesem Zusammenhang auf die folgenden Werke: WEIDNER, Amer. Journ. Sem. Lang. and Lit. 40, 1924, 198 f.; NEUGEBAUER, Isis 37, 1947, 37-43; H.v.d. WAERDEN, *Anfänge der Astronomie*, S. 80-81.

22. Ebd.: «Hellenistic and later hemispherical sun-dials are engraved with lines representing the hour shadows at the solstices and the equinoxes.» – Daselbst Hinweis auf H. DIELS, *Antike Technik*, S. 162-163.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



jedoch bemerken, daß die babylonischen Angaben – besonders was die Längenmaße der Schatten bei Tag- und Nachtgleiche betrifft – *auffallend ungenau sind.* Moderne Forscher versuchten, diese Ungenauigkeit damit zu erklären, daß man in Babylon vermutlich der ganzen Berechnung die falsche Annahme zugrundegelegt hatte, nach der das Sich-Verkürzen und Sich-Verlängern des Schattens – parallel mit dem Vergehen der Tage – etwa in einer arithmetischen Progression erfolgen sollte. Stimmte dies in der Tat, dann genügte es natürlich, nur den kürzesten Schatten bei Sommersonnenwende genau zu messen (ΓK auf Fig. 1) und etwa noch herauszubekommen, in welchem Maße dieser Schatten von Zeit zu Zeit länger wird; alles andere folgte daraus nach einem einfachen Schema[23]. Um dies noch konkreter zu beleuchten: Im Sinne dieser irrtümlichen Annahme sollte das Streckensegment KN auf Fig. 1 – um die Schattenlänge zu Mittag bei Tag- und Nachtgleiche zu bekommen – etwa *halbiert* werden (eine Erwartung, die in Wirklichkeit nie in Erfüllung geht).

Nachdem nun die Babylonier – von denen die Griechen nach der Tradition den Gnomon übernommen hatten – mit diesem Instrument nur *ungenaue Messungen* vornehmen konnten, wäre es, von dieser Seite her betrachtet, in der Tat gar nicht ausgeschlossen, daß vielleicht die Errungenschaft des ANAXIMANDROS mit dem Gnomon eben darin bestand, daß die Messung vervollkommnet bzw. daß *das richtige, methodische Messen des Mittagschattens der Tag- und Nachtgleiche überhaupt gefunden wurde.* – Angesichts der aus Babylon bekannten historischen Tatsachen gewinnt also die Tradition über ANAXIMANDROS an Wahrscheinlichkeit.

Noch mehr erhärtet wird die Glaubwürdigkeit derselben Berichte, wenn man sich jene beiden Tatsachen überlegt, die ich hier – in Vorwegnahme der folgenden Untersuchungen – mit Nachdruck hervorhebe :

1. Wie man später sehen wird, war der Gnomon in der Tat ein wichtiges wissenschaftliches Instrument auch für die griechische Astronomie und Geographie. Aber wirklich zu einem solchen wurde der

---

23. DICKS, op. cit., S. 166: «The data are very inaccurate for the latitude of Babylon (particularly the equinoctial and winter solstitial figures), which is not surprising since the underlying assumption seems to be that the length of the shadow increases in arithmetical progression with the height of the sun (which is of course incorrect). Moreover, the results are set out according to a predetermined scheme whereby the solstices and equinoxes are placed arbitrarily on the fifteenth day of the first, fourth, seventh, and tenth months of a schematic year of twelve months and thirty days each: probably the only actual observation was of the shadows at the summer solstice (which are less inaccurate than the others), and the rest of the data were calculated to fit the theoretical scheme.»

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



senkrecht aufgestellte Stab erst dadurch, daß man die Methode herausbekommen hatte, *w i e mit ihm der Mittagschatten der Tag- und Nachtgleiche zu messen ist.* Solange dies *nicht* bekannt war, vermochte man mit dem Gnomon eigentlich nur *drei* interessante Zeitpunkte zu illustrieren: Der kürzeste Schatten am Tag ergibt die Mitte des Tages (den *Mittag*); der kürzeste Mittagschatten im Sommer ist das Zeichen der *Sommerwende,* und der längste Mittagschatten im Jahr ist derjenige der *Winterwende.* – Hatte man jedoch auch die Methode gefunden, wie der Mittagschatten der *Tag- und Nachtgleiche* zu messen ist, so bekam man dadurch nicht bloß zwei weitere interessante Daten des Jahres, die beiden *Äquinoktien.* Es wird hier später gezeigt, daß dieselbe Methode sogleich auch ein damals neues *astronomisches Maß ergab,* wodurch sowohl die Stelle des *himmlischen Äquators* wie auch diejenige seiner irdischen Projektion – also die Stelle des *Äquators auf der Erde* – sich zum ersten Male präzisieren ließ. – Eine weitere Konsequenz der neuen Methode war, daß man bald erkannte, daß man den Gnomon, in der Kenntnis seiner exakten äquinoktialen Schattenlänge, *auch für die Bestimmung der geographischen Lage eines gegebenen Ortes benutzen kann.* (Auch dies wird später ausführlicher besprochen).

Zusammenfassend kann man sagen: Der Gnomon ist in der Tat eben dadurch zu einem wissenschaftlichen Instrument – im höheren Sinne des Wortes – geworden, daß man dahinter kam, *wie man die Länge seines äquinoktialen Mittagschattens berechnen kann.*

Es besteht nun gar kein Zweifel darüber, daß diese Tat – die Umwandlung des Gnomons in ein so wichtiges Instrument – *der griechischen Wissenschaft zu verdanken ist.* Kein Mensch hat – nach unseren heutigen historischen Kenntnissen – vor den Griechen mit dem einfachen Schattenzeiger derartige Messungen durchgeführt, wie es die eben angedeuteten sind.

Es gibt auf der anderen Seite indirekte Belege auch dafür, daß jenes «astronomische Maß» – dessen Kenntnis im Laufe dieser Untersuchung sich bald als eine Konsequenz des äquinoktialen Schattenmessens erweisen wird – den Griechen *frühzeitig,* um die Mitte des 5. Jahrhunderts v.Chr., also knapp ein Jahrhundert nach ANAXIMANDROS, auf alle Fälle schon bekannt war.

Die drei Quellen (DIOGENES LAERTIOS, EUSEBIOS und das Lexikon SUDA) besagen also eigentlich nur insofern etwas besonderes, als sie das Entdecken der grundlegenden Messung mit dem Gnomon *nicht* der griechischen Wissenschaft im allgemeinen, sondern dem ANAXIMANDROS in Person zuschreiben. Dabei ist diese Zuschreibung in der antiken Literatur ziemlich einstimmig. Denn es gibt zwar eine Stelle bei PLINIUS

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



(*N.h.* II 186-187), die den Gnomon *nicht* dem ANAXIMANDROS, sondern seinem Schüler ANAXIMENES zuschreibt. Da jedoch hier auch der berühmte Gnomon in Sparta als ein Werk des ANAXIMENES erwähnt wird, hielt man dies – soweit ich sehe – im allgemeinen[24] bloß für eine Verwechslung.

2. Noch eine andere Tatsache trägt wesentlich zur Glaubwürdigkeit der Berichte über die Errungenschaft des ANAXIMANDROS mit dem Gnomon bei; auch diese will ich hier – ebenfalls in Vorwegnahme späterer Erörterungen – nachdrücklich betonen.

Man wird nämlich bald sehen, daß der Bericht über den Gnomon des Milesiers gar nicht sozusagen «isoliert» in unserer ANAXIMANDROS-Überlieferung dasteht. Es stimmt zwar, daß das überlieferte historische Bild vom astronomischen System dieses Bahnbrechers der Wissenschaft nur in großen Zügen bekannt, daß es lückenhaft und verschwommen ist. Aber es gibt selbst in diesem skizzenhaften Bild einige wesentliche Züge, die erst dann sinnvoll und bedeutend werden, wenn man ihren organischen Zusammenhang mit dem Gnomon des ANAXIMANDROS versteht. Die Überlieferung über den Gnomon verhilft uns zu einem besseren Verstehen des ganzen Weltbildes des ANAXIMANDROS.

Die Schwierigkeit besteht eher darin, daß nicht unmittelbar berichtet wird, wie ANAXIMANDROS seine Methode für das Messen des Mittagschattens bei Tag- und Nachtgleiche herausbekommen hat. – Im folgenden versuche ich die Rekonstruktion dieser Methode auf einem Umweg.

### 4. *VITRUVIUS*

Der Römer VITRUVIUS, der Architekt des JULIUS CAESAR und AUGUSTUS – der also etwa *fünf* Jahrhunderte nach ANAXIMANDROS gelebt hat – schildert im 9. Buch seines Werkes[25], wie eine Sonnenuhr konstruiert wird. Mir scheint diese Schilderung für unser Problem sehr aufschlußreich zu sein.

VITRUVIUS beginnt nämlich seine Erörterung mit dem Vorausschicken jener grundlegenden Tatsache, deren Erkenntnis einst im Laufe der

---

24. H. DIELS – W. KRANZ, *Fragmente der Vorsokratiker* I⁸, S. 93, 39 verweist anläßlich der Stelle über ANAXIMENES sogleich auf das entsprechende Fragment über ANAXIMANDROS. – Außerdem vgl. man J. SOUBIRAN, *Vitruve, De l'architecture*, Paris 1969, S. 219: «PLINE attribue la découverte (du gnomon) à ANAXIMENE, alors que DIOGENE LAERCE la met à l'actif d' ANAXIMANDRE – *ce qui paraît plus vraisemblable etc.*».

25. *VITRUVIUS, De architectura* IX 1 und IX 7, 1, 11.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Entwicklung der Wissenschaft *von ausschlaggebender Bedeutung* gewesen sein muß. Diese Tatsache besteht darin, daß die Länge des Mittagschattens von einem senkrechten Stab bei Tag- und Nachtgleiche *je nach dem geographischen Ort, wo sie gemessen wird, nicht dieselbe* ist.

*«Ea autem sunt divina mente comparata habentque admirationem magnam considerantibus, quod u m b r a a e q u i n o c t i a l i s*[26] *alia magnitudine est Athenis, et alia Alexandriae, alia Romae, non eadem Placentiae ceterisque orbis terrarum locis».*

Natürlich weiß auch VITRUVIUS, daß die Verschiedenheit der äquinoktialen Schattenlängen mit der geographischen Breite des betreffenden Ortes – bzw. wie er sich ausdrückt: mit der *Krümmung des Himmelsgewölbes (declinatio caeli)* im Zusammenhang steht. «Die Sonne ist ja Urheberin dessen, wenn sie sich im Zeichen des *Widders,* oder in demjenigen der *Waage* bewegt[27]», schreibt VITRUVIUS, «daß a c h t Einheiten lang der Schatten jenes Gnomons wird, dessen Länge n e u n Einheiten beträgt – unter jener Krümmung des Himmelsgewölbes, die für R o m gilt».

Ich muß hier – um Mißverständnissen vorzubeugen – gleich zwei Bemerkungen einfügen :

1. Die Tatsache, daß die Länge des Mittagschattens von einem Gnomon auch an demselben Tag immer wieder eine andere ist – *je nach dem geographischen Ort, wo Gnomon und Schatten gemessen werden* –, folgt für uns aus der *Kugelgestalt der Erde.* Derselbe Gnomon hat an demselben Tag einen *weniger* langen Schatten in Alexandria als z.B. in Placentia-Piacenza (in Nord-Italien), da Alexandria viel südlicher als diese andere Stadt liegt. – Die Kugelgestalt der Erde ist jedoch für die antike Denkweise sozusagen nur eine «Konsequenz» der Kugelform des Weltalls. Nach dem geozentrischen Weltbild schwebt die Erde frei im Mittelpunkt der mächtigen himmlischen Kugel; ihre konvex-kugelige Form entspricht der konkaven Kugel des sie umgebenden Himmels. Der Pol der Erde, ihre beiden Wendekreise und ihr Äquator sind nur Projektionen des Himmelspols bzw. der entsprechenden himmlischen

---

26. Es ist bezeichnend, daß bloß *umbra aequinoctialis* gesagt wird. Die weitere zeitliche Präzisierung dieser Angabe (nämlich: *sexta hora* = «um 12 Uhr mittags») kann auch fortbleiben.

27. Op. cit. IX 7,1: «Nam sol (ariete libraque versando) quas e gnomone partes habet *novem*, eas umbrae facit *VIII* in declinatione caeli quae est Romae.» — *«Widder»* (aries) und *«Waage»* (libra) stehen im Text des VITRUVIUS für die Periode um die Frühlings- und Herbst-Nachtgleiche. Infolge der rückläufigen Bewegung, der *Präzession des Frühlingspunktes* erfolgen heute die beiden Nachtgleichen *nicht mehr* im Zeichen der beiden genannten Sternbilder.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Kreise. – Darum kann nun Vitruvius nach dem vorigen Zitat anstatt von der «Kugelgestalt der Erde» von der *Krümmung des Himmelsgewölbes (declinatio caeli)* sprechen.

2. Es sei hier auch auf folgendes hingewiesen: Selbstverständlich unterscheidet sich die Länge des Mittagschattens von einem Gnomon – je nach dem, wie hoch oben im Norden oder wie tief unten im Süden gemessen wurde – nicht nur bei Tag- und Nachtgleiche, sondern *an jedem beliebigen Tag des Jahres.* Vitruvius hebt zwar bloß den Unterschied der *äquinoktialen Schattenlängen* in den verschiedenen Städten hervor, aber der Grund für diese Einseitigkeit seiner Bemerkung liegt einzig und allein darin, daß er seine Aufmerksamkeit auf die Schattenlänge der Tag- und Nachtgleiche konzentrieren mußte, da eben mit dieser Länge die Sonnenuhr konstruiert wird.

Der römische Architekt behauptet nun, daß es gar nicht möglich sei, eine Sonnenuhr zu konstruieren, *ohne* die vorangehende Kenntnis dessen, wie lang der Mittagschatten des Gnomons bei Tag- und Nachtgleiche an jenem Ort ist, wo die Sonnenuhr stehen soll. – Wichtig ist für uns diese Feststellung auch schon deswegen, weil man daraus sogleich ersieht, daß man selbstverständlich *nicht* erwarten kann, daß jene Schilderung des Vitruvius, aus der ich hier einiges zu besprechen gedenke, eine *unmittelbare* Antwort auf jene Frage geben könnte, die uns hier interessiert. Wir möchten nämlich herausfinden, auf welchem Wege wohl Anaximandros die Methode für das Messen der äquinoktialen Schattenlänge gefunden haben mag. Dies werden wir, nachdem wir die Schilderung des Vitruvius kennengelernt haben, höchstens selber frei rekonstruieren können.

Denn für den römischen Architekten ist das Messen der betreffenden Länge gar kein Problem mehr: Er weiß von vorneherein eben diese Länge für eine ganze Reihe von Städten. Ich habe eines seiner Beispiele vorhin schon zitiert: Wenn der Gnomon 9 Einheiten lang ist, so wird sein Mittagschatten bei Tag- und Nachtgleiche *in Rom* 8 Einheiten lang. Man könnte dies der Kürze halber etwa so formulieren: *für Rom ist die äquinoktiale Verhältniszahl des Gnomons 9:8.* – Daselbst notiert Vitruvius ähnliche Verhältniszahlen noch für vier weitere Städte[28] : Athen 4:3, Rhodos 7:5, Tarent 11:9 und Alexandria 5:3.

Der Text selber erteilt nun gar keine Auskunft darüber, wo Vitruvius diese Verhältniszahlen vorgefunden hat oder wie man ähnliche Zahlen

---

28. Es heißt in der Fortsetzung des vorigen Zitates (Vitruvius IX 7,1): «Itemque Athenis quae magnae sunt gnomonis partes *quattuor* umbrae sunt *tres*, ad *VII* Rhodo *V*, ad *XI* Tarentum *IX*, ad *quinque* Alexandriae *tres*, etc.».

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



finden könnte, wenn die Sonnenuhr an einer solchen Stelle konstruiert wird, für die unsere Quelle die Gnomon-Zahlen[28a] nicht angibt. Ja, nicht nur diese Fragen werden außer acht gelassen, sondern auch die Schilderung der Konstruktion selber ist ungenau und lückenhaft. Der Leser muß wesentliche Einzelheiten, die der Verfasser offenbar nur aus Oberflächlichkeit fortgelassen hat, aus eigenem Wissen ergänzen. Ich nenne hier im voraus von den fortgelassenen Einzelheiten nur zwei Beispiele :

a.) Es wurde auch oben schon – zumindest in einer Anmerkung – darauf hingewiesen, daß im Text eigentlich nirgends gesagt wird, daß jene *umbra aequinoctialis,* von der der Verfasser spricht, der M i t t a g s c h a t t e n am Tag des Äquinoktiums ist. Dies muß der Leser als etwas selbstverständliches von sich aus wissen.

b.) Ebenso vergißt VITRUVIUS auch jene grundlegende Tatsache hervorzuheben, daß jene *Linie in der horizontalen Ebene,* die bei ihm sehr ungenau nur als *linea in planitia* bezeichnet wird und auf der der Gnomon *senkrecht* steht – als ein Abschnitt des *irdischen Meridians* gerade die *Süd-Nord-Richtung* angeben soll. Und doch hat die ganze Konstruktion nur dann einen Sinn, wenn diese wichtige Vorbedingung peinlich genau beachtet wird. (Es ist umso auffallender, daß VITRUVIUS vergessen hat, dies hervorzuheben, als die andere wichtige Grundbedingung – daß nämlich der Gnomon *senkrecht* auf die horizontale Linie gestellt werden soll'– in demselben Satz zweimal, sowohl griechisch wie auch lateinisch, gesagt wird: πρὸς ὀρθὰς = *ad normam*).

Aber trotz aller Ungenauigkeiten – die bloß die Formulierung betreffen – ist die Schilderung selber, infolge der inneren Logik der Zusammenhänge, dennoch unmißverständlich und völlig klar. Im Folgenden gebe ich nun zunächst anstatt der Übersetzung eher eine genaue Paraphrase der Schilderung. Um die Kontrolle zu erleichtern, zitiere ich Satz für Satz nach der Paraphrase in Klammern auch den lateinischen Text. Nur der größeren Übersichtlichkeit zuliebe gliedere ich die Schilderung des VITRUVIUS in *zwei Abschnitte* und füge diesen beiden je eine Skizze (*Fig. 3* und *4*) bei.

Der *erste Abschnitt* jener Schilderung, in der VITRUVIUS beschreibt, wie eine Sonnenuhr in Rom gemacht wird, besteht aus den folgenden *sieben* Schritten (s. *Fig. 3)* :

---

28a. Man erlaube mir der Kürze halber diesen Ausdruck. Wir vergessen dabei nicht, daß in der *Arithmetik* «Gnomonzahl»*terminus technicus* für etwas völlig anderes ist. Eine «Gnomonzahl» ist nämlich jede ungerade Zahl, die eine Quadratzahl zur nächst größeren ergänzt: z.B. 11, weil $5^2 + 11 = 6^2$, oder auch 17, weil $8^2 + 17 = 9^2$.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



1. Zu allererst läßt er den *horizontalen Meridianabschnitt* als eine Linie ziehen *(describatur linea in planitia)*; und in einem Punkt dieser Strecke *(B)* – wie er sagt: *von der Mitte der Linie aus* – läßt er den senkrechten Gnomon errichten *(et e media pros orthas erigatur ut sit ad normam quae dicitur gnomon).*

2. Dann wird, ausgehend von jener Strecke, die die horizontale Ebene veranschaulicht, der senkrechte Gnomon mit dem Zirkel neungeteilt *(et a linea, quae erit planities, in linea gnomonis circino novem spatia dimetiantur).* Der Endpunkt des neunten Teils, mit dem Buchstaben *A* bezeichnet, wird ein Zentrum *(et quo loco nonae partis signum fuerit, centrum constituatur, ubi erit littera A).*

3. Mit dem Streckensegment *AB* und dem Mittelpunkt *A* wird der Kreis geschlagen; der Name des Kreises heißt *Meridian (et diducto circino ab eo centro* [scilicet: *A*] *ad lineam planitiae, ubi erit littera B, circinatio circuli describatur, quae dicitur m e r i d i a n a).* – Dies ist ein entscheidend wichtiger Punkt in der ganzen Schilderung, worauf wir später noch zurückkommen müssen.

4. Von den *neun* Einheiten des Gnomons werden *acht* auf dem horizontalen Meridianabschnitt abgetragen. So bekommt man den Punkt *C (Deinde ex novem partibus, quae sunt a planitia ad gnomonis centrum [BA], VIII sumantur et signentur in linea, quae est in planitia, ubi erit littera C). BC* ist der *äquinoktiale Mittagschatten* des Gnomons *(Haec autem est gnomonis aequinoctialis umbra).*

5. Der Punkt beim Buchstaben *C* wird mit dem Zentrum des Kreises bei der Gnomonspitze verbunden: so bekommt man den *äquinoktialen Sonnenstrahl (Ab eo signo et littera C per centrum, ubi est littera A, linea perducatur, ubi erit solis aequinoctialis radius).* – Wie man sieht, geht die beigefügte Skizze *(Fig. 3.)* über das von VITRUVIUS gesagte insofern hinaus, daß ich das Streckensegment *AC* über das Zentrum des Kreises *(A)* hinaus bis zur Peripherie des Kreises in Punkt *N* mit gestrichelter Linie verlängert habe. Doch zeigt der nächste Abschnitt der Paraphrase, daß auch VITRUVIUS den Punkt *N* in der Tat erwähnt; insofern ist also die gestrichelte Verlängerung des Segmentes *AC* in meiner Skizze nur eine Vorwegnahme dessen, was sowieso folgt.

6. Dann nehme man in Zirkel die Entfernung des Zentrums von der horizontalen Linie ab (d.h. man nehme in Zirkel eigentlich wieder den Radius des vorhin geschlagenen Kreises), und man bezeichne mit



ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



dieser Zirkel-Öffnung die beiden *gleichen Entfernungen*[29] – *nämlich von der horizontalen Ebene ab – wo die Buchstaben E links und I rechts an der Kreisperipherie sind. Und man ziehe das Segment EI durch das Zentrum, damit man zwei gleiche Halbkreise bekomme (Tunc a centro diducto circino ad lineam planitiae aequilatatio signetur, ubi erit littera E sinisteriore parte, et I dexteriore in extremis lineae circinationis, et per centrum perducenda (linea), ut aequa duo hemicyclia sint divisa).*

7. Die Mathematiker geben diesem Streckensegment *(EAI)* den Namen H o r i z o n t *(Haec autem linea dicitur a mathematicis h o r i z o n).*

Halten wir an dieser Stelle für eine kurze Zeit inne, um das bisher gesagte besser zu verstehen. Vor allem muß ich hier auf das letzte Wort des Zitates aufmerksam machen.

Unser Ausdruck griechischen Ursprungs «*Horizont*» heißt gewöhnlich «*Gesichtskreis*» bzw. «*jener Kreis, in dem das Himmelsgewölbe auf der Erde zu ruhen scheint*». Oder sucht man nach jenem genaueren Sinn, in dem dasselbe Wort in der Astronomie benutzt wird, so bekommt man eine Erklärung wie z.B.: «Der *Horizont* eines Ortes liegt *rechtwinklig* zum Lot. Mit einer Wasserwaage gewinnt man den *scheinbaren* Horizont, während die Ebene des *wahren* Horizontes durch den Mittelpunkt der Erde geht. Beide unterscheiden sich, auf den Himmel projiziert, nicht wesentlich voneinander».

Nun will ich diese Worterklärungen natürlich nicht beanstanden. Man kommt mit ihnen für den alltäglichen Gebrauch sehr gut aus. Aber sie genügen doch nicht, wenn man unsere VITRUVIUS-Stelle besser verstehen will. Dazu muß man auf die ursprüngliche griechische Wortbedeutung zurückgreifen.

῾Ορίζων κύκλος heißt in der griechischen Astronomie «der *trennende*, der *abgrenzende* Kreis». Nach dieser Denkweise bildet nämlich der *Gesichtskreis*, der *Horizont*, die G r e n z e zwischen den beiden Hälften der mächtigen Himmelskugel. *Über* dem Horizont ist die *sichtbare* Hälfte des Himmels als großes Gewölbe der einen Hemisphäre, und *unter* dem Horizont ist die andere, die *unsichtbare* Halbkugel des Himmels, die nach Ausmaß und Form der oberen Hälfte in allem entspricht. Darum besagt auch die vorige Worterklärung, daß «der wahre Horizont *durch den Mittelpunkt der Erde* geht». Wie man sieht,

---

29. *aequilatatio* = «gleichmäßige Entfernung zweier Parallellinien voneinander» (K.E. GEORGES, *Lateinisch-deutsches Handwörterbuch*, Leipzig, 1879 s.v.). – Mir scheint der Sinn auch des unmittelbar folgenden Zitates – trotz der etwas unbeholfenen Formulierung – völlig eindeutig zu sein.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



entspricht der Begriff *«Horizont»* auch heute noch dem alten, geozentrischen Weltbild, so als stünde die kugelförmige Erde im Mittelpunkt des ebenfalls kugelförmigen Weltalls und als ob jene mächtige Kreisplatte, die man in Gedanken waagerecht über den Mittelpunkt der Erde legt, nicht nur die Erde selbst, sondern auch das ganze Weltall in zwei große Halbkugeln teilen könnte.

Versteht man das Wort *«Horizont»* in diesem Sinne, so wird es einem sogleich klar, warum VITRUVIUS von «zwei gleichen Halbkreisen» redet. In der Tat halbiert das Streckensegment *EAI* – das von den Mathematikern als «Horizont» bezeichnet wird – auf *Fig. 3.* den *Meridiankreis,* der seinerseits ein skizzenhaftes Abbild für die Kugel des Weltalls ist. Die Konstruktion der Sonnenuhr ist nämlich gleichzeitig auch Konstruktion eines *Weltbildes.* Oberhalb des Streckensegmentes *AEI* ist die «sichtbare Hälfte» der Weltkugel und unterhalb desselben diejenige, die als «unsichtbar» gedacht wird. Doch ist die «unsichtbare Hälfte» auch Spiegelbild der oberen, sichtbaren, dabei jedoch für den Menschen unerreichbar hohen Himmelshalbkugel. Die Erde selber ist in diesem Weltbild die Spitze des Gnomons, die auch als Mittelpunkt des Weltalls gilt. In diesem Sinne spricht einmal auch PTOLEMAIOS von der Spitze des Gnomons[30].

Außerdem sind noch zwei Bemerkungen zum besseren Verständnis des bisher Gesagten nötig; die eine bezieht sich auf den «Horizont», die andere auf den «Meridian» :

Der «Horizont» ist – sowohl dem antiken als auch dem modernen Wortgebrauch nach – eigentlich ein K r e i s. Aber wieso kann in diesem Fall das gerade *Streckensegment EAI* den Namen des Horizont*kreises* bekommen? – Offenbar ist diese gerade Strecke der *Durchmesser* des Horizontkreises; nur soviel sieht man nämlich auf der vorliegenden Weltbild-Skizze vom gesamten Horizont. Auch im nächsten Abschnitt der Paraphrase werden wir zwei Kreisen begegnen, von denen die Skizze nur die Durchmesser zeigt. Ebenso sieht man übrigens auch von der Kugel des Weltalls auf der Skizze nur einen einzigen Kreis, den «Meridian»; eben diesen betrifft die andere Bemerkung.

Ich habe schon darauf hingewiesen, daß die Strecke *BC* der *Fig. 3,* die im Text selbst als *gnomonis aequinoctialis umbra,* genauer als *«Mittagschatten des Gnomons beim Äquinoktium»* bezeichnet wird, da sie die süd-nördliche Richtung zeigt, eigentlich ein Abschnitt des *irdischen Meridians* sein muß. VITRUVIUS bezeichnet jedoch nicht diese Strecke, sondern den vollen Kreis, dessen Radius der Gnomon ist, als *Meridian.* Wie

30. PTOLEMAIOS II 5 (MANITIUS 1912-13, I., S. 67).

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



vertragen sich nun diese beiden Beobachtungen miteinander?

Offenbar veranschaulicht der zur täglichen Bahn der Sonne transversale Kreis der vorliegenden Skizze den *himmlischen Meridian. «Mittag»* ist, wenn die Sonne jeden Tag irgendeinen Punkt dieses Kreises zu erreichen scheint. Eigentlich braucht man auf der nördlichen Hemisphäre der Erde von der Darstellung des Meridians unserer Figur nur einen *Viertelkreis,* d.h. nur die linksseitige Hälfte des oberen Halbkreises. Denn nur an irgendeinem Punkt dieses Viertelkreises scheint die Sonne zu jeder Mittagszeit zu stehen.

Es ist auch leicht einzusehen, daß von der unteren, als «unsichtbar» gedachten Kreishälfte der Bogen *IB* auf *Fig. 3.* eigentlich das Spiegelbild des himmlischen Meridianbogens ist. – Aber was ist in diesem Fall das Streckensegment *BC*? – Nichts anderes als die auf die waagerechte Ebene ausgestreckte Projektion des konkaven Spiegelbildes von einem Teil des himmlischen Meridianbogens *(ZN).* Der Mittagschatten des Gnomons veranschaulicht also täglich je ein Stück vom Spiegelbild des himmlischen Meridianbogens, als gerade Linie auf die waagerechte Ebene ausgestreckt.

*
* *

Nun können wir zum *zweiten Abschnitt* der Schilderung übergehen, in der VITRUVIUS die Konstruktion der Sonnenuhr beschreibt. Auch dieser Abschnitt ließe sich in *sieben* aufeinanderfolgende Schritte auflösen. Doch interessieren uns im vorliegenden Zusammenhang von allen diesen Schritten bloß die ersten *vier.*

1. Der bedeutendste erste Schritt im zweiten Teil der Schilderung besteht darin, daß der volle Meridiankreis *fünfzehngeteilt* wird *(Deinde circinationis totius sumenda pars XV...)* Diesen fünfzehnten Teil nimmt man in den Zirkel, und man trägt ihn vom Schnittpunkt *F* des Kreises und jener geraden Linie aus, die den Mittagstrahl des Äquinoktiums veranschaulicht (auf *Fig. 4.)*[31], rechts und links an der Kreisperipherie ab; so bekommt man die Punkte *G* und *H (et circini centrum conlocandum in linea circinationis quo loci secat eam lineam aequinoctialis radius, ubi erit littera F, et signandum dextra et sinistra, ubi sunt litterae G H).*

---

31. *Fig. 4.* ist natürlich dieselbe wie die vorangehende *Fig. 3.* Nur der größeren Übersichtlichkeit der aufeinanderfolgenden Schritte zuliebe habe ich jene *einzige* Skizze, an der VITRUVIUS seine Schilderung illustriert, in zwei Abbildungen aufgelöst. Natürlich gelten also auch für *Fig. 4.* einige hier fortgelassene Buchstaben der *Fig. 3.*

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Bevor wir nun weitergehen, muß ich schon an dieser Stelle kurz auf zwei wichtige Tatsachen hinweisen. Die eine ist, daß der älteste große Systematiker der griechischen Mathematik, Euklid, der etwa um 300 v.Chr. seine *Elemente* zusammengestellt hat, im IV. Buch davon (Satz *IV 16*) die Konstruktion behandelt, wie man in einen Kreis ein regelmäßiges *Fünfzehneck* einschreiben kann. Natürlich ist dieser Satz von Euklid die unerläßliche Vorbedingung zu jener Konstruktion der Sonnenuhr, die Vitruvius schildert. Ohne die Kenntnis des regelmäßigen Fünfzehnecks könnte man den fünfzehnten Teil des Meridiankreises – auf den Vitruvius nur kurz verweist – gar nicht in den Zirkel nehmen.

Aber es wäre dennoch verkehrt, deshalb zu vermuten, daß man v o r Euklid gar nicht eine solche Sonnenuhr hätte konstruieren können, wie sie bei Vitruvius geschildert wird, und daß Euklid gewissermaßen der *Terminus post quem* für die Sonnenuhren nach der Art des Vitruvius wäre, da erst aus Euklids Werk die Konstruktion des regelmäßigen *Fünfzehnecks* – die notwendige Vorbedingung der antiken Sonnenuhren – bekannt ist. Ganz im Gegenteil!

Die Kenntnis des *Fünfzehnecks im Kreis* scheint eine ältere Überlieferung der Astronomie zu sein. (Damit ist natürlich nichts über die *theoretische Begründung* der geometrischen Konstruktion selber gesagt. Wie man später sehen wird, hat die Astronomie wohl nur die Frage gestellt, wie man jene Größe messen könnte, die vermutlich erst später durch die Seite des regelmäßigen Fünfzehnecks angenähert wurde). – Es sieht so aus, als hätte Euklid den betreffenden Satz *(IV 16)* gewissermaßen aus Tradition in sein Werk aufgenommen. Dies geht aus einer interessanten Bemerkung des Euklid-Kommentators Proklos hervor.

Der Neuplatoniker Proklos (zwischen 410 und 485 n.Chr.) fragt nämlich einmal in seinem Werk[32]: Warum hat wohl Euklid jenen Satz behandelt, wie man die Seite eines regelmäßigen Fünfzehnecks in den Kreis einschreibt – ein Hinweis auf *Elem. IV 16 – wenn nicht wegen der Beziehung dieses Problems zur Astronomie*? – Obwohl dies *nicht* ausdrücklich gesagt wird, so legt doch die Art, wie Proklos seine Worte formuliert, den Verdacht nahe, daß es sich im Falle des Fünfzehnecks um einen *älteren* Satz handelt, den Euklid wohl mit Rücksicht auf seine einstige Wichtigkeit für die Astronomie in sein Werk aufgenommen hat.

Durch die Bemerkung des Proklos wird also sowohl das Problem des regelmäßigen Fünfzehnecks als dadurch auch die Konstruktion der Sonnenuhr (wie bei Vitruvius geschildert) in die voreuklidische Zeit

---

32. Proclus Diadochus, *In Euclidis Elementorum librum primum comm.*, ed. G. Friedlein, Lipsiae 1873, S. 269. (Schönberger, S. 353).

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



gerückt. Doch wollen wir von dieser Seite der historischen Zusammenhänge erst später etwas ausführlicher sprechen.

2. Die beiden Punkte *G* und *H*, die man mit der Seite des regelmäßigen Fünfzehnecks vom Punkt *F* aus an der Kreisperipherie gewonnen hat, sind deswegen wichtig, weil man mit ihrer Hilfe die beiden anderen Punkte, *T* und *R*, auf dem horizontalen Meridianabschnitt bekommt. – Doch ist der Text des VITRUVIUS hier zunächst etwas unklar; er besagt nämlich nur soviel : *Deinde ab his* – nämlich von den Punkten *G* und *H* aus – *lineae usque ad lineam planitiae perducendae sunt, ubi erunt T R.* – Aber woher weiß man eigentlich, wo die Punkte *T* und *R* sind, fragt man sich zunächst befremdet bei einer so oberflächlichen Formulierung. Die Segmente *GT* und *HR* sind nämlich durch je einen einzigen Punkt (*G* bzw. *H*) keineswegs bestimmt. – Aber verständlicher wird die nachlässige Ausdrucksweise des Verfassers, wenn man etwas weiter liest: *ita erit solis radius, unus hibernus (AT), alter aestivus (AR).* Die Punkte *T* und *R* bezeichnen also auf dem horizontalen Meridianabschnitt die Längen des Mittagschattens bei Winterwende *(T)* und bei Sommerwende *(R)*. Nun versteht man sogleich auch, wie VITRUVIUS seine Worte richtig hätte formulieren sollen. Er hätte nämlich, nachdem die Punkte *G* und *H* mit der Seite des regulären Fünfzehnecks gewonnen wurden, diese vor allem mit dem Zentrum des Kreises, der Gnomonspitze *A* verbinden sollen. Das Segment *GT* ist ja bloß die Fortsetzung des Segmentes *AG*, ebenso wie auch *HR* die Fortsetzung von *AH* ist.

Ja, ich gehe auch in diesem Fall noch einen Schritt über den Wortlaut des VITRUVIUS hinaus. Ich verlängere nämlich (auf *Fig.4.*) das Segment *GA* (gestrichelt) über das Zentrum des Kreises *A* hinaus bis zur Peripherie in Punkt *K*; und ebenso verlängere ich das Segment *HA* (gestrichelt) bis zum Punkt *L*. Erst so werden diese Linien, wie sich VITRUVIUS ausdrückt, wirklich: *solis radius - unus hibernus (KAGT), alter aestivus (LAHR).* Die Sonne steht nämlich – nach dieser schematischen Darstellung – zur Mittagszeit bei Wintersonnenwende in Punkt *K* und zur Mittagszeit bei Sommersonnenwende in Punkt *L*.

3. Die Punkte *K* und *L*, die ich in der Paraphrase durch die Verlängerung des Mittagstrahls der Sonne bei Winter- *(AGT)* bzw. bei Sommerwende *(AHR)* gewinnen ließ, spielen natürlich auch im Original-Text des VITRUVIUS eine wichtige Rolle. Doch es scheint zunächst, als bestünde ein gar nicht unwesentlicher *Widerspruch* zwischen meiner eben erwähnten Paraphrase und dem authentischen Text des antiken Verfassers selbst. Denn ich ließ z.B. den Punkt *K* durch die Verlängerung des Sonnenstrahls bei Wintersonnenwende

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



durch die Punkte *G* und *A* gewinnen. VITRUVIUS sagt dagegen, daß der Punkt *K* nicht demjenigen bei *G*, sondern dem anderen bei *H* g e g e n ü b e r l i e g t, wo der letztere doch ein Schnittpunkt des Strahls der Sommerwende ist. – Ebenso läßt er auf der anderen Seite den Punkt *L* nicht demjenigen bei *H*, sondern völlig eindeutig dem Punkt *G* g e g e n ü b e r l i e g e n. Ja, er scheint ausdrücklich betonen zu wollen, daß gar keine Verwechslung seinerseits vorliegt. Darum zählt er so sorgfältig alle jene Punkte der Kreisperipherie auf, die einander g e g e n ü b e r l i e g e n. Der vollständige Text heißt nämlich :

*Contra autem E littera I erit, quo secat circinationem linea, quae est traiecta per centrum, ubi est littera A; et contra G et H litterae erunt L et K; et contra C et F et A erit littera N.*

Was mag nun der Sinn dieses «*Gegenüberliegens der Punkte*» sein? – Leichter wird die Antwort auf diese Frage, wenn man den Text etwas weiterliest.

VITRUVIUS verbindet nämlich die Punkte *G* und *L* bzw. *H* und *K* miteinander und bezeichnet die Segmente *GL* und *HK* als D u r c h m e s s e r; ja, er deutet auch die Namen jener *Kreise* an, deren Durchmesser diese Streckensegmente sind. Denn er schreibt :

«*Tunc perducendae sunt d i a m e t r o e ab G ad L, et ab H ad K. Quae erit superior (GL), partis erit aestivae, inferior (HK) hibernae.*»

Ohne Zweifel steht die Bezeichnung *pars superior* hier für jenen Kreis, dessen Durchmesser *LG* ist; dies ist der Kreis der Sonnenlaufbahn am Tag der Sommerwende. Und *pars inferior* heißt jener andere Kreis, dessen Durchmesser *HK* ist; dieser letztere – von dem man ebenfalls nur den Durchmesser sieht – veranschaulicht die Sonnenlaufbahn am Tag der Winterwende.

Ja, die Skizze des VITRUVIUS illustriert daneben auch noch die Tatsache, daß die Zeitdauer des Tages der Sommerwende *länger* ist als diejenige der Winterwende. Man sieht nämlich vom Streckensegment *LG*, dem Durchmesser der Sonnenlaufbahn am Tag der Sommerwende, ein längeres Stück *über* dem Horizont – über der Linie *EAI* – als vom Streckensegment *HK*, dem Durchmesser der Sonnenbahn der Winterwende. (Dicker ausgezogen auf *Fig. 4.*).

Die Tatsache, daß VITRUVIUS die Segmente *GL* und *HK* als *diametroe* bezeichnet – d.h. also als «Durchmesser der beiden Sonnwendkreise» – erhärtet natürlich auch jene vorhin schon aufgestellte Behauptung, daß diese Sonnenuhr gleichzeitig auch eine astronomische *Weltbild-Darstellung* ist. Bisher sind die folgenden *fünf* Bestandteile des Weltbildes genannt worden: (1) der volle Kreis ist der *Weltmeridian;* (2) die Spitze

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



des Gnomons ist die *«Erde»;* (3) das Streckensegment *EAI* ist der *«Horizont»* bzw. der Durchmesser des Horizontkreises; (4) die beiden Segmente *GL* und *HK* sind *«Durchmesser der Sonnwendkreise»*. – Und noch einen *fünften* wichtigen Bestandteil dieses Weltbildes können wir von der Skizze des VITRUVIUS ohne weiteres ablesen (siehe die beiden *Figuren 3. und 4.*), auch wenn sein Name im Text selbst nicht genannt wird. Das ist nämlich das Streckensegment *NAF.* Es wurde ja schon gesagt (siehe oben den 5. Schritt im ersten Abschnitt der Schilderung), daß VITRUVIUS selber das Segment *AC* als *«Mittagstrahl der Sonne an der Tag- und Nachtgleiche» (solis aequinoctialis radius)* bezeichnet. Das Segment *NAF* ist also in diesem Weltbild der *«Durchmesser des Äquators»*. Man vergesse nicht, daß der *«Äquator»* griechisch ἰσημερινὸς κύκλος (taggleicher Kreis) heißt. An diesem Kreis bewegt sich die Sonne – von *jedem* Punkt der Erde aus gesehen – am Tag der Nachtgleiche.

4. Ergänzt wird das astronomische Weltbild des VITRUVIUS durch jenen nächsten Schritt, den ich hier zum Schluß noch erwähne. Es wird nämlich durch die Halbierungspunkte der beiden Durchmesser der Sonnwendkreise sowie durch den Punkt *A* die auf allen drei Durchmessern senkrecht stehende *Achse* der Welt *(PQ)* errichtet. *(«Eaeque diametroe sunt aeque mediae dividendae..., ibique centra signanda, et per ea signa et per centrum A linea ad extrema lineae circinationis est perducenda, ubi erunt litterae P Q. Haec erit linea mathematicis rationibus a x o n»)* Wie die horizontale Linie *(BRT)* mit dem Mittagschatten des Gnomons die Süd-Nord Richtung zeigt, so bezeichnen die beiden Schnittpunkte der «Achse» mit der Kreisperipherie (*P* und *Q*) den Nord- und Südpol der Welt.

Es ist nicht nötig, hier auch noch die letzten Schritte der Schilderung des VITRUVIUS ausführlich zu besprechen. Diese sind nämlich in der Tat nur noch vom Gesichtspunkt der Sonnenuhr-Konstruktion aus interessant. Für unsere Zwecke genügt dagegen schon das bisher Gesagte.

### *5. Die Rekonstruktion nach VITRUVIUS*

Das vorangehende Kapitel über VITRUVIUS wurde hier in der Erwartung eingefügt, daß es uns auf die Spur bringen könnte, warum ANAXIMANDROS eine zu seiner Zeit *neue* Methode für das Messen des äquinoktialen Mittagschattens mit dem Gnomon gefunden haben kann. In der Tat scheint mir die eben behandelte Schilderung gerade von diesem Gesichtspunkt aus sehr aufschlußreich zu sein. Man überlege sich nämlich noch einmal folgendes :

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Die Konstruktion des römischen Architekten ging von der Tatsache aus, daß die Länge des äquinoktialen Mittagschattens an jenem Ort, wo die Sonnenuhr konstruiert werden sollte, *bekannt* war. Der Gnomon wurde senkrecht auf die horizontale Meridian-Linie des Ortes aufgestellt. Dann trug man die bekannte Länge des äquinoktialen Mittagschattens auf der Meridianstrecke ein und verband den so gewonnenen Punkt mit der Gnomonspitze; so erhielt man den äquinoktialen *Mittagstrahl* der Sonne. Danach schlug man mit dem Gnomon als Radius und mit der Gnomonspitze als Zentrum den *Meridiankreis.* So bekam man den wichtigen *Schnittpunkt* des Meridiankreises und des äquinoktialen Sonnenstrahls, d.h. den Punkt *F* auf *Figur 4.* Von diesem Punkt *F* aus hat man die Seite des regelmäßigen *Fünfzehnecks an der Kreisperipherie rechts und links abgetragen, um mit Hilfe der Punkte G* und *H* auch die Längen des Mittagschattens der Winter- und Sommerwende zu bekommen *(Figur 4.).*

Ist also die Länge des äquinoktialen Mittagschattens von einem Gnomon an einem bestimmten Ort (z.B. in Rom) bekannt, so kann man – wie die beiden Skizzen *(Fig. 3.* und *4.)* zeigen – leicht zuerst den *Schnittpunkt* des Meridiankreises mit dem äquinoktialen Mittagstrahl, den Punkt *F,* bekommen. Und dieser Punkt ergibt sogleich auch die Längen der Mittagschatten bei Sommer- und Winterwende, indem man die Schnittpunkte *H* und *G* – die diese Längen (zusammen mit der Gnomonspitze) bestimmen – auf dem Wege gewinnt, daß die Seite des regelmäßigen Fünfzehnecks rechts und links an der Kreisperipherie von dem Punkt *F* aus abgetragen wird. Der Punkt *F* liegt an der Kreisperipherie *gerade in der Mitte zwischen den Punkten G und H.*

Eben darum kann man die Konstruktion des VITRUVIUS leicht auch umkehren. Ist nämlich *nicht* der äquinoktiale Mittagschatten des Gnomons gegeben, sondern sind umgekehrt seine Schattenlängen bei Sommer- und Wintersolstitium bekannt – wie an der *Figur 5. BR* und *BT* – so kann man auf Grund dieser den äquinoktialen Schatten bestimmen. Man muß nämlich zunächst die Endpunkte der beiden Schatten mit der Gnomonspitze verbinden und dann mit dem Gnomon als Radius von der Gnomonspitze aus den Meridiankreis schlagen. So bekommt man die wichtigen Schnittpunkte an der Kreisperipherie *H* und *G;* und der *Halbierungspunkt* des Kreisbogens $\overset{\frown}{HG}$ in *F* wird – wenn man ihn zunächst mit der Gnomonspitze verbindet – auf der anderen Seite, nämlich auf dem horizontalen Meridianabschnitt, auch den Punkt *C* und damit die Länge des äquinoktialen Mittagschattens ergeben.

Darum vermute ich nun die folgenden drei Dinge :

1. Es muß offenbar eine der frühesten Errungenschaften der griechi-

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



schen Wissenschaft auf dem Wege der Gnomon-Messungen gewesen sein, daß man folgendes erkannte: Dadurch, daß mit dem Gnomon als Radius und mit der Gnomonspitze als Zentrum der Kreis geschlagen wird, bestimmt man – einerseits mit Hilfe dieses Kreises und andererseits mit Hilfe der Mittagstrahlen der beiden Solstitien – eigentlich den *«zwischen den Wendepunkten liegenden Bogen»*. Denn der Bogen zwischen den Punkten *H* und *G (Fig. 5.)* ist gar nichts anderes als des Spiegelbild des himmlischen Bogens zwischen *L* und *K*, und diese letzteren sind eben die *Wendepunkte der Sonne.*

2. Mit dem Halbieren des Bogens zwischen den Wendepunkten hat man nicht nur den *Mittagstrahl des Äquinoktiums*, die *Schattenlänge* des Gnomons zu diesem Zeitpunkt, sowie die *Ebene des Äquators* – bzw. auf dem astronomischen Weltbild unserer *Figur 4.* den *Äquator* selbst *(NAF)* – bekommen, sondern man hat dabei auch ein wichtiges, damals *neues* Maß der Astronomie erhalten. Die Hälfte des Bogens zwischen den Wendepunkten, die Seite des regelmäßigen Fünfzehnecks (also ein $24^0$ großer Zentriwinkel im Kreis) ist ja das älteste approximative Maß für die *Schiefe der Ekliptik*[32a]. (So heißt der Winkel der beiden Pole, desjenigen des Weltalls und des Zodiakus; das ist die bekannte λόξωσις der griechischen Himmelskunde).

3. Und schließlich geht meine dritte Vermutung dahin, daß wir im Sinne der Überlieferung diese grundlegenden Erkenntnisse mit Recht dem Milesier ANAXIMANDROS zuschreiben dürfen.

Und nun wollen wir sehen, mit welchen Argumenten sich diese drei Vermutungen erhärten lassen :

Auch ein Blick auf das Werk des KLAUDIOS PTOLEMAIOS (2. Jahrhunter n.Chr.) überzeugt davon, daß mindestens die beiden ersten der vorhergehenden drei Vermutungen sehr naheliegend sind. Auch PTOLEMAIOS beginnt ja das 12. Kapitel seines I. Buches – unmittelbar nachdem er im 10. Kapitel das «Größenverhältnis zwischen Sehnen und Kreisbogen» besprochen und dann im Kapitel 11. die «Sehnentafeln» zusammengestellt hat – etwa mit den folgenden Worten[33] :

«Nachdem der Größenbetrag der Sehnen festgestellt ist, dürfte... die erste Aufgabe sein, nachzuweisen, *wie groß die Neigung des schiefen Kreises der Ekliptik gegen den Äquator ist,* d.h. das Verhältnis zu bestimmen, in welchem der durch die beiden betreffenden Pole gehende größte (Kolur-) Kreis zu dem zwischen diesen Polen liegenden Bogen eben dieses Kreises steht.»

---

32a. Nach heutiger Messung etwa $23^0 27'$.

33. Übersetzung nach MANITIUS 1912-13, I. S. 41.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Es ist dabei keineswegs nebensächlich, daß der Titel dieses 12. Kapitels *«Der zwischen den Wendepunkten liegende Bogen»* heißt. Auch PTOLEMAIOS gewinnt also die *«Schiefe der Ekliptik»* auf dem Wege, daß er zunächst den Bogen zwischen den Wendepunkten mißt und dann diese Größe halbiert. Die Methode ist dieselbe, die ich – auf dem Wege des bei VITRUVIUS geschilderten Prozesses – für die ältere Zeit rekonstruiert habe. Es macht dabei wenig aus, daß PTOLEMAIOS für das Messen des Bogens zwischen den Wendekreisen nicht mehr den einfachen Gnomon, sondern ein entwickelteres, präziseres Instrument gebraucht. – Doch es lohnt sich, das von ihm erhaltene Ergebnis mit dem älteren Resultat zu vergleichen. PTOLEMAIOS schreibt nämlich[34] :

«Aus Beobachtungen... namentlich aus denjenigen, die gerade um die Zeit der Wenden bei einer Mehrzahl von Umläufen von uns mit aller Schärfe angestellt wurden, haben wir... das Ergebnis gewonnen, daß der vom nördlichsten bis zum südlichsten Grenzpunkt sich erstreckende Bogen, was *der zwischen den Graden der Wenden liegende Bogen ist,* allemal zwischen die Grenzen $47^0\ 40'$ und $47^0\ 45'$ fällt.»

Er bezeichnet also zwei Extremwerte, woraus sich – für den *heutigen Leser* – der *Mittelwert* $47^0\ 42'\ 30''$ ergibt. Soviel soll nach PTOLEMAIOS der «zwischen den Wendepunkten liegende Bogen» betragen. Halbiert man dieses Maß[35], so bekommt man für die *«Schiefe der Ekliptik»* : $23^0\ 51'\ 15''$ – anstatt der früher gemessenen «Seite des regelmäßigen Fünfzehnecks» = $24^0$ (Zentriwinkel).

Interessant ist auch die Bemerkung, mit der PTOLEMAIOS sein Messungsergebnis ergänzt :

«Hieraus ergibt sich ungefähr dasselbe Verhältnis, welches ERATOSTHENES gefunden und auch HIPPARCHOS zur Anwendung gebracht hat : Der Bogen zwischen den Wendepunkten beträgt nämlich ohne wesentlichen Fehler 11 solche Teile, wie der Meridian 83 enthält.»

ERATOSTHENES hat also die Größe des Bogens zwischen den Wendepunkten als $\frac{11}{83}$ des Kreisumfangs bestimmt, d.h. in Grade umgerechnet: $47^0\ 42'\ 39''$. Die Hälfte von diesem Maß – die «Schiefe der Ekliptik» – wäre also nach ihm: $23^0\ 51'\ 19''$ – etwa bloß um 4 Sekunden mehr als nach der anderen bei PTOLEMAIOS vorliegenden Berechnung.

Man versteht die Bedeutung der zuletzt angeführten Bemerkung des PTOLEMAIOS erst dann, wenn man zum Vergleich die folgenden Tatsachen heranzieht :

---

34. MANITIUS 1912-13, I. S. 44.
35. Vgl. dazu die Bemerkung des Übersetzers, MANITIUS 1912-13 I. S. 44 b.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



EUKLID, der etwa um 300 v.Chr. die *Elemente* zusammengestellt hat, hat die Konstruktion des regelmäßigen Fünfzehnecks in sein Werk deswegen aufgenommen, weil man vor ihm – und vielleicht auch zu seiner Zeit noch – mit der Seite dieses Polygons, die die zu einem Zentriwinkel von $24^0$ gehörige Sehne ist – die «Schiefe der Ekliptik» gemessen hat. Vermutlich war das ursprüngliche Instrument für diese Messung der Gnomon und sein Meridiankreis. – Es ist zwar nicht bekannt, mit welcher Methode ERATOSTHENES denselben Bogen gemessen haben mag, aber er, der nur wenige Jahrzehnte *nach EUKLID* tätig war (ERATOSTHENES lebte von 276-195), hat für die Schiefe der Ekliptik schon ein genaueres Ergebnis erzielt ($23^0\,51'\,10''$). Dasselbe Maß hat später auch HIPPARCHOS von ERATOSTHENES übernommen. Nur unwesentlich weiter vervollkommnet wurde dieselbe Messung dann noch später durch PTOLEMAIOS. – Es darf zum Vergleich noch erwähnt werden, daß heutzutage – zumindest in den populärwissenschaftlichen Werken – als Maß für die «Schiefe der Ekliptik» fast unverändert der Winkel von $23^0\,27'$ gilt.

Aber wie das Beispiel des VITRUVIUS zeigt, hat man in der Antike, bei der Anfertigung von Sonnenuhren, ungeachtet der Vervollkommnungen durch ERATOSTHENES and HIPPARCHOS, auch später noch an dem traditionellen Wert für die «Schiefe der Ekliptik» – eine Seite des regelmäßigen Fünfzehnecks = $24^0$ – festgehalten[36].

*

* *

Und nun wollen wir noch jene Argumente ins Auge fassen, mit denen sich die Vermutung erhärten läßt, daß eventuell tatsächlich ANAXIMANDROS derjenige war, der darauf kam, daß man – um den äquinoktialen Mittagschatten zu bekommen – den *Kreisbogen* zwischen den Sonnenstrahlen der beiden Wenden halbieren muß. – Überlegen wir uns vor allem, welche Gedanken ihn wohl zu dieser Entdeckung geführt haben mögen.

Er muß vor allem erkannt haben, daß der *kürzeste* Mittagschatten des Gnomons an einem bestimmten Ort (siehe dazu z.B. *BR* auf *Fig.5)* nicht nur dem längsten Tag des Jahres (und dabei der kürzesten Nacht)

---

36. Man vgl. dazu das folgende bei J. SOUBIRAN: *Vitruve, De l'architecture,* Paris 1969 (G. BUDE), S. 223: «Quoique les Anciens n'aient pas soupçonné la lente variation (0,476'' par an, soit $1^0$ tous les 7200 ans environ) de cette obliquité, qui est aujourd'hui ($1^{er}$ janvier 1951) de $23^0\,26'\,44''$ et qui oscille entre $21^0\,59'$ et $24^0\,36'$, ils ont adopté une valeur de $24^0$ qui était fort proche de la vérité.»

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



entspricht, sondern auch dem scheinbar *höchsten Kulminationspunkt* der Sonne an demselben Ort (also dem Punkt *L* auf *Fig. 5).* Ebenso entspricht auf der anderen Seite der kürzeste Tag (mit der längsten Nacht) und der *niedrigste Kulminationspunkt der Sonne* im Jahr *(K)* dem längsten Mittagschatten *(BT).*

Den Extremwerten in der Zeitdauer entsprechen also Extremwerte der Schattenlängen und der Kulminationen. Sucht man nun die Schattenlänge, die dem mittleren Wert der Zeitdauer (der Tag- und Nachtgleiche) entspricht, so soll man wohl den Unterschied der beiden Kulminationen, *den Bogen KL am Himmel* halbieren. Doch ist dieser Bogen zunächst unzugänglich und schwer fixierbar. Darum nimmt man statt dessen sein *Spiegelbild.* – Übrigens sind auch die horizontalen Schattenlängen des Gnomons – *BT* und *BR* – in gewissem Sinne «Spiegelbilder» von je einem Stück des himmlischen Meridianbogens; nur sind diese auf der waagerechten Fläche *verzerrt.* Der Kreisbogen, den man mit dem Gnomon als Radius schlägt, ist eigentlich nichts anderes als die Korrektur der Spiegelbild-Verzerrung.

Natürlich mußte ANAXIMANDROS auch wissen – bevor er den Bogen zwischen den Wendepunkten halbierte – daß die beiden Winkel *KAL* und *HAG (Fig. 5)* als Scheitelwinkel untereinander gleich sind. Und ob man ein solches Wissen dem ANAXIMANDROS zutrauen darf? – Es ist ein sehr einfacher Satz bei EUKLID : *Elem.* I, 15, der die Gleichheit der Scheitelwinkel aussagt, und eben über diesen berichtet der Kommentator PPROKLOS[37], daß er zuerst von jenem THALES erkannt wurde, der sonst in der Überlieferung als Vorgänger und «Lehrer» des ANAXIMANDROS gilt. – Unsere Vermutung über ANAXIMANDROS – daß er erkannt habe, daß man das Gnomon-Spiegelbild des himmlischen Bogens zwischen den Wenden halbieren muß – ist also auch von dieser Seite her betrachtet nicht unwahrscheinlich[38]. ANAXIMANDROS konnte in der Tat jene grundlegende geometrische Kenntnis besitzen, die ihm die Entdeckung mit dem Gnomon ermöglichte. – Aber wir können auch noch darüber hinausgehen.

Ich habe schon hervorgehoben, daß die Erkenntnis, wie man den Mittagschatten des Äquinoktiums bekommt – durch das Halbieren des

---

37. PROCLUS, *In Eucl. I.* (F) 229, S. 1-5. (SCHÖNBERGER, S. 374).

38. Man kann in diesem Zusammenhang erwähnen, daß die Überlieferung auch davon zu wissen scheint, daß dasselbe Problem, das ANAXIMANDROS mit dem Gnomon zu lösen vermochte, auch schon seinen Lehrer THALES beschäftigt hatte. Als einen Hinweis darauf verstehe ich den Satz bei DIOGENES LAERTIOS (I, S. 23): «Einige sagen, daß er (THALES) nur zwei Bücher *über die Sonnenwende und über die Tag- und Nachtgleiche* (περὶ τροπῆς καὶ ἰσημερίας) *geschrieben habe.*»

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Bogens zwischen den Wendepunkten –, gleichzeitig auch das Maß für die Schiefe der Ekliptik ergab. War nicht auch dies – die *Schiefe der Ekliptik* – eine Erkenntnis des ANAXIMANDROS? – Man muß zugeben, daß die Überlieferung in diesem Punkt *nicht einheitlich* ist. Es gibt antike Berichte, die diese Erkenntnis *nicht* dem ANAXIMANDROS zuschreiben. Aber es bleibe hier der Bericht des PLINIUS doch nicht unerwähnt[39] :

> *obliquitatem eius* [sc. zodiaci] *intellexisse, hoc est rerum foris aperuisse, Anaximander Milesius traditur primus olympiade quinquagesima octava* (548-545).

Diese Worte stehen in bestem Einklang mit jenem anderen Bericht im *Suda*-Lexikon, wonach ANAXIMANDROS als «erster die Tag- und Nachtgleiche gefunden hat». (Damit ist allerdings nicht gesagt, daß ANAXIMANDROS – der auf diese Weise die «Schiefe der Ekliptik» sozusagen konkret zeigen konnte – auch gewußt habe, daß das approximative Maß für diese die Seite des regelmäßigen Fünfzehnecks sei. Denn man kann ja den «Bogen zwischen den Wendepunkten» auch dann halbieren, wenn man nicht weiß, wie groß seine Hälfte im Verhältnis zum ganzen Kreis ist.)

Man vergesse außerdem auch nicht, daß alle astronomischen Messungen mit dem Gnomon in der griechischen Wissenschaft nur dann sinnvoll sind, wenn man dabei vom *geozentrischen Weltbild* ausgeht. Wie oben schon mehrmals erwähnt, so galt die Gnomonspitze in der antiken Konstruktion der Sonnenuhr als ein symbolisches Abbild der Erde, welche frei im Mittelpunkt des Weltalls schwebt, – Und war unseres Wissens nicht eben ANAXIMANDROS der erste, der gelehrt hatte, daß die Erde «als Zentrum gelte»[40] und in der Mitte des Weltalls «liege»?[41] – War nicht gerade er der älteste bekannte Vertreter des später «ptolemäisch» genannten Weltbildes? Und war das von mir vermutete «Messen des ANAXIMANDROS mit dem Gnomon» nicht gerade die erste, wirklich wissenschaftliche Tat der neuen griechischen Astronomie?

Allerdings muß dabei die Frage offen bleiben, ob ANAXIMANDROS sich die Erde «zylinderförmig» gedacht hat – wie es in jener doxographischen Überlieferung heißt, die letzten Endes auf THEOPHRASTOS zurückzugehen scheint[42] – oder ob er doch nicht – etwa in einer späteren

---

39. *Nat. Hist.* II, S. 31.

40. DIOG. LAERT. II, S. 1-2: «μέσην τε κεῖσθαι, κέντρου τάξιν ἐπέχουσαν».

41. Ich vermute, daß DIOGENES LAERTIOS in diesem Zusammenhang nur deswegen das Wort gebraucht, um auch damit die *Unbeweglichkeit* der Erde hervorzuheben.

42. [PLUT.] *Strom.* 2 *(D.* 579; *aus* THEOPHRAST); *Hippol.* Ref. I 6, S. 1-17. (Beide Quellen nach H. DIELS - W. KRANZ, *Die Fragmente der Vorsokratiker,* 8. Auflage 1956, S. 12); ANAXIMANDROS A 10 und 11.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Phase seines Lebens – von einer *«kugelförmigen Erde»* geredet hat, wie man dies über ihn bei DIOGENES LAERTIOS liest. Konsequenter und logischer wäre allerdings die letztere Variante, die in der modernen Forschung als «weniger glaubhaft» gilt.

Und zum Schluß möchte ich hier als letztes Argument für die Entdeckung des ANAXIMANDROS mit dem Gnomon noch die folgende Überlegung geltend machen. – Es ist ein Gemeinplatz der Wissenschaftsgeschichte, daß es im Altertum *zwei Arten* von wissenschaftlicher Astronomie gab[43]. Die eine war die sog. arithmetische Astronomie in Babylon und die andere die *vorwiegend geometrische Himmelskunde der Griechen.* – Diese Unterscheidung ist keineswegs bloß die Entdeckung der modernen Forscher. Im Gegenteil, auch die Griechen selbst im Altertum waren sich dieses unterscheidenden Merkmals der beiden Wissenschaften voll bewußt. – Aber bei wem und wann begann doch die echt griechische, geometrische Astronomie? – Nun, ich übersetze den folgenden Satz über ANAXIMANDROS wortgetreu aus dem Text des *Suda*-Lexikons :

«Er hat den Gnomon eingeführt und überhaupt *das geometrische Abbild* (γεωμετρίας ὑποτύπωσιν) aufgezeigt.»

Ich weiß in der Tat nicht,was denn sonst die γεωμετρίας ὑποτύπωσις heißen könnte – was ANAXIMANDROS, und eben im Zusammenhang mit dem Gnomon «aufgezeigt» oder besser gesagt : angeregt hatte – wenn nicht gerade jenes *geometrische Abbild des Weltalls* (d.h. die «Sonnenuhr»), das voll entwickelt später unter anderem auch in der vorhin behandelten Schilderung bei VITRUVIUS vorliegt.

*

* *

Ich bin mir natürlich bewußt, daß meine Rekonstruktion – die zu ihrer Zeit *neue* Errungenschaft des ANAXIMANDROS mit dem Gnomon : das Halbieren des Bogens zwischen den Wendepunkten, und auf diese Weise das sozusagen «exakte» Messen des äquinoktialen Mittagschattens – bloß eine historische Vermutung, und keine erwiesene Tatsache ist. Aber mir scheint, daß alles, was man im folgenden über die Geschichte des Gnomons in der griechischen Wissenschaft noch zusammenstellen kann, für dieselbe Vermutung sprechen wird. Doch zunächst wollen wir noch die sonstigen Anwendungen desselben Instrumentes in der griechischen Astronomie ins Auge fassen.

---

43. Vgl. z.B. das Vorwort in B.L.v.d.WAERDENS Buch: *Die Anfänge der Astronomie,* P. Noordhoff Ltd.-Groningen (o.J.).

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



## 6. *Eratosthenes*

Ich habe schon betont, daß der Gnomon, der senkrecht aufgestellte Stab, eigentlich erst dadurch zu einem wirklich wissenschaftlichen Instrument der griechischen Astronomie wurde, daß man die Methode herausbekam, wie mit ihm der Mittagschatten der Tag- und Nachtgleiche zu messen ist. In der Tat hat das *Halbieren des Bogens zwischen den Wendepunkten* nicht nur die Länge des äquinoktialen Mittagschattens, sondern auch das wichtige astronomische Maß, die *«Schiefe der Ekliptik»* ergeben. Außerdem wurde die quasiexakt gemessene Länge des äquinoktialen Mittagschattens auch eine wichtige Angabe für die mathematische *Geographie.* (Auch diese Tatsache wurde vorhin schon, bezüglich des Vitruvius-Textes, angedeutet; siehe oben, S. 47, die sog. Gnomon-Zahlen für Rom, Athen, Rhodos, Tarent und Alexandria.)

Es ist mir aus der antiken Literatur eigentlich nur ein einziger Fall der wissenschaftlichen Anwendung des Gnomons bekannt, der nicht mehr sozusagen in die «Vorgeschichte dieses Instrumentes» gehört und zu dem die Kenntnis des äquinoktialen Mittagschattens dennoch *nicht nötig ist.* Dieser Ausnahmefall ist der des Eratosthenes. Dieser Mathematiker des 3. Jahrhunderts v.Chr. versuchte nämlich, die Länge eines Meridiankreises der Erde mit dem Gnomon zu messen. Eben diesen Fall wollen wir im vorliegenden Kapitel näher ins Auge fassen.

*

* *

Es war naheliegend – nachdem die Kugelgestalt der Erde erkannt worden war – sich auch zu fragen, wie groß wohl überhaupt die «σφαῖρα» der Erde sein mag? – Lehrreich ist in dieser Hinsicht der bekannte Gedankengang des Aristoteles[44].

Der Stagirit war nämlich der Ansicht, daß die Erde nicht bloß kugelförmig ist, sondern daß sie – zumindest im Vergleich zur Entfernung der Sterne – *auch gar nicht so besonders groß sein kann.* Er begründete diese Meinung mit der folgenden Beobachtung :

Man braucht in südlicher oder in nördlicher Richtung gar nicht weit zu gehen, und schon sieht man den Horizont, jenen Kreis sich verändern, der die sichtbare und die unsichtbare Hälfte des Himmelsgewölbes voneinander trennt. Das heißt, man sieht nach einer solchen verhältnismäßig kleinen Ortsveränderung andere Fixsterne über

44. Aristoteles, *De caelo* II, S. 14 (297b - 298a).

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



dem Kopf, am Zenit, als früher. Ja, in Zypern oder in Ägypten sieht man auch solche Sterne sich über den Horizont erheben und dann wieder untergehen, die für die Menschen mehr nach Norden zu *immer sichtbar sind,* d.h. solche Sterne, die sonst für die nördlicheren Betrachter ihre ganze Kreislaufbahn über dem Horizont vollenden. Diese sichtbare Veränderung des Himmelsgewölbes wäre gar nicht möglich, wenn die Erdkugel wirklich sehr groß wäre.

Ja, Aristoteles im 4. Jahrhundert v.Chr. weiß auch von Mathematikern, die den Umfang eines größten Kreises der Erde berechnet hatten. Die Tatsache, daß hier lange nicht dasselbe Messungsergebnis erwähnt wird, das in späteren Berechnungen erzielt wurde[45], spielt für uns in diesem Zusammenhang gar keine Rolle. Ich möchte eher hervorheben, daß der prinzipielle Ausgangspunkt für das Messen der Erde auch später derselbe geblieben ist, worauf schon Aristoteles hingewiesen hatte: Man versuchte nämlich, den *Unterschied der Horizonte* zwischen zwei solchen Orten zu messen, deren nordsüdliche Entfernung voneinander als bekannt galt, und auf Grund dessen eine Proportion aufzustellen.

Ausführlich berichtet wird über die zwei berühmtesten Versuche des Altertums, einen Meridiankreis der Erde zu messen, in dem Werk jenes Kleomedes[46], über dessen Lebensdaten nur soviel gesagt werden kann, daß er irgendwann n a c h Poseidonios (135-51 v.Chr.) und v o r Ptolemaios (2. Jh.n.Chr.) gelebt haben muß – da er nämlich den Poseidonios schon erwähnt, während er den Ptolemaios (der wohl später lebte) noch nicht zu kennen scheint. Der eine Versuch der Meridianmessung, den Kleomedes behandelt, war eben der des Poseidonios.

Diese Berechnung ging von einer Annahme und einer Beobachtung aus. Es wurde nämlich angenommen, daß Rhodos und Alexandria – deren genaue Entfernung voneinander bekannt war – unter demselben Meridian lägen. Beobachtet wurde außerdem noch, daß es einen besonders hellen Stern, den Canopus, gibt, der von den nördlicheren Teilen Griechenlands aus gar nicht sichtbar ist, während er – von Rhodos aus gesehen –, wenn er kulminiert, schon am Rande des Horizontes erscheint. Noch südlicher, in Alexandria, konnte man die Kulmination des Canopus am Himmel auch gut messen. Wie Poseidonios behauptete, so mache die Kulmination dieses Sternes – also seine Höhe

---

45. Man vgl. zur Berechnung: O. Longo, *Aristotele. De caelo,* Introduzione, testo critico, traduzione e note di O.L., Firenze 1961, S. 336.

46. Cleomedis, *De motu circulari corporum caelestium* (ed. H. Ziegler), Lipsiae 1891. Zum folgenden vgl. Cleom. I, 10.



ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



über dem Horizont in dem Augenblick, in dem er den lokalen Meridiankreis des Himmels erreicht, – gerade den 48. Teil eines größten himmlischen Kreises aus. Somit betrage der Unterschied der beiden Horizonte von Rhodos und Alexandria den 48. Teil eines Kreises[47]. Doch entspreche dem 48. Teil des größten himmlischen Kreises der 48. Teil jenes anderen, irdischen Kreises, der über Rhodos und Alexandria hinweggeht, da diese beiden Stätten unter demselben Meridian liegen. Darum bekomme man die Länge eines ganzen irdischen Meridians, wenn man die in Stadien gegebene Entfernung Rhodos-Alexandria mit 48 multipliziert.

Führt diese prinzipiell tadellose Berechnung auch zu keinem Ergebnis, das uns befriedigt, so kommt dies nur daher, daß die dem POSEIDONIOS zur Verfügung stehenden konkreten Angaben nicht exakt genug waren. – Noch lehrreicher ist für uns der andere ältere Berechnungsversuch des ERATOSTHENES mit dem Gnomon.

KLEOMEDES beginnt die Besprechung dieses anderen Verfahrens mit der Aufzählung jener fünf Überlegungen, die die Berechnung ermöglicht hatten. Diese sind :

1. Syene und Alexandria lägen unter demselben Meridian. Diese Annahme besagt also, daß von diesen beiden Stätten aus gesehen die Sonne täglich zu demselben Zeitpunkt kulminiere, also an beiden Stellen zu derselben Zeit Mittag sei. – In Wirklichkeit liegt Syene um etwa $3^0$ östlicher, und darum ist hier um etwa 12 Minuten *früher* als in Alexandria Mittag. *Figur 6.* zeigt übrigens anstatt des himmlischen Meridiankreises, unter dem beide Stätten liegen sollten, den entsprechenden Hauptkreis der Erde.

2. Die Entfernung beider Punkte voneinander mache 5.000 Stadien aus. – Auch diese Angabe ist sehr ungenau, und sie ist einer der Gründe, warum das Berechnungsergebnis des ERATOSTHENES noch weniger exakt wird als das vorhin erwähnte des POSEIDONIOS. Aber es kommt uns hier sowieso nur auf die Methode an.

3. Strahlen von verschiedenen Punkten der Sonne erreichen die verschiedenen Teile der Erde als *parallele Linien*. Diese Parallelen werden auf *Figur 6.* durch Pfeilchen angedeutet.

4. Geraden, die gerade und parallele Linien schneiden, erzeugen *Wechselwinkel,* die untereinander gleich sind. (Die Wechselwinkel sind auf *Figur 6.* : φ und φ′.)

---

47. Es wurde dabei stillschweigend auch angenommen, daß angesichts der großen Entfernung des Canopus die Strahlen von ihm – bzw. die gedachten Linien *zu ihm* von Rhodos und Alexandria aus – als Parallelen gelten dürfen.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



5. Und schließlich: Kreisbogen über Winkeln, die untereinander gleich sind – oder anderes gesagt: Kreisbogen, mit denen untereinander gleiche Winkel gemessen werden, – sind untereinander *ähnlich*. Das heißt: der eine Kreisbogen ist ebensovielter Teil des eigenen Kreises, wie der andere Bogen Teil des zu ihm gehörigen Kreises ist, unabhängig davon, wie groß oder wie klein die Radien der beiden Kreise sind.

Erleichtert wurde nach diesen Überlegungen das Messen für ERATOSTHENES auch noch dadurch, daß Syene unter dem Sommerwendekreis liegt, und da hier die Sonne zu Mittag des Sommersolstitiums am Zenit steht, *der Gnomon gar keinen Schatten hat.* (Aus diesem Anlaß bemerkt KLEOMEDES, daß dieselbe Erscheinung in einem Umkreis von etwa 300 Stadien zu beobachten sei; so breit ist jener Streifen der Erdkugel in der Gegend von Syene, auf dem der Gnomon zur Zeit der Sommerwende keinen Mittagschatten hat. Dies ist die Konsequenz daraus, daß die Sonne ein großer Körper und kein bloß leuchtender *Punkt* ist.) Doch hat jener andere Gnomon, der unter demselben Meridian in Alexandria aufgestellt wurde, zu Mittag des Sommersolstitiums einen gewissen Schatten. Und da die beiden Gnomone sozusagen *Fortsetzungen* der zu ihnen gehörigen Radien der Erde sind, entstehen jene beiden Wechselwinkel, auf die uns die vorige Überlegung schon vorbereitet hat.

*Figur 6.* zeigt nun (grob schematisch), daß jener Bogen eines größten Kreises (also einem Meridian entlang), der dem Winkel φ entspricht, gerade die Entfernung Syene-Alexandria (Sy und A) angibt, während man den Bogen jenes anderen, «kleinen» Kreises (φ′) – dessen Mittelpunkt die Gnomonspitze ist – offenbar praktisch leicht messen können wird. Und da nun ERATOSTHENES fand, daß jener Bogen, der den Winkel φ′ mißt, der 50. Teil des eigenen Kreises ist, so schloß er daraus, daß die in Stadien gemessene Entfernung Syene-Alexandria mit 50 zu multiplizieren sei, um die volle Länge des irdischen Meridians zu bekommen.

Besonders lehrreich ist das Meridian-Messen des ERATOSTHENES – unter dem Gesichtspunkt der vorliegenden Untersuchung – deswegen, weil das Instrument, das dabei benutzt wurde, nicht mehr derselbe einfache Gnomon war, der uns bisher beschäftigt hat; es war eine weiterentwickelte Form des alten Schattenzeigers. Man ersieht dies aus den Worten bei KLEOMEDES, die jenen *Schattenbogen* schildern, der nachher gemessen wurde. Es heißt nämlich in seinem Text in möglichst genauer Paraphrase[48] :

48. In der lateinischen Übersetzung von H. ZIEGLER (siehe oben Anm. 46) S. 98: «... si ducamus circumferentiam ab extrema gnomonis umbra usque ad ipsam basim gnomonis eius horologii, quod Alexandriae est, haec circumferentia segmentum erit maximi circuli

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



«...zieht man einen Bogen vom Ende des Gnomon-Schattens bis zum Fußpunkt des Gnomons, bei jenem Horologium, das in Alexandria steht, so wird dieser Bogen *Abschnitt von einem jener größten Kreise, die man in der σ κ ά φ η ziehen kann...*»

*Der senkrechte Stab wurde also in diesem Fall mit einer σκάφη* ergänzt. Die *σκάφη* war eine ausgehöhlte *Halbkugel,* deren Radius der Gnomon selber und deren Mittelpunkt die obere Gnomonspitze bildete. Kein Zweifel, die *σκάφη* wurde nach demselben Plan konstruiert, dessen einfachere Variante wir aus dem Text des VITRUVIUS schon kennengelernt haben.

Man hat vorhin nach VITRUVIUS mit dem Gnomon als Radius und mit der Gnomonspitze als Zentrum den Meridiankreis geschlagen. Die untere Hälfte des gezeichneten Kreises war ein umgekehrtes Spiegelbild des himmlischen Meridianbogens. Ebenso wird beim Horologium des ERATOSTHENES die *σκάφη*, die ausgehöhlte Halbkugel, ein umgekehrtes Spiegelbild des ganzen Himmelsgewölbes. Darum kann KLEOMEDES von «größten Kreisen in der *σκάφη*» reden. Der Gnomonschatten in der *σκάφη* ist das Spiegelbild von einem Abschnitt des himmlischen Meridiankreises.

In diesem Sinne versteht man auch das ganze Verfahren des Messens vollständiger. Eigentlich wollte ERATOSTHENES wissen, wievielter Teil des ganzen irdischen Meridiankreises jener Bogen ist, den auf unserer schematischen Zeichnung *(Figur 6.)* die Buchstaben A und Sy bezeichnen. Da er jedoch diesen Bogen «in concreto» nicht messen konnte, hat er folgendermaßen gedacht: Dieser ist die genaue Projektion jenes viel größeren himmlischen Meridianbogens, von dem die parallelen Strahlen die beiden Gnomone treffen. Und von diesem himmlischen Bogen gibt der Schatten in der *σκάφη* ein umgekehrtes, aber genaues und verkleinertes Spiegelbild. Darum genügt es festzustellen, wievielter Teil des eigenen größten Kreises der Schattenbogen in der *σκάφη* ist; ebensovielter Teil des eigenen Kreises wird sowohl der *himmlische* Meridianbogen über den beiden Stätten als auch sein *irdisches* Projektionsbild zwischen Syene und Alexandria.

Zufällig wissen wir auch noch, wer den einfachen Gnomon mit der ausgehöhlten Halbkugel ergänzt hat. Dies war der große Astronom am Anfang des 3. Jahrhunderts v.Chr., ARISTARCHOS von Samos. Wie eine kurze Glosse bei VITRUVIUS (IX 8) besagt: «*scaphen sive hemisphaerium Aristarchus Samius dicitur invenisse*»[48a].

---

eorum, qui in scaphe ducuntur, quoniam maximo circulo scaphe horologii subiecta est.».

48a. (Korrektur-Note) Seit dem Abschluß des Manuskriptes mußte ich inzwischen diese meine frühere Ansicht korrigieren. Der eben zitierte VITRUVIUS-Text ist nämlich

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Man beachte auch, daß mit dem Gnomon im zuletzt besprochenen Fall des Eratosthenes wieder ein *Bogen* bzw. ein *Winkel* gemessen wurde. So war es übrigens – mindestens meiner Rekonstruktion nach – auch damals schon, als Anaximandros mit Hilfe des Gnomons das Spiegelbild zwischen den beiden Wendepunkten der Sonne zeigen konnte. Dabei wurde auch in beiden Fällen – sowohl beim Messen des Bogens zwischen den Wendepunkten wie auch beim Messen des irdischen Meridians – der fragliche Bogen (oder Winkel) sozusagen *unmittelbar* gemessen. Dies ist deswegen beachtenswert, weil wir bald andere Fälle kennenlernen werden, in denen man mit dem Gnomon ebenfalls einen Bogen (Winkel) messen wollte, aber die Messung doch nicht unmittelbar ausgeführt wurde. In diesen anderen Fällen wurden nämlich, anstatt des gesuchten Bogens, zwei Längen (Streckensegmente) gemessen, aus denen dann der fragliche Bogen (Winkel) *berechnet* werden konnte.

## 7. *Ptolemaios II 5*

Es wurde oben in der Einleitung (S. 23 ) jene Behauptung des Hipparchos zitiert, wonach man sich jedenfalls darüber einig sei, *«daß in den Gegenden von Griechenland der Schattenzeiger zum Mittagschatten der Tag- und Nachtgleiche in dem Verhältnis von 4:3 steht, und folglich dort die Polhöhe 37⁰ beträgt»*. – Wollte man nun wissen, auf welche Weise wohl Hipparchos aus der äquinoktialen Gnomon-Zahl in Griechenland (4:3) die dortige Polhöhe (37⁰) berechnet hat, so muß man vor allem das etwa 270 Jahre später geschriebene Werk des Ptolemaios heranziehen[49], obwohl dort eigentlich gerade die umgekehrte Aufgabe, nicht diejenige des Hipparchos gelöst wird.

Das Kàpitel 5 des II. Buches von Ptolemaios heißt nämlich :

---

wohl nur eine *antiker Irrtum.* Die *«scaphe vise hemisphaerium»* muß schon lange v o r Aristarchos existiert haben. Früher hieß dieser Teil des Horologiums einfach: πόλος, oder bei Aristophanes spöttisch: πνιγεύς. Man vgl. zu dieser Frage meinen Aufsatz: A. Szabó, *Astronomische Messungen bei den Griechen im 5. Jahrhundert v.Chr. und ihr Instrument* in: *Historia Scientiarum* (The History of Science Society of Japan, Tokyo) No. 21. 1981 1-26.

49. Diese chronologische Angabe – etwa 270 Jahre zwischen den Werken des Hipparchos und Ptolemaios – geht auf die folgende, häufig zitierte Bemerkung des Ptolemaios (VII, 2) zurück: «... die Zwischenzeit seit Hipparchs Beobachtungen bis zum ersten Jahre der Regierung Antonins (137-138 n.Chr.), in welchem gerade auch wir die Örter der meisten Fixsterne durch Beobachtung festgestellt haben, beträgt *ungefähr (128+137) 265 Jahre...*» (Übersetzung von K. Manitius 1913, II, S. 15).

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



*«Wie aus gegebenen Größen das Verhältnis des Gnomons zu den an den Nachtgleichen und Wenden zur Mittagstunde beobachteten Schatten bestimmt wird».*

Sind also gewisse Angaben bekannt, dann kann man aus ihnen – wie dieses Kapitel bei PTOLEMAIOS zeigen wird – die drei Schattenlängen des Gnomons, diejenigen der beiden Solstitien und die dritte der Tag- und Nachtgleichen berechnen. (Wirklich aufschlußreich wird für uns im folgenden besonders die Länge des Mittagschattens der Tag- und Nachtgleiche).

Von den drei zu allen diesen Berechnungen nötigen Angaben hebt der Text von vornherein nur zwei hervor: 1. Ein für allemal bekannt sein soll «der Bogen zwischen den Wendekreisen» und 2. «der Bogen zwischen dem Horizont und dem betreffenden Pol» (d.i. die *Polhöhe* am fraglichen Ort). Es wird *nicht* im voraus hervorgehoben, daß zu den geplanten Berechnungen auch die Länge des Gnomons gegeben sein soll, aber *de facto* rechnet PTOLEMAIOS immer mit einem Gnomon, dessen Länge 60 Einheiten beträgt.

Was nun die erste gegebene Größe, den «Bogen zwischen den Wendekreisen» betrifft, so ist er deswegen wichtig, weil seine Hälfte die «Schiefe der Ekliptik» ist. PTOLEMAIOS benutzt dafür den schon erwähnten korrigierten Wert: $23^0\ 51'\ 19''$; wir begnügen uns dagegen in diesem Zusammenhang mit den traditionellen $24^0$. Selbst HIPPARCHOS, der nach einer oben erwähnten Bemerkung (S. 59 ) den genaueren Wert schon kannte, begnügte sich manchmal mit dieser bequemen Näherungsangabe[50].

Die zweite zu den Berechnungen des PTOLEMAIOS nötige Angabe ist die *geographische Breite* des betreffenden Ortes, oder wie er sich ausdrückt: «der Bogen zwischen dem Horizont und dem Pol» (d.i. die *Polhöhe*). – Es wurde oben, in der Einleitung (S. 24 ) schon erwähnt, daß die «geographische Breite» eines gegebenen Ortes und die «Polhöhe» daselbst äquivalente Begriffe sind. Nun lohnt es sich, hier sowohl diese Behauptung an Hand des Gnomons zu beleuchten als auch zu zeigen, wie man überhaupt mit dem Gnomon die geographische Breite mißt.

*

In der Tat kann man mit dem Gnomon *zur Mittagszeit beim Äquinoktium* die geographische Breite eines Ortes, d.h. seine Entfernung

---

50. Man vgl. dazu HIPPARCHOS I, cap. 10 (MANITIUS 1894, S. 97): «der Sommerwendekreis ist *nahezu* $24^0$ nördlich des Äquators».

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



vom Äquator dem Meridian entlang, sehr leicht feststellen. Bezeichnen z.B. die Buchstaben Sy an der vorigen *Figur 6.* diesmal *nicht* Syene, sondern einen Gnomon am Äquator, so wirft hier der senkrechte Stab zu Mittag gar keinen Schatten. Außerdem sieht man an den Nachtgleichen die Sonne von jedem Punkt der Erde in der Ebene des Äquators. Darum wird also jener Sonnenstrahl (auf *Figur 6.*) zu Mittag des Äquinoktiums, der mit dem auf den Gnomon des Äquators fallenden Strahl parallel ist, mit jenem anderen Gnomon in Punkt A den Winkel φ′ bilden. Und wie die Figur zeigt, sind die beiden Winkel – φ, der diesmal den Bogen der Entfernung des Punktes A vom Äquator (Sy) bezeichnet, und φ′, der Winkel bei der Gnomonspitze – untereinander gleich.

Noch einfacher illustriert wird dieselbe Tatsache – daß man nämlich an Tag- und Nachtgleichen mit dem Gnomon die geographische Breite des Ortes messen kann – durch die *Figur 7.* Bezeichnet nämlich an dieser Skizze die Linie *NAFC* den äquinoktialen Mittagstrahl der Sonne (und damit den Durchmesser bzw. die Ebene des Äquators), so ist es auch klar, daß der Bogen $\widehat{BF}$ eben die Entfernung des Punktes *B* (wo der Gnomon steht) vom Äquator *NAF* dem Meridian entlang – also die geographische Breite desselben Punktes B – angeben muß. Dabei zeigt diese Skizze auch, daß die Polhöhe desselben Ortes (φ′ auf *Figur7.)* ebenso groß ist wie die geographische Breite;[50a] denn die beiden Winkel (φ und φ′) sind auch hier untereinander gleich, da ihre Schenkel *senkrecht aufeinander sind.*

*

Illustriert werden dann die Berechnungen des PTOLEMAIOS am Beispiel von *Rhodos*. Wie es schon am Anfang des 2. Kapitels im Buch II. hieß :

*«Für die Beispiele soll allgemein als gegeben angenommen werden der durch Rhodos parallel zum Äquator gezogene Kreis, wo die Polhöhe 36⁰ ist (und wo der längste Tag 14 1/2 Äquinoktialstunden beträgt).»*

[Diese Wahl des Beispiels kommt wohl daher, daß PTOLEMAIOS dieselbe Berechnung vermutlich schon bei seinem großen Vorbild, HIPPARCHOS fertig vorgefunden hat. HIPPARCHOS hatte ja nach der Überlieferung, mindestens eine Zeitlang, auf der Insel Rhodos gearbeitet.]

In der Kenntnis der Polhöhe (36⁰) und des Bogens zwischen den Wendepunkten (48⁰) kann man nun – durch einfache Subtraktion bzw.

---

50a. Die Linie PQ, senkrecht auf den Durchmesser des Äquators, bezeichnet auf dieser Figur die Richtung des Nordpols.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Addition der «Schiefe der Ekliptik» ($24^0$) – auch die Winkel beim Punkt *A* sowohl im Dreieck *ABR* wie auch im anderen, *ABT (Fig. 7.)*, berechnen. Der eine Winkel davon ($36^0 - 24^0 = 12^0$) wird der dem *Sommerwendschatten* (BR) und der andere ($36^0 + 24^0 = 60^0$) der dem *Winterwendschatten (BT)* gegenüberliegende.

Interessanter ist, wie die drei Schattenlängen des Gnomons *(BR, BC* und *BT)* berechnet werden. Dazu führt nämlich die folgende Überlegung.

Der senkrecht aufgestellte Stab und sein Schatten bilden in allen drei Fällen je einen rechten Winkel. Beachtet man dazu noch die drei Fälle des Sonnenstrahls, der je einen Schatten wirft, so hat man es hier *mit drei verschiedenen rechtwinkligen Dreiecken zu tun.* Das rechtwinklige Dreieck kann jedoch – im Sinne eines grundlegenden Satzes von THALES – immer als in einen Halbkreis eingeschriebenes gelten, wobei die Hypotenuse des Dreiecks *Durchmesser* des Kreises und die beiden Katheten *Sehnen* in demselben Kreis sind. Eben diese Tatsache – daß auf diese Weise alle Seiten aller im konkreten Fall vorliegenden Dreiecke als «Sehnen» gedacht werden – ermöglicht die Anwendung jener *Sehnentafel,* die bei PTOLEMAIOS fertig vorliegt.

Nun wird das Problem der Sehnentafel – d.h. jene geistreiche, aber auch recht umständliche Methode, nach der im Kapitel 11 des I. Buches bei PTOLEMAIOS eine vollständige Tabelle dafür zusammengestellt wurde, wie in einem Kreis mit dem Größerwerden der Bogen von Grad zu Grad (bzw. von Halbgrad zu Halbgrad) sich die Längen der zu ihnen gehörigen Sehnen verändern – in dieser Untersuchung später auch noch eingehender erörtert. Hier soll einstweilen – zur allgemeinen Orientierung – nur eine kurze Schilderung der vier einfachsten Schritte der Methode, wonach die Tabelle zusammengestellt wurde, eingefügt werden.

1. Vor allem wird der ganze Kreis in 360 Grade (bzw. 720 Halbgrade) und die größte Sehne im Kreis, der Durchmesser, in 120 Längeneinheiten *(partes)* geteilt. Und so bildet den Ausgangspunkt zur Sehnentafel die Feststellung, daß zum Kreisbogen von $180^0$ (zum Halbkreis) jene Sehne gehört, die mit $120^P$ Längeneinheiten gemessen wird : $180^0$ ... $120^P$.

2. Sehr einfach ist auch einzusehen, wie lang jene Sehne wird, die zum Kreisbogen von $60^0$ gehört. Dieser Bogen ist nämlich gerade der sechste Teil des vollen Kreisumfangs ($360^0$), und die dazugehörige Sehne ist eine Seite des regelmäßigen Sechsecks; da nun die Sechseckseite dem Radius des Kreises gleich ist, darum gehört in der Tabelle des PTOLEMAIOS – dessen Kreis einen Durchmesser (2r) von $120^P$ Einheiten hat – zum Bogen von $60^0$ eine $60^P$ lange Sehne ($60^0$ ... $60^P$).

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



3. Mit dem Radius des Kreises wird auch die zum Kreisbogen von $90^0$ gehörige Sehne berechnet. Dieser Kreisbogen entspricht nämlich genau einem Viertelkreis, und die Sehne, die die Endpunkte eines Viertelkreises überspannt, kann als *Hypotenuse* eines solchen rechtwinkligen Dreiecks gelten, dessen beide Katheten zwei Radien des Kreises, also je $60^p$ Längeneinheiten sind. Diese andere Sehne – die Hypotenuse des vorliegenden gleichseitigen rechtwinkligen Dreiecks – ist also, im Sinne des pythagoreischen Lehrsatzes: $\sqrt{2 \times 60^2} = 60 \times \sqrt{2} = 84{,}...^p$. Man kann also in die Tabelle eintragen: $90^0$ ...$84{,}...^p$, wenn man sich einstweilen bloß mit ganzen Zahlen begnügt[51].

4. Ebenso wird – wieder im Sinne des pythagoreischen Lehrsatzes – die Seite des in den Kreis eingeschriebenen gleichseitigen Dreiecks (vgl. *Figur 8., h*), die Sehne also, die einen Bogen von $120^0$ unterspannt, ins Quadrat erhoben, gleich dem dreifachen Quadrat des Radius - $\left(\frac{h}{2}\right)^2 = r^2 - \frac{r^2}{4} = \frac{3}{4} r^2$, also $h^2 = 3 \times r^2$ – und $h = r \times \sqrt{3}$ bzw. $h = 60 \times \sqrt{3}$, und darum $120^0$ ... $103{,}...^p$.

Die vier einfachsten Werte in der Sehnentafel sind also :

$60^0$ ... $60^p$
$90^0$ ... $84{,}...^p$
$120^0$ ... $103{,}...^p$
$180^0$ ... $120^p$

Anstatt nun weiter zu verfolgen, wie PTOLEMAIOS seine Sehnentafel vervollständigt, wollen wir sehen, wie diese Tafel zur Lösung einer konkreten Aufgabe benutzt wird.

Man könnte die eine von den drei bei PTOLEMAIOS (II 5) gestellten Aufgaben etwa folgendermaßen formulieren: Wie lang wird der äquinoktiale Mittagschatten des Gnomons, dessen Länge $60^p$ Einheiten beträgt, in Rhodos, wo die Polhöhe $36^0$ ist? – Gegeben sind also (nach unserer *Figur 7.*) vom rechtwinkligen Dreieck *ABC* die Kathete $AB = 60^p$ und der spitze Winkel $\varphi = (\delta + \varepsilon) = 36^0$; gesucht wird die andere Kathete, *BC*. – Man würde eine solche Aufgabe heute natürlich mit Winkelfunktionen (tg oder ctg) lösen. Wir wollen jedoch einerseits den Gedankengang des PTOLEMAIOS möglichst genau rekonstruieren und andererseits dieselbe Sehnentafel benutzen, die ihm zur Verfügung stand. – Er mußte also offenbar folgendermaßen denken :

Die beiden Katheten *AB* und *BC* des rechtwinkligen Dreiecks

51. PTOLEMAIOS benutzt in seiner Tafel Sexagesimalbrüche. Uns genügen in diesem Zusammenhang auch die approximativen ganzen Zahlen.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



können *Sehnen* in einem solchen Kreis sein, dessen *Durchmesser* die Hypotenuse *AC* ist. Die gesuchte Kathete-Sehne *BC* liegt dem Winkel $\varphi = 36^0$ gegenüber. Wollen wir auf diesen Kreis und auf dieses rechtwinklige Dreieck die Sehnentafel des PTOLEMAIOS anwenden, so müssen zwei Tatsachen berücksichtigt werden.

1. Der Winkel $\varphi$ ist in jenem Kreis, den wir uns um unser rechtwinkliges Dreieck *ABC* herum denken, ein *Peripheriewinkel.* Doch liegen jene Sehnen, deren Längen – im Verhältnis zum Durchmesser ($120^P$) – vorhin in der Sehnentafel des PTOLEMAIOS berechnet wurden, *Zentriwinkeln* gegenüber. Man wird also den wichtigen Euklidischen Satz *(Elem. III 20)* nicht vergessen dürfen: «*Im Kreis ist jeder Zentriwinkel das D o p p e l t e des auf demselben Bogen stehenden Peripheriewinkels*». Das heißt also: die Sehne *BC,* die uns interessiert, gehört nicht zu einem Bogen von $36^0$, sondern zu dem doppelten davon, d.h. zu einem Bogen von $72^0$. Dasselbe gilt natürlich auch für den anderen spitzen Winkel in demselben rechtwinkligen Dreieck, bei *C*; dieser ist nämlich als Peripheriewinkel ein Winkel von $54^0$, aber die diesem Winkel gegenüberliegende Kathete *(AB)* ist eine Sehne zum Bogen von $108^0$ (Zentriwinkel).

2. Man muß außerdem im Auge behalten, daß die Sehnentafel für einen solchen Kreis gilt, dessen Durchmesser in $120^P$ Längeneinheiten geteilt wurde. Doch hat in unserem vorliegenden Fall der Hypotenuse-Durchmesser *AC eine andere Länge.* Unser rechtwinkliges Dreieck *ABC* ist nur *ähnlich* jenem anderen, dessen Katheten-Längen wir in der Sehnentafel des PTOLEMAIOS nachschlagen können.

Wir können also einstweilen nur herausfinden, welche Sehnenlängen den beiden Bogen von $108^0$ und $72^0$ Zentriwinkel entsprechen. Man findet bei PTOLEMAIOS die Angaben: $108^0$...97,...$^P$ und $72^0$...70,...$^P$. Dann sagt man, daß das Verhältnis dieser beiden Längen (97:70) dasselbe sein muß, wie 60:*BC,* da unser rechtwinkliges Dreick (*ABC* nach *Figur 7.*) demjenigen bei PTOLEMAIOS ähnlich ist; also $97:70 = 60:BC$. Und aus dieser Proportion bekommt man $BC = \frac{70 \times 60}{97} = 43,...$

Jene Berechnung, die in dem authentischen Text des PTOLEMAIOS (II 5) vorliegt, ist etwas genauer als die hier eben vorgeführte, weil der antike Gelehrte auch einige Bruchteile der Sehnenlängen (in Sechzigsteln) berücksichtigt. Doch es genügt für unsere Zwecke auch die gröbere Approximation bloß in ganzen Zahlen. Auch so ist schon die hier skizzierte Berechnung *genauer* als die andere in der antiken Populärwissenschaft übliche. Man denke nämlich an folgendes :

Es wurde oben (S. 47 ) mindestens beiläufig schon erwähnt, daß nach VITRUVIUS die äquinoktiale Gnomon-Zahl für Rhodos *7:5* ist. (Der

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Mittagschatten eines *7* Einheiten langen Gnomons wird auf Rhodos bei Tag- und Nachtgleiche *5* Einheiten lang). Dieses Verhältnis hat PTOLEMAIOS – auch wenn man bloß die ganzen Zahlen berücksichtigt – auf 60:43 verfeinert. In der Tat sind die beiden Verhältnisse nahezu gleich: $7:5 \approx 60:43$. (Das Produkt der inneren Glieder: $5 \times 60 = 300$ und das der äußeren Glieder : $7 \times 43 = 301$.)

## *8. Die Umkehrung der alten Berechnungen*

Es werden nun bei PTOLEMAIOS – mit derselben Methode, die im vorhergehenden gezeigt wurde – auch noch die Schattenlängen der beiden Solstitien berechnet. Dann schließt der Verfasser das betreffende Kapitel (II 5) mit zwei interessanten Bemerkungen.

Einerseits betont er nämlich, daß *die Berechnungen auch umgekehrt möglich sind.* Man kann auch aus dem Verhältnis des Gnomons zu seinen Schattenlängen sowohl die Schiefe der Ekliptik (bzw. den ganzen Bogen zwischen den Wendekreisen) wie auch die Polhöhe (die geographische Breite) und die Winkel den Sonnwendschatten gegenüber berechnen.

Andererseits weist PTOLEMAIOS darauf hin, daß die *unmittelbare Beobachtung* (der berechneten Schattenlängen) in Wirklichkeit doch nicht leicht ist. Teils kann man nämlich den exakten Zeitpunkt, bei dem die Tag- und Nachtgleiche eintritt, kaum mit voller Sicherheit feststellen, und teils sieht man beim Wintersolstitium nicht scharf genug die äußersten Endpunkte der Schatten.

Die zweite Bemerkung zeigt also, daß man sich der mangelnden Präzision der Gnomon-Messungen zur Zeit des PTOLEMAIOS durchaus schon bewußt war. Aber lehrreicher ist für uns diesmal die andere vorausgeschickte Bemerkung.

Man fragt sich nämlich unwillkürlich: Wozu hat PTOLEMAIOS eigentlich gezeigt, wie man – in der Kenntnis der Ekliptikschiefe und der Polhöhe (der geographischen Breite) des betreffenden Ortes – die Schattenlängen des Gnomons an vier interessanten Tagen des Jahres im voraus berechnen kann? Dies mag zwar eine hübsche Schulaufgabe der Mathematik sein, aber ist dieses Berechnen der Schattenlängen in der Tat auch für die Astronomie oder die Geographie wichtig? Besonders, wenn am Ende doch bemerkt werden mußte, daß man die genau berechneten Längen *praktisch* dennoch nicht leicht beobachten kann!

Es sieht in der Tat so aus, als hätten die Astronomen zur Zeit des PTOLEMAIOS das alte Instrument, den Gnomon, praktisch kaum mehr

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



benutzt. PTOLEMAIOS berechnete z.B. den «Bogen zwischen den Wendekreisen» *nicht* auf dem Wege der Beobachtung von Gnomon-Schatten, sondern mit einem anderen Instrument. Und zur unmittelbaren Beobachtung der «Polhöhe» hätte er den Gnomon auch gar nicht benutzen können. (Dieser hat ja in der Nacht auch gar keinen Schatten). Und ursprünglich mußte die *Polhöhe* doch in der Nacht gemessen werden. Daß die Polhöhe eines Ortes der geographischen Breite desselben *gleich* ist, kann nur eine verhältnismäßig *spätere* Entdeckung gewesen sein. Dazu muß man nämlich mit Hilfe einer Darstellung (wohl eben mit dem Gnomon!) wahrgenommen haben, daß die Schenkel der beiden Winkel (der Polhöhe und der Breite) *senkrecht aufeinander sind.*

Auf diese Weise hatten also jene Berechnungen mit dem Gnomon, die PTOLEMAIOS im betreffenden Kapitel (II 5) schildert, eigentlich auch für ihn selbst nur noch einen *historischen Wert.* Und man gewinnt den Eindruck, als wären Zweck und Ziel der Gnomon-Beobachtungen *ursprünglich* eben jene «umgekehrten Berechnungen» gewesen, die PTOLEMAIOS selber erst am Ende der geschilderten Erörterungen und bloß beiläufig erwähnt. Das heißt: Ursprünglich hat man wohl die Schattenlängen des Gnomons wirklich gemessen – so unpräzis die Messungen auch gewesen sein mögen –, und aus den praktisch beobachteten Angaben wurden solche astronomisch und geographisch wichtigen Maße wie «Bogen zwischen den Wendekreisen», «Schiefe der Ekliptik» und «geographische Breite» (bzw. «Polhöhe») berechnet. Ja, wir können auch die relative Reihenfolge dieser Entdeckungen mit großer Wahrscheinlichkeit in den folgenden Etappen rekonstruieren :

a.) Eine frühzeitige Gnomon-Messung muß diejenige gewesen sein, die den kürzesten und den längsten Mittagschatten des Jahres registrierte. Mit diesen hat man die *beiden Solstitien* zeitlich fixiert. – Es ist fraglich, ob man zu dieser frühen Zeit sogleich auch erkannte, daß sowohl die kürzesten wie auch die längsten Mittagschatten eines Gnomons anders sind, je nachdem, ob man sie an einer südlicheren oder an einer nördlicheren geographischen Stelle mißt.

b.) Auf alle Fälle hat man einen großen Schritt vorwärts auf dem Wege der Gnomon-Messungen erst dann getan, als erkannt wurde, daß kürzester und längster Mittagschatten des Gnomons auch den *Bogen zwischen den Wendekreisen* bestimmen. (Diese Entdeckung versuchte ich oben, dem ANAXIMANDROS zuzuschreiben). Damit haben nämlich die Gnomon-Messungen zu einem konstanten (oder einem «quasi-konstanten») Wert geführt. Denn einerlei, wie südlich oder wie nördlich auf griechischem Gebiet der kürzeste und der längste Mittagschatten gemessen wurde, der Bogen zwischen den Wendekreisen, der durch die

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



beiden Schatten bestimmt wird, war – im Durchschnitt – immer derselbe.

c.) Das Halbieren des Bogens zwischen den Wendepunkten ergab – in dem mit dem Gnomon entworfenen astronomischen Weltbild – nicht nur die *Schattenlänge des Mittags bei Tag- und Nachtgleiche* und damit die *Schiefe der Ekliptik*, sondern – in der Form des äquinoktialen Mittagstrahls – auch den *Durchmesser des himmlischen Äquators.* Und diese Ergebnisse hatten sogleich auch mehrere interessante Konsequenzen.

d.) Da die Schiefe der Ekliptik als konstanter Wert galt, hat ihre Kenntnis sogleich auch das praktische Messen mit dem Gnomon erleichtert. Es genügte von dieser Zeit ab – in konkreten Einzelfällen –, nur noch den Mittagschatten beim Sommersolstitium zu messen (z.B. *BR* auf *Figur 7.)*: eben diese Messung war am leichtesten und zuverlässigsten, weil der Mittagschatten im Sommer am schärfsten ist. (In der Tat werden wir später eine solche berühmte Messung der Antike – diejenige des PYTHEAS – auch noch näher ins Auge fassen). Aus dem kürzesten Mittagschatten der Sommersonnenwende ließ sich vor allem der gegenüberliegende Winkel ($\delta$ auf *Figur 7.*) berechnen. Addierte man zu $\delta$ die Ekliptikschiefe ($\varepsilon = 24^0$), so hatte man den Winkel $\varphi$ ($= \delta + \varepsilon$) gegenüber dem Mittagschatten der Tag- und Nachtgleiche, woraus sich dann diese Schattenlänge (in der Kenntnis der Länge des Gnomons selber) berechnen ließ. Oder addierte man zu $\delta$ die doppelte Schiefe ($2\varepsilon = 48^0$), so erhielt man den Winkel dem Winterwendschatten gegenüber, und nun brauchte man sich auch um das komplizierte Messen dieser anderen Länge nicht mehr zu bemühen, nachdem sich auch der Winterwendschatten auf Grund des ihm gegenüberliegenden Winkels berechnen ließ.

e.) Das Halbieren des Bogens zwischen den Wendepunkten hat – im Weltbild des Gnomons – zunächst nur den äquinoktialen Sonnenstrahl ergeben. Doch muß diese Entdeckung bald auch zu einer interessanten Begriffsbildung geführt haben. Man hat nämlich vor allem jenen Kreis, den die Sonne am Tag der Nachtgleiche am Himmelsgewölbe zu beschreiben scheint, als «taggleichen Kreis» (ἰσημερινὸς κύκλος; lateinisch: *aequator*) benannt. Natürlich hat man diesen mehr oder weniger nur gedachten Kreis ursprünglich sich als einen Kreis des Himmels vorgestellt. Da jedoch der Gnomon der griechischen Wissenschaft nur dann sinnvoll ist, wenn man dabei von der *zentralen* Stellung der Erde im Weltall ausgeht – wie dies ANAXIMANDROS gelehrt hatte – wurde bald der himmlische Äquator als *Projektion* auf die Erde übertragen. Allerdings mußte dazu die früher vermutete «zylinder-

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



förmige Gestalt» der zentralen Erde auf *kugelförmig* korrigiert werden[52]. Nur so konnte man die *Himmelspole*, die *Wendekreise* der Sonne am Himmel und auch den *Äquator* selbst als Projektionen auf die Erde übertragen, wobei die zentrale Erde selber als konvexe Projektion der konkaven Himmelskugel galt.

f.) Wohl mit der Projektion der gedachten himmlischen Kreise auf die Erdkugel begann der neue Wissenschaftszweig der *astronomischen* oder *mathematischen Geographie*. Wie der himmlische Äquator den Himmel selbst, so teilt der entsprechende irdische Äquator die Erde in zwei untereinander gleiche Halbkugeln. Ja, mit dem Äquator waren sogleich auch die beiden Wendekreise, die τροπικοὶ κύκλοι gegeben; wie diese am Himmel parallel zueinander sind, so müssen natürlich auch die «tropischen Kreise» der Erde parallel zum Äquator sein. Und wie die Sonne zwischen den beiden Wendekreisen am Himmel jeden Tag einen zu dem vorigen parallelen Kreis zu beschreiben gedacht wird, so schrieb man auch auf der Erdkugel *Parallelkreise* zum Äquator, ja man ergänzte die Reihe von diesen auf der oberen und unteren Halbkugel der Erde auch über die beiden Wendekreise hinaus bis zu den Polen.

g.) Es bot sich mit den Parallelkreisen auch die Möglichkeit des M e s s e n s ihrer *Entfernung vom Äquator.* Man wußte vor allem, daß die beiden Wendekreise in gleicher Entfernung oberhalb und unterhalb

---

52. Liest man Kap. 4. des Buches I. von PTOLEMAIOS aufmerksam genug, so hat man in der Tat den Eindruck, daß zu allerletzt gerade die Vorstellung des ANAXIMANDROS von der «zylinderförmigen Erde» korrigiert wurde, als man sich auf die *Kugelgestalt* festlegte. Man beachte nämlich, wie die ersten drei Schritte des Gedankenganges in diesem Kapitel des PTOLEMAIOS sich unmittelbar mit Zitaten belegen lassen :

a.) «Zur Erkenntnis, daß die Erde, als Ganzes betrachtet, für die sinnliche Wahrnehmung *kugelförmig* sei, dürfte man am besten auf folgendem Wege gelangen. Nicht für alle Bewohner der Erde ist Aufgang und Untergang der Sonne, des Mondes und der anderen Gestirne *gleichzeitig* zu sehen, sondern *früher* stets für die nach Osten zu, und *später* für die nach Westen zu wohnenden. Etc.»

b.) Es wird bündig zusammengefaßt, daß die Oberfläche der Erde keine Hohlfläche, keine ebene Fläche, Pyramide, Würfel oder Polyeder sein kann. – Und dann kommt, wie ich vermute, *der deutliche Hinweis auf ANAXIMANDROS*, allerdings ohne Namen :

c.) «Daß aber die Erde *auch nicht zylinderförmig* sein kann, auch nicht unter der Voraussetzung, daß *die Rundfläche nach Osten und Westen gekehrt und die Seiten der ebenen Grundflächen nach den Weltpolen gerichtet wären,* was man wohl als das Glaubwürdigere annehmen dürfte (weil die Annahme mit dem täglichen Umschwung des Fixsternhimmels von Osten nach Westen zu im allgemeinen im Einklang stehen würde – hinzugefügte Bemerkung des Übersetzers, K. MANITIUS), wird aus dem folgenden klar». – Ich frage mich nun, ob nicht schon ANAXIMANDROS selber diese Korrektur vom *Zylinder* zur *Kugel* vollzogen hat? – Das erklärte nämlich, wieso es bei DIOGENES LAERTIOS (II 1-2) über ANAXIMANDROS heißen kann – trotz der anderen Überlieferung auf der THEOPHRASTOS-Linie –, daß er von einer «kugelförmigen Erde» sprach.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



des Äquators sein müssen. Dies ergab sich einfach daraus, daß man auf dem astronomischen Weltbild des Gnomons den Durchmesser des Äquators eben folgendermaßen bekam: Man halbierte den Bogen zwischen den beiden Wendepunkten – bzw. zwischen jenen beiden Punkten, in denen der Sonnenstrahl der Sommerwende und Winterwende den Meridiankreis schnitt (es handelt sich also um die Punkte *H* und *G* auf *Fig. 5.)* –, und den Halbierungspunkt verband man mit der Gnomonspitze.

Wohl etwas später kam man auch darauf, daß die Entfernung des Wendekreises vom Äquator (ungefähr) der Seite eines regelmäßigen Fünfzehnecks, also $24^0$ Zentriwinkel im Kreis entspricht. – Wo liegt nun jener irdische Wendekreis, der als Projektion des himmlischen Parallelkreises der Sommerwende gelten darf? – hieß wohl die nächste konkrete Frage. Zur Zeit des ERATOSTHENES, im 3. Jahrhundert v.Chr., wußte man allerdings schon, daß dieser Kreis im Süden Ägyptens über Syene hinweggeht. Denn das Meridianmessen des ERATOSTHENES, wovon im vorangehenden Kapitel die Rede war, ging ja eben von jener Beobachtung aus: Der Gnomon hat in Syene bei Sommerwende gar keinen Mittagschatten. Der Sommerwendekreis der Sonne muß also über Syene am Himmel sein.

Aber ebenso konnte man die Entfernung jedes beliebigen Parallelkreises der Erde vom Äquator – einem Meridian entlang – mit einem Bogen messen. Es genügte dazu, an demselben Meridiankreis, an dem die Punkte der beiden Sonnenwenden bzw. ihre Spiegelbilder gefunden wurden, diesmal den Bogen zwischen dem Fußpunkt des Gnomons und dem Mittagstrahl der Sonne zur Tag- und Nachtgleiche zu messen. Denn dieser Bogen (etwa *BF* auf *Figur 7.*) zeigt ja unmittelbar die Entfernung des Punktes *B* vom Äquator *(NAF)* dem Meridian entlang, also die *geographische Breite* des betreffenden Punktes *(B)*.

Daraus ersieht man sogleich auch, warum gewöhnlich eben *der äquinoktiale Mittagschatten des Gnomons* registriert wurde. Aus dieser Länge berechnete man die Entfernung jenes Punktes vom Äquator, wo der Gnomonschatten gemessen wurde.

Und nun können wir zu der am Anfang des vorigen Kapitels bereits zitierten HIPPARCHOS-Stelle zurückkommen.

## 9. *HIPPARCHOS*

HIPPARCHOS behauptet also[53], daß in Griechenland der Schattenzei-

53. MANITIUS 1894, S. 27.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



ger zum Mittagschatten der Tag- und Nachtgleiche in dem Verhältnis von 4:3 steht und deswegen die Polhöhe dort ungefähr $37^0$ beträgt. Wie hat nun HIPPARCHOS aus der mitgeteilten Verhältniszahl des Gnomons die betreffende geographische Breite berechnet?

Man könnte diese Aufgabe natürlich auch mit einfacher geometrischer Konstruktion lösen. Das heißt, man würde ein rechtwinkliges Dreieck mit den Katheten 4 und 3 – wie auf *Figur 9.* – konstruieren, und man würde danach den Winkel φ einfach mit dem Goniometer messen. Doch wir verlassen uns eher auf PTOLEMAIOS, der uns versichert, daß man auch aus der Schattenlänge des Gnomons bei Tag- und Nachtgleiche die geographische Breite – d.h. also den Bogen zwischen dem Fußpunkt des Gnomons und jenem Sonnenstrahl, der den Schatten wirft – mit Hilfe der Sehnentafel berechnen kann.

Besaß nun HIPPARCHOS im 2. Jahrhundert v.Chr. ungefähr dieselbe Sehnentafel, die uns im Werke des viel späteren PTOLEMAIOS zur Verfügung steht, so muß er die vorliegende Aufgabe etwa folgendermaßen gelöst haben :

Jenes rechtwinklige Dreieck, dessen beide Katheten 4 und 3 Einheiten lang sind, hat eine 5 Einheiten lange Hypotenuse; 3, 4 und 5 sind ja die einfachsten Pythagoreischen Zahlen, da $3^2 + 4^2 = 5^2$ sind. Auf dieses rechtwinklige Dreieck kann man die Sehnentafel des PTOLEMAIOS natürlich nicht unmittelbar anwenden, da die Tafel für einen solchen Kreis berechnet wurde, dessen Durchmesser – die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks, das man in den Halbkreis schreiben kann – $120^P$ ist. Unser kleines Dreieck mit den Seiten 3, 4 und 5 müßte eben 24-mal so groß sein, damit seine Hypotenuse dem Durchmesser des Kreises (mit den Sehnen) gleich sei: $24 \times 5 = 120$. Auch jene Kathete also, die die Länge des Mittagschattens vertritt, müßte nicht 3, sondern 24-mal so groß, also $24 \times 3 = 72$ Einheiten lang sein.

Will man nun wissen, wie groß in einem solchen rechtwinkligen Dreieck der Winkel φ ist, so muß man auf Grund der Sehnentafel vor allem feststellen; ein wie großer Zentriwinkel zu jener Sehne gehört, die *etwa* $72^P$ lang ist. – In der Tat findet man in der Sehnentafel des PTOLEMAIOS gar keine Sehne, die genau $72^P$ wäre. Es gibt darin nur drei Längen, die sich von unserem Wert nicht allzusehr unterscheiden; diese sind :

| | | | |
|---|---|---|---|
| $71^P$ | und | 47 | Sechzigstel |
| $72^P$ | » | 13 | » |
| $72^P$ | » | 38 | » |

Von diesen dreien dürfte man den *mittleren Wert* für den gesuchten nehmen. Neben dieser Sehnenlänge findet man den Zentriwinkel von

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



74⁰. Halbiert man diesen Winkel, so bekommt man den Peripheriewinkel $\varphi = 37^0$. Die geographische Breite, die zur äquinoktialen Gnomon-Zahl 4:3 gehört, ist also *ungefähr* $37^0$.

In der Tat hat man *wörtlich* diese Formulierung im Text des HIPPARCHOS. Er behauptet nämlich, daß in Griechenland, wo der Schattenzeiger zum Mittagschatten der Tag- und Nachtgleiche in dem Verhältnis von 4:3 steht, dort die Polhöhe *ungefähr* (ὡς ἔγγιστα) $37^0$ beträgt.

## *10. Verschiedene Approximationen*

Die Tatsache, daß der Text des HIPPARCHOS ausdrücklich betont, die in Graden berechnete geographische Breite (Polhöhe) für Griechenland sei nur ein approximativer Wert[54], legt den Verdacht nahe, daß zu seiner Zeit wohl auch schon genauere Berechnungen für denselben Tatbestand bekannt waren. Vielleicht hat sich HIPPARCHOS nur aus Bequemlichkeit mit dem genannten Breitengrad begnügt. Wir haben zwar keinen handfesten Beweis für diese Vermutung, aber der Verdacht läßt sich doch einigermaßen erhärten. Man überlege sich nämlich folgendes :

Wir sind derselben Gnomon-Zahl (4:3), aus der HIPPARCHOS die Polhöhe für Griechenland berechnet hatte, schon einmal begegnet. VITRUVIUS hat nämlich (siehe oben S. 47 ) dasselbe Verhältnis (4:3) als die äquinoktiale Gnomon-Zahl für Athen erwähnt. Man konnte also dieselben Zahlen sowohl für die wichtigste griechische Stadt des Festlandes wie auch für Griechenland im allgemeinen gelten lassen. Man vergesse dabei auch nicht, daß der zeitliche Unterschied der beiden Verfasser – HIPPARCHOS und VITRUVIUS – nicht mehr als etwa 100 Jahre betragen kann. Es scheint, daß in diesem Fall der Astronom und der Architekt derselben älteren Tradition gefolgt sind. Übrigens ist die Breitengrad-Bestimmung, die sich aus dem besagten Verhältnis für Athen ergibt (also $37^0$) – nach modernen Maßstäben – eine ziemlich grobe Approximation[55]. Es sollte in Wirklichkeit um etwa einen vollen

---

54. HIPPARCHOS betont außerdem (ebd.), daß auch die andere Polhöhe ($41^0$), die man aus der anderen Dauer eines längsten Tages (15 Stunden) berechnen kann, ebenfalls nur ein *approximativer Wert* ist : ὡς ἔγγιστα.

55. Man vgl. zu dieser ganzen Stelle das folgende Zitat aus J. SOUBIRAN: *Vitruve, De l'architecture, Paris* 1969, *S.* 216: «*La latitude d'Athènes est de* $37^0\,58'$ *(donnée extraite.. de* H. FULLARD *et* H.C. DARBY, *The University Atlas*,[8] London 1958, index)... la valeur vitruvienne correspond à une latitude $36^0\,52'\,11''$... Celle de PLINE (21:16) est sensiblement meilleure (moins d'un demi degré [?] erreur».



ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Grad *mehr* sein.

Aber wir kennen ja aus der Antike auch eine andere solche Verhältniszahl für Athen. PLINIUS behauptet nämlich[56], daß in Athen der Gnomon und sein äquinoktialer Mittagschatten sich zueinander verhielten wie 21:16. – Man sieht sofort, daß dieses Verhältnis dem vorigen nahezu gleichkommt: $21:16 \approx 4:3$ ($16 \times 4 \approx 21 \times 3$). Aber vielleicht ergeben die größeren Zahlen eine bessere Approximation der geographischen Breite? Zur Kontrolle wollen wir auch diesmal nicht unsere Winkelfunktionen heranziehen, sondern wir bedienen uns derselben Berechnungsart wie die Alten. Unsere Ergebnisse sollen keineswegs besser sein als die damals zweifellos möglichen. Wir rechnen also folgendermaßen :

Die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten 21 und 16 wird: $21^2 + 16^2 = 697 \approx 26{,}4^2$. Das Verhältnis der beiden Hypotenusen[56a] 120:26,4 wird dasselbe wie dasjenige der beiden kürzeren Katheten: x:16. Und aus der Proportion $120:26{,}4 = x:16$ bekommt man für die Schattenlänge $x = \frac{120 \times 16}{26{,}4} = 72{,}72...$ Um die Tafel des PTOLEMAIOS benutzen zu können, rechnet man diesmal den Dezimalbruch in Sechzigstel um, also $72{,}72 = 72\ \frac{43}{60}$. Und zum Schluß findet man in der Sehnentafel jener Sehnenlänge gegenüber, die der genannten am nächsten kommt $\left(72\ \frac{38}{60}\right)$, den Bogen von $74\ \frac{1}{2}$ Zentriwinkel, dem ein Peripheriewinkel von $37^0\,15'$ entspricht.

Das Verhältnis des PLINIUS für Gnomon und äquinoktiale Schattenlänge in Athen (21:16) ergibt also in der Tat eine *bessere* Approximation der geographischen Breite der Stelle als die kleineren Zahlen dafür bei VITRUVIUS (4:3). – Man dürfte versuchen, daraus sogleich eine Regel etwa folgendermaßen abzuleiten :

Wird in der antiken Überlieferung das Verhältnis des Gnomons und seiner äquinoktialen Schattenlänge für irgendeinen geographischen Ort verschieden – in größeren und in kleineren Zahlen – angegeben, so ist es von vornherein wahrscheinlich, daß die größeren Zahlen eine bessere Approximation der geographischen Breite des betreffenden Ortes ermöglichen als die kleineren Zahlen.

Ob diese Regel auch in jenem anderen Fall, den wir schon zum Teil

---

56. *Nat. Hist.* VI 215.

56a. Es handelt sich an erster Stelle selbstverständlich um den Hypotenuse-Durchmesser ($120^P$) jenes Kreises, dessen Sehnenlängen in der Tafel des PTOLEMAIOS berechnet sind.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



kennengelernt haben, stichhaltig ist?

Wir haben in einem vorangehenden Kapitel – nach dem Vorbild des PTOLEMAIOS – berechnet, daß der äquinoktiale Mittagschatten eines Gnomons, der 60 Einheiten lang ist, in Rhodos 43 Einheiten lang wird. Es stimmt zwar, daß wir beim Berechnen dieser Länge (43) *die Bruchteile vernachlässigt haben;* aber ob die versuchte Regel auch für diesen Fall gilt, d.h. ergeben auch die Zahlen 60:43 eine bessere Approximation der geographischen Breite von Rhodos als die kleineren Zahlen des VITRUVIUS für dasselbe Verhältnis (7:5)?

Es hätte natürlich wenig Sinn, hier zu fragen, welchen Breitengrad das Verhältnis 60:43 ergibt. Denn wir haben ja die Schattenlänge 43 eben auf Grund jener Annahme berechnet, daß die Polhöhe in Rhodos $36^0$ ist. Auf Grund einer umgekehrten Berechnung würden wir nun in der Sehnentafel des PTOLEMAIOS eben diesen Breitengrad ($36^0$) wiederbekommen. (Übrigens ist diese Breitengrad-Bestimmung sehr zutreffend; man könnte sie höchstens insofern korrigieren, als man sagte: jener Parallelkreis, der *die Mitte der Insel Rhodos durchschneidet,* ist eher $36^0\,15'$ vom Äquator entfernt). – Die Kontrolle in unserem Fall könnte eher darin bestehen, daß man sich fragte: Und welche Polhöhe hätten die Alten auf Grund jener *kleineren Zahlen* berechnen können, die bei VITRUVIUS vorliegen, d.h. 7:5?

Die Hypotenuse des rechtwinkligen Dreiecks mit den Katheten 7 und 5 wäre: $\sqrt{7^2+5^2} = \sqrt{74} = 8{,}60...$, und darum heißt das Verhältnis der beiden Hypotenusen – derjenigen der ptolemäischen Sehnentafel und der anderen im vorliegenden Fall – sowie der kürzeren Katheten: $120:8{,}6 = x:5$. Aus dieser Proportion wird $x = 69{,}76$ bzw. $69\,\frac{45}{60}$. Der ziemlich naheliegenden ptolemäischen Sehnenlänge in der Tafel $69\,\frac{41}{60}$ entspricht ein Zentriwinkel von $71^0$ bzw. ein Peripheriewinkel von $35^0\,30'$. – Wie man sieht, ergibt also das Verhältnis 7:5 in der Tat eine *weniger gute Approximation* als die nach PTOLEMAIOS berechneten größeren Zahlen (60:43), und so hat sich unsere vorhin erprobte Regel auch in diesem Fall bewährt[57].

Es wird sich lohnen, hier auch jene Frage noch ins Auge zu fassen, wie man wohl das Verhältnis des Gnomons zur Länge seines äquinoktia-

---

57. Es darf hier nebenbei erwähnt werden, daß wir für Rhodos auch noch eine dritte Approximation der Breiten-Bestimmung aus der Antike besitzen. In den meisten Ausgaben der PLINIUS-Stelle *Nat. Hist.* VI 214 findet man für Rhodos als äquinoktiales Gnomon-Verhältnis 100:77. Interessanter ist jedoch, daß einige Manuskripte statt dessen *100:74* geben. Diese letztere Variante ergibt nämlich eine überraschend gute Approximation.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



len Mittagschattens in den einzelnen konkreten Fällen festgestellt haben mag.

Denkt man an solche Gnomon-Zahlen, wie im Vorangehenden für Athen 4:3, für Rhodos 7:5 oder auch für Rom 9:8, so wird man durch diese unwillkürlich an die pythagoreischen Zahlenverhältnisse der musikalischen Konsonanzen erinnert. Wie bekannt, bezeichneten die Pythagoreer z.B. die *Oktave* als das Verhältnis 2:1 (διπλάσιον διάστημα), die *Quinte* 3:2 (ἡμιόλιον) und die *Quarte* 4:3 (ἐπίτριτον διάστημα). Ich habe diese Verhältnisse in einem anderen Zusammenhang folgendermaßen erklärt[58] :

Die Konsonanzen entstehen dadurch, daß je zwei musikalische Töne zusammen erklingen. Die Namen lateinischen Ursprungs kommen daher, daß z.B. im Falle der *Quinte* die erste und *fünfte,* im Falle der *Quarte* die erste und *vierte* Saite zusammen ertönen. Die Verhältniszahlen weisen dagegen darauf hin, wie lang je die zwei Saitenabschnitte des Monochords sind, die die entsprechende Konsonanz ergeben. Im Fall der *Quinte* wird z.B. das ganze Monochord, das zuerst ertönt, als eine *3 Einheiten* lange Saite gemessen; den zweiten Ton derselben Konsonanz gibt dagegen ein nur noch *2 Einheiten* langer Abschnitt derselben Saite (also Quinte 3:2). – Im Falle der *Quarte* gilt dasselbe Monochord als eine *4 Einheiten* lange Saite, während den zweiten Ton dieser Konsonanz ein *3 Einheiten* langer Abschnitt vom Monochord ergibt (Quarte 4:3). Die Verhältnisse selber wurden praktisch – um dies am Beispiel der *Quinte* zu illustrieren – etwa folgendermaßen festgestellt:

Nachdem man herausgefunden hatte, wie lang ein jedes der beiden verschiedenen Saitenstücke ist, die zusammen die betreffende Konsonanz ergeben, bestand ihr Messen darin, daß man zunächst die kürzere von der längeren Saite subtrahierte; den Rest, der übrig geblieben war, subtrahierte man im zweiten Schritt von der kürzeren Saite – in der Absicht, den evtl. übrig bleibenden weiteren Rest dann wieder vom vorigen Rest zu subtrahieren. Doch erwies sich die «Wechselwegnahme» der Saitenabschnitte im Falle der Quinte als ziemlich einfach. Der erste Rest ließ sich nämlich von der kürzeren Saite *genau zweimal* subtrahieren, ohne einen weiteren Rest übrig zu lassen. Darum galt das zuletzt ohne Rest subtrahierte Stück als *gemeinsames Maß* beider Saitenabschnitte bzw. als die *Einheit,* mit der man beide Abschnitte – sowohl die längere wie auch die kürzere Saite der Konsonanz – messen kann. In der größeren war diese Einheit *dreimal* und in der kürzeren

---

58. A. Szabó, *Anfänge der griechischen Mathematik,* München-Wien 1969, S. 143 ff. und besonders 169 ff.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



*zweimal* vorhanden; darum wurde das Verhältnis der *Quinte:* 3:2.

*Euklid* benutzt die alte Methode der «Wechselwegnahme» (bezeichnet mit dem terminologisch gebrauchten Verbum ἀνθυφαίρειν) z.B. im Satz *VII 2* der *Elemente,* um den gemeinsamen Teiler zweier Zahlen zu finden. Ich vermute nun, daß auch in der Astronomie bzw. Geographie das Verhältnis des Gnomons und seines Schattens mit dieser Methode festgestellt wurde.

Besonders leicht konnte man die Wechselwegnahme anwenden, solange es sich um *nicht* allzu große Zahlen – wie 4:3, 7:5 und ähnliches – handelte. Aber hat man sich auch dann, als *bessere Approximationen* erstrebt wurden, immer noch des langwierigen Messens der Wechselwegnahme bedient? Man denke etwa an das Gnomon-Verhältnis für Rhodos bei PTOLEMAIOS 60:43. Es wäre wohl gar nicht leicht gewesen, hätte man auch diese Zahlen für die beiden Längen mit Wechselwegnahme finden wollen. Aber hier war auch nicht mehr vom praktischen Finden eines Verhältnisses die Rede. PTOLEMAIOS stellte von vornherein fest, daß sein Gnomon 60 Einheiten lang sein soll, und zu dieser Größe suchte er mit Hilfe der Sehnentafel die fraglichen Schattenlängen.

Wohl anders ist das Gnomon-Verhältnis für Athen bei PLINIUS (21:16) zu beurteilen. Mir kommt es nämlich vor, als läge auch diesem Zahlenpaar das alte Verhältnis (4:3) zu Grunde. Hat man die größeren Zahlen hier nicht etwa auf dem Wege gewonnen, daß man das ganze Verhältnis mit 5 multiplizierte und zu beiden Produkten die Einheit addierte: $(4 \times 5 + 1) : (3 \times 5 + 1)$? In der Tat werden wir später einen solchen Fall des Messens noch näher untersuchen müssen, in dem das Verhältnis des Gnomons zu seinem Mittagschatten sich kaum mit einfacher Wechselwegnahme feststellen ließ.

## *11. Eine vorläufige Zusammenfassung*

Wir wollen hier für einen kurzen Rückblick innehalten.

Es wurde oben («Einleitung», S. 26f. ) darauf hingewiesen, daß wir aus dem Text des KLAUDIOS PTOLEMAIOS wissen, daß die alten Astronomen imstande waren, aus der Verhältniszahl des Gnomons und seines Mittagschattens an Tag- und Nachtgleiche die irdische Breite des betreffenden Ortes zu berechnen. Merkwürdigerweise wird eine solche antike Berechnung dem Leser nirgends vorgelegt. Denn PTOLEMAIOS beschäftigt sich eigentlich *nicht* mit diesem Problem; er zeigt statt dessen die Lösung von drei zwar verwandten, aber umgekehrten Aufgaben[58a].

58a. «Wie berechnet man die Schattenlängen des Gnomons an den Solstitien und an

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Auf der anderen Seite registriert HIPPARCHOS – zweieinhalb Jahrhunderte früher – nur einige *Ergebnisse* von ähnlichen Berechnungen[58b].

Hätten wir nun bloß soviel zeigen wollen, daß HIPPARCHOS in der angedeuteten Berechnung sich wahrscheinlich derselben Methode bedient hat, die auch bei PTOLEMAIOS mindestens beiläufig erwähnt wird, so könnten wir uns mit dem bisherigen begnügen. Denn es wurde ja nachgewiesen, daß man auf Grund der angegebenen Verhältniszahl des Gnomons und mit Hilfe jener Sehnentafel, die im Werk des PTOLEMAIOS vorliegt, eben das von HIPPARCHOS angedeutete Ergebnis erhält. Noch glaubhafter wird dieser Nachweis, wenn man bedenkt, daß HIPPARCHOS in der Tat Sehnentafeln besaß. Ja, es heißt dazu in der Überlieferung, er habe eine wissenschaftliche Arbeit in 12 Büchern darüber verfaßt, wie man die Sehnenlängen im Kreis berechnen kann[59]. Es ist also sehr wahrscheinlich, daß er den Breitengrad (die Polhöhe) für Griechenland tatsächlich auf die eben gezeigte Art berechnet hat.

Aber wir können uns mit diesem Ergebnis dennoch nicht begnügen. Es sieht nämlich auf der anderen Seite so aus, als hätte HIPPARCHOS noch eine *bessere Approximation* als das angedeutete Ergebnis erzielen können. Wie schon oben in der «Einleitung» hervorgehoben wurde, scheinen der Ton der Abhandlung des HIPPARCHOS und seine ganze Ausdrucksweise dafür zu sprechen, daß die angedeuteten Gnomon-Berechnungen gar nicht seine eigenen Ergebnisse waren, sondern daß er bloß auf wissenschaftliche Tatsachen Bezug nehmen wollte, die auch vor ihm schon längst bekannt waren.

Es könnte darum sein, daß die Gnomon-Berechnungen, auf die HIPPARCHOS hinweist, *älteren* Ursprungs sind. N i c h t HIPPARCHOS wäre also der erste gewesen, der die geographische Breite eines Ortes auf Grund des Messen vom Gnomon und seiner Schattenlänge bestimmte. – Allerdings ist dies vorläufig nur eine Vermutung, für die ich noch keinen Beleg beibringen konnte. Denn man behalte doch jene *Chronologie* im Auge, die für den wissenschaftlichen Gebrauch des Gnomons auf Grund des Bisherigen einstweilen gelten soll.

1. Wir haben jenes astronomische Weltbild des Gnomons, das sich für die ganze Interpretation als ausschlaggebend erwies, auf Grund eines VITRUVIUS-Textes rekonstruiert. Diese Textstelle geht in der Tat von der grundlegenden Tatsache aus, daß das Verhältnis des Gnomons und seiner Schattenlänge von der *declinatio caeli* abhängig ist. Aber VI-

---

der Tag- und Nachtgleiche *in der Kenntnis der Polhöhe des betreffenden Ortes?*»

58b. Man vgl. dazu jene ganze Textpassage, die oben, am Anfang der «Einleitung», zitiert wurde.

59. THEON, *Comm. in Alm.* I. cap. 9 ed. HALMA 1.110.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



TRUVIUS lebte doch ein Jahrhundert n a c h HIPPARCHOS. Mit ihm kann man also einen solchen Gebrauch des Gnomons, wie wir ihn für HIPPARCHOS nachgewiesen haben, für die Zeit v o r HIPPARCHOS nicht belegen.

Wir konnten zwar die VITRUVIUS-Stelle für die Erklärung des ANAXIMANDROS sehr wohl verwenden. Aber es wäre verkehrt, wenn man daraus schließen wollte, daß ANAXIMANDROS im 6. Jahrhundert v.Chr. den Gnomon schon «auf dieselbe Weise» benutzte wie HIPPARCHOS im 2. Jahrhundert oder wie VITRUVIUS im letzten Jh. – Die Quellen besagen über ANAXIMANDROS nur soviel, daß er mit dem Gnomon das *Äquinoktium* zeigen konnte. Dies heißt – zumindest meiner Interpretation nach – auch soviel, daß er den *Bogen zwischen den Wendepunkten* erkannte, ja mit dem Halbieren dieses Bogens den *Sonnenstrahl* des Äquinoktiums finden und damit sowohl die *Länge des Mittagschattens* bei Tag- und Nachtgleiche als auch die *Schiefe der Ekliptik* zeigen konnte. – Aber damit ist noch nicht gesagt, daß er den Gnomon auch für die Bestimmung der *Entfernung eines Ortes vom Äquator dem Meridian entlang* (also für die Bestimmung der *geographischen Breite*) hat benutzen können. Es fragt sich, wie weit er die dazu nötigen Begriffe – *Äquator, Parallelkreise* usw. – überhaupt besaß.

2. Es bleibt also einstweilen die Frage offen, seit wann eigentlich der Gnomon in der griechischen Wissenschaft für solche geographischen Messungen benutzt wurde, die wir bisher nur auf Grund des HIPPARCHOS-Textes kennengelernt haben. Es wurde zwar schon ERATOSTHENES erwähnt, der ein Jahrhundert v o r HIPPARCHOS das wichtige Messen eines Meridians eben mit dem Gnomon versuchte. Prinzipiell unterscheidet sich das Messen des Bogens zwischen Alexandria und Syene mit dem Gnomon auch nicht vom Messen der Grade zwischen dem Äquator und einem gegebenen Punkt (einem Meridian entlang) mit demselben Instrument. Aber ERATOSTHENES bediente sich – mindestens in diesem Fall – *keiner Sehnentafel.* Er hat den fraglichen Bogen unmittelbar zum ganzen Kreis gemessen, als er feststellte, daß jener der fünfzigste Teil des vollen Kreises sei. Ebenfalls unmittelbar scheint er den Bogen und den Kreis verglichen zu haben, als er beobachtete – wie PTOLEMAIOS berichtet[60]

---

60. PTOL. I 12. – Es wird sich lohnen, hier noch die folgende Stelle nach T. HEATH (*Aristarchus of Samos,* Oxford 1913. 131-132 n.) zu zitieren: «THEON of Alexandria (*On Ptolemy's Syntaxis,* p. 60) states that ERATOSTHENES discovered the distance between the tropic circles to be 11/83rds of the whole meridian circle = 47° 42′ 40″ (richtiger: 47° 42′ 39″ – A.Sz.), which gives 23° 51′ 20″ for the obliquity of the ecliptic... Another value for the obliquity of the ecliptic is derivable from an *obiter dictum* of PAPPUS (VI 35, p. 546.22-7, ed. HULTSCH). PAPPUS, without any indication of his source, there says that the

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



– daß der Bogen zwischen den Wendepunkten 11/83-ster Teil des Kreises ist. – Es wäre sogar möglich, auch daran zu denken, daß der Gnomon, eben zum Zweck des unmittelbaren Messens von einem Bogen zu einem Kreis, schon von ARISTARCHOS am Anfang des 3. Jahrhunderts durch die *σκάφη (=hemisphaerium)* ergänzt wurde, wie dies VITRUVIUS (IX 8) berichtet[60a].

3. Hätte ERATOSTHENES solche Berechnungen mit dem Gnomon, die vorhin besprochen wurden, überhaupt anstellen können? – Die Forschung der letzten Jahrzehnte hat ihm solche Kenntnisse *nicht* zugetraut. Es ist gewiß lohnend, hier daran zu erinnern, wie man das Problem der sog. «Zonen des ERATOSTHENES» zu beleuchten versuchte. Es ist nämlich bekannt, daß der Geograph ERATOSTHENES die Erdkugel in Zonen eingeteilt hat. Aber wie kam er zu dieser Einteilung? Man schlug dafür die folgende Erklärung vor[61] :

Das empirische Beobachten der Tatsache, daß die Dauer des längsten Tages an verschiedenen Stellen dieselbe ist, habe ihn darauf gebracht, wie er seine Parallelkreise der Erde einteilen soll. Es sei aber *nicht wahrscheinlich,* daß er auf Grund dieser Angaben die Breiten – vom Äquator ab – hätte in Graden berechnen können. Besonders zwei Argumente sprächen dagegen. *Erstens* habe er die Einteilung des Kreises (sowohl des Meridians wie auch des Äquators) in 360 Grade noch *nicht* gekannt. Dies habe erst HIPPARCHOS in die griechische Mathematik eingeführt. Und *zweitens* setze das Berechnen der Breite auf Grund der Dauer des längsten Tages trigonometrische Kenntnisse voraus, die ERATOSTHENES nicht besessen habe.

Es bleibe vorläufig dahingestellt, inwiefern diese Argumentation stichhaltig ist. Soviel ersieht man auf alle Fälle daraus, daß die Frage umso dringender wird, wie alt eigentlich jene Art Berechnungen sind, die sich für HIPPARCHOS unter Ausschluß jeden Zweifels nachweisen ließen. Sollte es nur ein Irrtum sein, wenn die Art und Weise, wie er sich

---

value of the ratio which we should call the tangent of the angle is to 10/23. We should scarcely have expected a ratio between such small numbers to give a very accurate value, but $10/23 = 0{,}4347826$, which is the tangent of an angle of $23^0\,29'\,55''$ nearly.»

60a. (Korrektur-Note) Vgl. oben Anm. 48 a.

61. D.R. DICKS, *The geographical Fragments of Hipparchus*, 1960, 159: «It is quite probable that the empirical fact of the longest days being the same in various places helped ERATOSTHENES to decide the courses of his parallels, but it is very unlikely that he could evaluate latitude in terms of degrees north of the equator by means of these data. In the first place the general division of the circle (and hence of the meridian and the equator) into $360^0$ was unknown to him, being first introduced into Greek mathematics by HIPPARCHUS; and in the second place, the calculation of the latitude from the length of the longest day involves a knowledge of trigonometry, which ERATOSTHENES did not possess.»

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



ausdrückt, uns vermuten läßt, daß ähnliche Berechnungen, auf die er nur hinweist, auch schon lange vor ihm angestellt worden sein müssen? Oder sollte es in der Tat zutreffen, daß ein so bedeutender Mathematiker wie ERATOSTHENES dieselben Berechnungen, die wir für HIPPARCHOS leicht rekonstruieren konnten, noch nicht hätte anstellen können?

Im folgenden versuchen wir, die spärlichen Spuren der wissenschaftlichen Gnomon-Benutzung v o r HIPPARCHOS aufzufinden.

## 12. STRABON

Es wurde vorhin gezeigt, wie HIPPARCHOS aus dem Verhältnis des äquinoktialen Mittagschattens zur Länge des Gnomons (4:3) die geographische Breite für Griechenland ($37^0$) berechnet haben mag. Natürlich verrät dieses Berechnen das *geographische Interesse* unseres Astronomen. Dasselbe Interesse steckt hinter der ganzen Textstelle, die am Anfang dieser Untersuchungen (in der Einleitung) zitiert wurde. «Zunächst scheint mir ARATOS über die geographische Breite im Irrtum zu sein – schrieb dort HIPPARCHOS – wenn er meint, daß sie in den Gegenden von Griechenland zur Folge habe, daß dort der längste Tag zum kürzesten in dem Verhältnis von 5:3 stehe».

Wir haben zwar unsere Aufmerksamkeit bisher nur auf den Gnomon konzentriert, aber selbstverständlich kann man die geographische Breite eines Punktes auf der Erde auch mit der dortigen Zeitdauer des längsten Tages charakterisieren – was wir später noch ausführlicher erörtern werden. Hier erinnere ich an das Problem des längsten Tages durch das eben wiederholte Zitat nur nebenbei und einzig und allein deswegen, weil in der *Geographie* der Alten das κλῖμα eines Ortes, seine Entfernung vom Äquator, meistens *zusammen* mit der Zeitdauer des längsten Tages daselbst erwähnt wird. Und hier müssen wir – um die Gnomon-Untersuchungen weiter fortsetzen zu können – das *geographische Interesse* des HIPPARCHOS näher ins Auge fassen.

In der Tat hob der treffliche Übersetzer C. MANITIUS die «umgestaltende Tätigkeit» des HIPPARCHOS auf dem Gebiet der Geographie mit Nachdruck hervor. Er schrieb dazu:[62] «Als Vertreter der Ansicht, daß die Geographie mit der Astronomie Hand in Hand gehen müsse, trat er (HIPPARCHOS) als Gegner des ERATOSTHENES auf[63]. Von den

62. C. MANITIUS 1894, S. 286.

63. C. MANITIUS selber fügt hier die folgende Fußnote hinzu: «Nach STRABON eine Kritik in 3 Büchern (nämlich gegen ERATOSTHENES – A.Sz.). Vgl. BERGER, *Gesch.d. wissensch. Erdk. d. Gr.*, 3. Abt., S. 130 ff.»

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



tiefeingreifenden Maßregeln, die er auf diesem Gebiete zuerst einführte oder wenigstens dringend empfahl, erwähne ich hier nur die Anwendung der geographischen Längen und Breiten zur Bestimmung der Lage von Orten auf der Erdoberfläche und die Benutzung von Mondfinsternissen zur Bestimmung der Länge.»

Wie zutreffend diese Worte sind, das ersieht man besonders aus dem Werk des «größten» Geographen der Antike, jenes STRABON, der etwa ein Jahrhundert nach HIPPARCHOS lebte, also etwa ein Zeitgenosse des Architekten VITRUVIUS war. Es wird sich lohnen, hier auf einige STRABON-Stellen eben von diesem Gesichtspunkt aus hinzuweisen.

Man liest bei ihm, noch ziemlich am Anfang seines Werkes (C 7): HIPPARCHOS habe – eben in seiner Kritik gegen ERATOSTHENES – betont, daß die Geographie ohne die Kenntnis der Himmelserscheinungen und besonders ohne das In-Evidenz-Halten der κλίματα gar nicht auskommen könnte. Man könnte z.B. *ohne die Breitengrade* – oder wie *Strabon* sich ausdrückt: ohne Berücksichtigung der *Krümmungen* (χωρὶς τῆς διὰ τῶν κλιμάτων ἐπισκέψεως) – gar nicht bestimmen, ob Alexandrien in Ägypten nördlicher oder südlicher als Babylon liegt oder wie groß ihre nord-südliche Entfernung voneinander ist. Ebenso könnte man auch die west-östlichen Entfernungen zweier Stellen voneinander ohne die genauen Beobachtungen der Sonnen- und Mondfinsternisse gar nicht messen. Und dies alles behauptet STRABON unter nochmaligem Hinweis auf HIPPARCHOS.

An einer anderen Stelle (C 12-13) wird zwar der Name HIPPARCHOS nicht ausdrücklich genannt, aber offenbar steht STRABON auch hier unter seinem Einfluß. Ja, er versucht gerade, sich, den Geographen, ihm, dem Astronomen, gegenüber abzugrenzen. Darum behauptet er, daß der Geograph nicht an jeder Stelle so genau die Polhöhen, die gleichzeitigen Auf- und Untergänge der Gestirne und alle himmlischen Erscheinungen zu kennen brauchte. – Wie bekannt, schrieb HIPPARCHOS eben über den Aufgang der Zeichen des Tierkreises sowie über die gleichzeitigen Auf- und Untergänge der Gestirne ein astronomisch-geographisch orientiertes Werk[64]. – Dennoch fügt STRABON dann hinzu: Selbstverständlich könnte man auch sein eigenes (STRABONS) Werk ohne die Kenntnis des Globus, der Parallelkreise und der schiefen Kreise, des Äquators, der Wendekreise, des Horizontes, Tierkreises und überhaupt ohne die Kenntnis der «Mathematik» gar nicht verstehen.

Noch interessanter ist von unserem Gesichtspunkt aus eine andere, prinzipielle Stellungnahme von HIPPARCHOS, die bei STRABON auch zwei-

64. MANITIUS 1894. S. 285 f.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



mal ausführlich zusammengefaßt wird. Es handelt sich das eine Mal (C 71) um das gegenseitige Verhältnis von Kilikien und Indien, und das andere Mal (C 77) um die Lage von Meroë in Äthiopien einerseits und um den südlichen Teil von Indien andererseits. HIPPARCHOS hat nun im ersten Fall betont, daß es nicht möglich sei zu entscheiden, ob die Berge zwischen Kilikien und Indien in der Tat «auf demselben Parallel liegen», da *weder das Verhältnis der Zeitdauer des längsten Tages zu derjenigen des kürzesten noch das Verhältnis des Gnomons zu seiner Schattenlänge* von dem betreffenden Gebiet bekannt sei. – Im Grunde dasselbe wird auch im zweiten Fall gesagt: Da die beiden Gegenden (Meroë in Äthiopien und Indien) so weit voneinander entfernt liegen, könne man die Frage – ob sie einander entsprechen (ἀνταίρειν), d.h. ob sie demselben Parallelkreis angehören – nur in der genauen Kenntnis der κλῖμα – Verhältnisse entscheiden. Es geht glücklicherweise aus der Fortsetzung des Textes eindeutig hervor, worin die bessere Kenntnis dessen, was hier mit dem Wort κλῖμα angedeutet ist, bestünde. Man müßte nämlich *«die Verhältnisse des Gnomons zu den Sonnwendschatten und zu den Nachtgleichschatten kennen»* (λέγειν δὲ καὶ τοὺς λόγους τοῦ γνώμονος πρὸς τε τὰς τροπικὰς σκιὰς καὶ τὰς ἰσημερινάς).

In der Tat kann man die geographische Breite eines Ortes – seine Entfernung vom Äquator oder anders gesagt: seine *Krümmung*, das κλῖμα – wie wir gesehen haben, am leichtesten aus der äquinoktialen Verhältniszahl des Gnomons oder aus einer der beiden ähnlichen Gnomon-Zahlen (zur Zeit der Sonnenwenden) berechnen – wenn man nicht die Polhöhe des betreffenden Ortes in einer sternhellen Nacht unmittelbar mißt. – Man fragt sich höchstens: Warum genügt es denn nicht auch, nur eine einzige solche Gnomon-Zahl anzugeben? Warum hebt das vorige Zitat die Verhältnisse des Gnomons *sowohl zu den Sonnwendschatten wie auch zu den Nachtgleichschatten* hervor?

Es wurde ja vorhin behandelt, wie HIPPARCHOS aus einer *einzigen* Verhältniszahl des äquinoktialen Mittagschattens die Breite für Griechenland berechnet hatte. Außerdem hat auch PTOLEMAIOS gezeigt (II 5), daß man aus einer *einzigen* solchen Gnomon-Zahl die beiden anderen leicht berechnen kann. Die hervorgehobene Frage ist also keineswegs müßig.

Aber bevor wir eine Antwort auf diese Frage suchen, wollen wir an dieser Stelle einen kleinen Exkurs machen. Ich muß nämlich hier an ein interessantes Kapitel bei PTOLEMAIOS erinnern, das für nicht weniger als 24 geographische Orte der Reihe nach alle drei miteinander auf das engste zusammenhängende Gnomon-Zahlen mit peinlicher Sorgfalt registriert.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



*13. Vom Äquator bis zum Nordpol*

Es ist das Kapitel 6 des II. Buches von PTOLEMAIOS: «Feststellung der von Parallel zu Parallel eintretenden charakteristischen Kennzeichen» (ἔκθεσις τῶν κατὰ παράλληλον ἰδιωμάτων).

Man liest in diesem Kapitel für 39 laufend numerierte Parallelkreise – vom Äquator an bis zum Nordpol – in nahezu stereotyper Reihenfolge die sog. «Kennzeichen» (ἰδιώματα). Diese sind :

a ) die Dauer des längsten Tages, die für den Parallel charakteristisch ist;

b ) die Entfernung vom Äquator und die Benennung irgendeines bekannten geographischen Ortes, über den der betreffende Parallel hinweggeht;

c ) die Richtung und die Länge der Schatten daselbst, sowohl bei Tag- und Nachtgleiche wie auch bei Sommer- und Winterwende – immer im Verhältnis zu einem $60^{p}$ langen Gnomon.

Es heißt im Text :

«Wir beginnen mit dem direkt unter dem Äquator verlaufenden Parallel, der so ziemlich die südliche Grenze des ganzen Kugelviertels bildet, über welches sich das zur Zeit bewohnte Gebiet der Erde erstreckt. *Nur auf diesem Parallel sind die Tage und die Nächte alle einander gleich, weil nur in diesem Fall sämtliche an der Sphäre mit dem Äquator gleichlaufenden Kreise vom Horizont halbiert werden...*»

Hier hätte es noch kaum einen Sinn, die «Entfernung vom Äquator» zu erwähnen. Auch die «Richtung der Schatten» und die «Länge des äquinoktialen Schattens» kann sozusagen nur prinzipiell behandelt werden; als Konkreta kommen nur die Sommer- und Winterwendschatten in Betracht.

«Dieser Parallel ist z w e i s c h a t t i g. Zweimal kommt die Sonne für die unter ihm liegenden Orte (in den Schnittpunkten der Ekliptik mit dem Äquator) in den Zenit, so daß nur zu diesen Zeitpunkten die Gnomone zur Mittagstunde *schattenlos* werden. Während aber die Sonne den nördlichen Halbkreis der Ekliptik durchwandert, zeigen die Schatten der Gnomone die Richtung nach Süden; durchwandert dagegen die Sonne den südlichen Halbkreis, so zeigen die Schatten die Richtung nach Norden. Dort ist sowohl der Sommer- wie auch der Winterwendschatten gleich $26\ ½^{p}$ in dem Maße, in welchem der Gnomon $60^{p}$ beträgt.»

Es wird dann noch – um Mißverständnisse zu vermeiden – hinzugefügt:

«Wenn wir von Schatten sprechen, so meinen wir allgemein diejenigen, die zur *Mittagstunde* eintreten. Der wahre Eintritt der Nacht-

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



gleichen und Wenden muß sich zwar durchaus nicht gerade zur Mittagstunde vollziehen, aber die Differenzen der Schattenlängen sind ganz unbeträchtlich (wenn der Eintritt zu anderer Zeit erfolgt).»

Es werden nach dieser – eher nur theoretisch und weniger praktisch – interessanten Charakterisierung des ersten Kreises noch drei kurze Bemerkungen über die Sterne vorausgeschickt, die für alle Parallelen gültig sind. (Welche Sterne von Parallel zu Parallel in den Zenit kommen, welche sind die Sterne des immersichtbaren und welche die des immerunsichtbaren Kreises). Erst dann beginnt PTOLEMAIOS die nach Nummern fortlaufende Aufzählung der übrigen Parallelen.

Nach der Nummer des Parallelkreises wird gewöhnlich zuallererst gesagt, wieviel Äquinoktialstunden dort die Dauer des längsten Tages ausmacht. Vom 2. bis zum 25. Kreis einschließlich macht die Tageslänge von Parallelkreis zu Parallelkreis jeweils eine Viertelstunde mehr aus. Beim 2. Kreis ist der betreffende Tag des Jahres nur 12 Stunden 15 Minuten, beim 25. dagegen schon 18 Stunden lang. Diese regelmäßige Zunahme der Zeitdauer war eben jener Gesichtspunkt, nach dem die Parallelen gezogen wurden.

Mit der Zunahme der Zeitdauer des längsten Tages wächst die Entfernung vom Äquator *nicht* in arithmetischer Progression. Dafür hier nur die folgenden Beispiele :

a.) Wie gesagt, nimmt vom 2. zum 3. Parallelkreis die Zeit des längsten Tages um eine 1/4 Stunde zu; die Entfernung vom Äquator wächst dabei von $4^0\,15'$ auf $8^0\,25'$; der Unterschied der beiden Entfernungen ist also *$4^0\,10'$*.

b.) Doch wächst der Entfernungs-Unterschied vom 3. Parallelkreis zum 4. nur noch um *$4^0\,5'$* – von $8^0\,25'$ auf $12^0\,30'$ – während der zeitliche Unterschied des längsten Tages wieder um eine 1/4 Stunde mehr ist.

c.) Einer zeitlichen Zunahme des längsten Tages um eine Viertelstunde entspricht zwischen dem 24. und 25. Parallelkreis nur noch eine um $1^0$ größere Entfernung vom Äquator, also eine Zunahme von $57^0$ auf $58^0$.

Vom 25. Kreis bis zum 29. einschließlich beträgt die zeitliche Zunahme des längsten Tages von Parallel zu Parallel je eine halbe Stunde, während die Entfernung vom Äquator zweimal um je anderthalb Grad ($1\ ½^0$) und zweimal um je $1^0$ zunimmt ($58^0$, $59^0\,30'$, $61^0$, $62^0$, $63^0$).

Um den 30. Parallelkreis herum hat der längste Tag schon 21 Äquinoktialstunden, und der Abstand vom Äquator beträgt $64^0\,30'$. Dieser Kreis geht – wie der Verfasser bemerkt – über *unbekannte skythische Völkerschaften* hinweg. – Noch für drei weitere Parallelkreise (31., 32.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



und 33.) wird die Zunahme der Tageslänge um je eine Äquinoktialstunde ($1^h$) registriert, wobei das Größerwerden der Entfernung des Parallelkreises vom Äquator plötzlich auf eine Zunahme von bloß einem halben Grad ($1/2^0$) sinkt, ja beim Übergang vom 32. zum 33. Kreis bloß noch um einen Abstand von 8′ 40′′ mehr wird. Beim letzteren Parallelkreis (33.) hat der längste Tag schon volle 24 Äquinoktialstunden. «Er ist der erste von den *ringsschattigen* Parallelen. Da nämlich dort zur Zeit der Sommersonnenwende die Sonne *nicht* untergeht, so schlagen die Schatten der Gnomone, allerdings nur zu dieser Zeit, die Richtungen nach allen Seiten des Horizontes ein.»

Nach der Schilderung der Charakteristika dieses Parallelkreises (33.) führt PTOLEMAIOS zu den noch übrigen mit der folgenden Bemerkung über :

«Wenn man nun – aus rein theoretischen Gründen – auch für die noch nördlicheren Breiten einige besonders charakteristische Eigenschaften in Betracht ziehen möchte, so dürfte man zu den folgenden Ergebnissen gelangen.»

Als auffallendes Merkmal der noch übrigen sechs Parallelkreise dürfte gelten, daß bei diesen der längste Tag des Jahres der Reihe nach einen ganzen Monat, zwei, drei, vier, fünf und schließlich sechs volle Monate dauert. Die Schilderung des letzten diesbezüglichen Abschnittes beginnt bei PTOLEMAIOS so :

«Wo die Erhebung des Pols die vollen $90^0$ des Quadranten beträgt, dort gelangt der nördlich des Äquators liegende Halbkreis der Ekliptik in seiner ganzen Ausdehnung niemals u n t e r den Horizont und der südlich des Äquators gelegene Halbkreis niemals ü b e r den Horizont. Infolgedessen gibt es hier Jahr für Jahr nur e i n e n Tag und e i n e Nacht, beide von sechsmonatiger Dauer, und die ganze Zeit sind die Gnomone ringsschattig.»

Doch fassen wir jetzt wieder unser wichtigstes Anliegen, die Gnomon-Zahlen, ins Auge.

Es wurde schon gesagt, daß beim ersten Kreis, bei demjenigen unmittelbar unter dem Äquator, nur der gleichlange Sommer- und Winterwendschatten registriert wird. Der letzte Kreis dagegen, bei dem alle drei Schattenlängen erwähnt werden, ist der 25. Bei dem darauffolgenden, dem 26., erklärt PTOLEMAIOS :

«Von der Zunahme der längsten Tageszeit um eine Viertelstunde haben wir hier abgesehen, erstens, weil die Parallelkreise bereits sehr nahe aneinanderrücken und der Unterschied der Polhöhen keinen ganzen Grad mehr ausmacht, zweitens, weil wir bei den noch weiter nördlich liegenden Parallelen *eine gleich sorgfältige Behandlung nicht für*

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



*angezeigt halten. Deshalb haben wir es auch für überflüssig gehalten, die Verhältnisse der Schattenlängen wie bei örtlicher Begrenzung weiter anzugeben.»*

## *14. Zwei Beispiele aus den 39 Kreisen*

Wir wollen nun – nach diesem ausführlichen Überblick über den allgemeinen Inhalt des betreffenden Kapitels im *Almagest* (II 6) – hier noch zwei Beispiele dafür zitieren, wie die volle Charakterisierung je eines Parallelkreises aussieht. (Diese werden uns sogleich auch Gelegenheit bieten, unsere historischen Betrachtungen weiterzuführen und zu vertiefen). Man liest nun das eine Mal bei PTOLEMAIOS :

«Der *fünfzehnte* Parallelkreis ist derjenige, auf welchem der längste Tag 15 ½ Äquinoktialstunden hat. Er hat vom Äquator $45^0\,1'$ Abstand und geht m i t t e n d u r c h d e n P o n t u s. Dort ist in dem Maße, in welchem der Gnomon $60^p$ ist, der Sommerwendschatten $23\,¼^p$, der Nachtgleichschatten $60^p$ und der Winterwendschatten $155^p5'$.»

Ich glaube, es wird jeder sofort einsehen, daß der äquinoktiale Mittagschatten eines $60^p$ langen Gnomons auf dem Parallelkreis, der vom Äquator $45^0$ entfernt ist, ebenfalls $60^p$ sein *muß*. Denn man überlege sich nur, was in diesem Fall die angegebene Entfernung ($45^0$) vom Äquator heißt. – Man denke an die vorhin gezeigte *Fig. 7.* (oder auch an *Fig. 9.*); hier soll der Winkel $\varphi = 45^0$ sein. Da jedoch der Gnomon und sein Schatten zusammen mit dem dazugehörigen Sonnenstrahl ein *rechtwinkliges Dreieck* bilden, kann auch der andere spitze Winkel des Dreiecks nur $45^0$ sein. Und da in jedem Dreieck *gleichen Winkeln gegenüber gleiche Seiten* liegen, muß der Mittagschatten des Gnomons beim Äquinoktium ebenso lang sein wie der Gnomon selber. (Man könnte sich eher fragen, warum PTOLEMAIOS den 15. Parallelkreis *nicht* genau auf $45^0$, sondern auf $45^0\,1'$ gesetzt hat. Doch auf diese Frage wollen wir hier noch nicht eingehen.)

Wurden nun die drei Schattenlängen in allen 24 Fällen des PTOLEMAIOS – vom 2. Parallel angefangen bis zum 25. einschließlich – etwa *beobachtet* und aus ihnen die dazugehörigen Breitengrade berechnet? – Keineswegs! Die Formulierung selber zeigt, daß es – zumindest in den ersten 33 Fällen – *die Zeitdauer des längsten Tages* war, nach der man festlegte, wo je ein Parallelkreis zu ziehen sei. Das heißt, man ließ die Dauer des längsten Tages um je eine Viertelstunde, halbe Stunde, Stunde usw. zunehmen, und zu den so festgelegten Tageslängen der Sommerwende berechnete man die entsprechenden Breitengrade, also

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



die Entfernung der betreffenden Stelle vom Äquator. Die Breitengrade gehen bei PTOLEMAIOS also (den Schattenlängen des Gnomons) voran. Zu den schon im voraus festgestellten Breitengraden sowie zu einem immer $60^P$ langen Gnomon berechnete man *nachträglich* die dazugehörigen drei Schatten. Das vorangehende Kapitel II 5 bei PTOLEMAIOS zeigt eben – was auch oben schon behandelt wurde – wie man in der Kenntnis des Breitengrades und der Gnomonlänge die drei Schatten gewinnen kann. Auch daraus ersieht man, daß die Gnomon-Schatten bei PTOLEMAIOS keine wichtige Rolle mehr spielen. Sie werden eigentlich nur noch *um ihrer selbst willen* berechnet. – Ursprünglich muß es natürlich gerade umgekehrt gewesen sein: Man beobachtete und maß sorgfältig die Schatten des Gnomons, und aus diesen berechnete man die geographischen Breiten – oder auch die Zeitdauer des längsten Tages.

Aber wozu brauchte man eigentlich alle *drei* Gnomon-Schatten, die beiden der Sonnenwenden und die dritte Länge des Äquinoktiums, da diese sich sowieso gegenseitig bestimmen? – Nun, ich glaube, daß die Gewohnheit, alle drei Längen zusammen zu registrieren, zum Teil wohl nur eine *Tradition* war. Nachdem man ursprünglich – in der Zeit also, in der die Ekliptikschiefe gerade erkannt wurde – die dritte Länge, diejenige des Mittagschattens der Nachtgleiche – aus den beiden anderen berechnet hatte, gewöhnte man sich gewissermaßen daran, alle drei Angaben zusammengehen zu lassen. Andererseits erleichterte aber auch das Zusammenstehen der drei Längen die gegenseitige *Kontrolle* der Berechnungen.

Außerdem muß ich hier, anläßlich des zuletzt angeführten Zitates aus dem Text des PTOLEMAIOS, noch ein Problem berühren, das erst im zweiten Teil dieses Buches eingehender erörtert werden kann. – Liest man nämlich bei PTOLEMAIOS die Schilderungen der einzelnen Parallelkreise hintereinander, so sieht man sogleich, wie dieser Verfasser gearbeitet hat. Er zog seine Parallelen – vor allem die ersten 25, die für ihn besonders wichtig waren, – *auf Grund der Zeitdauer des längsten Tages.* Die Breitengrade wurden nachträglich zu der Zeitdauer dieses Tages berechnet.

Darum sind auch die in Graden ausgedrückten Breiten (die Entfernungen der aufeinanderfolgenden Kreise vom Äquator) nur selten runde Zahlen. Der 13. Parallel ist z.B. nicht $41^0$, sondern nur $40^0\,56'$, und der 18. Parallel hat einen Abstand von $50^0\,4'$ vom Äquator. Die Berechnungen erfolgten nach Kapitel *II 3*, dessen Titel heißt: *«Wie sich aus der Dauer des längsten Tages die Polhöhe berechnen läßt, und umgekehrt».*

Und nachdem die Polhöhe (= geographische Breite) auf Grund des längsten Tages festgestellt worden war, berechnete man aus dieser weiter

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



die dazu gehörigen drei Schatten des $60^{p}$ langen Gnomons. – Dies war aber keineswegs die ursprüngliche Reihenfolge der Berechnungen. Denn was hätte es für einen Sinn – für die Geographie oder die Astronomie –, nachdem sowohl die Zeitdauer des längsten Tages auf irgendeinem Punkt der Erde als auch die genaue Entfernung der fraglichen Stätte vom Äquator in Graden und Minuten schon bekannt waren, auch noch zu wissen, wie lang dort die drei Mittagschatten des Gnomons sind. – Welches ist der Sinn dieser Umkehr der Berechnungen? – Wir wollen auf diese Frage erst im zweiten Teil des vorliegenden Buches zurückkommen.

*

Als zweites Beispiel wollen wir jene Worte zitieren, in denen PTOLEMAIOS den 13. Parallel schildert. Aber bevor ich diese Sätze anführe, möchte ich hier zuerst jene Vermutung aussprechen, wonach dieses ganze Kapitel (*II 6: «Feststellung der von Parallel zu Parallel eintretenden charakteristischen Kennzeichen»)* im Grunde wahrscheinlich *unmittelbar auf HIPPARCHOS zurückgeht.* Für diese Vermutung habe ich zunächst die folgenden Argumente :

STRABON (C 132) berichtet, daß HIPPARCHOS die Abweichungen in den Himmelserscheinungen vom Äquator angefangen bis zum Nordpol hinauf registriert habe. Dies kann kaum etwas anderes gewesen sein als die Schilderung des PTOLEMAIOS in dem betreffenden Kapitel (II 6). – Ja, wir können auch sogleich zeigen, daß mindestens in *einem* Punkt HIPPARCHOS im wesentlichen dasselbe gesagt haben muß, was auch bei PTOLEMAIOS vorliegt. Man lese nämlich noch einmal die oben in der «Einleitung» schon zitierten Worte des HIPPARCHOS :

«Wo... der längste Tag zum kürzesten in dem Verhältnis von 5:3 steht, dort hat der längste Tag eine Dauer von 15 S t u n d e n, während die P o l h ö h e u n g e f ä h r $41^{0}$ beträgt. Demnach ist klar, daß in den Gegenden von Griechenland das letztgenannte Verhältnis des längsten Tages zum kürzesten unmöglich stattfinden, vielmehr nur für die G e g e n d e n a m H e l l e s p o n t gelten kann.»

Mit diesen Worten begann HIPPARCHOS die Korrektur der Behauptung des ARATOS-EUDOXOS. Aber man vergleiche mit dem eben angeführten Zitat einstweilen nur das folgende bei PTOLEMAIOS :

«*Der 13. Parallel* ist derjenige, auf welchem der längste Tag 15 Ä q u i n o k t i a l s t u n d e n hat. Er hat v o m Ä q u a t o r $40^{0}\,56'$ A b s t a n d und geht durch den H e l l e s p o n t etc. etc.»

Es geht aus dem Vergleich sogleich auch hervor, warum HIPPAR-



ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



CHOS nur von «*ungefähr 41*⁰» sprach. Dasselbe Ergebnis liegt bei PTOLEMAIOS genauer berechnet vor.

Und so werde ich später zeigen, daß das bei PTOLEMAIOS über HIPPARCHOS Berichtete vermutlich auf noch ältere Quellen zurückgeht. Aber hier muß ich zunächst auf eine Passage in dem verlorenen Werk des HIPPARCHOS aufmerksam machen, die PTOLEMAIOS fortgelassen hat.

### *15. Ein Unterschied zwischen HIPPARCHOS und PTOLEMAIOS*

Das astronomische Werk des PTOLEMAIOS verweist – anläßlich der Schilderung der von Parallel zu Parallel eintretenden Veränderungen – auf die *Geographie* nur insofern, als bei den einzelnen Parallellen nebenbei auch gesagt wird, über welches Gebiet der betreffende Kreis hinweggeht. Der 10. Parallel geht z.B. mitten über Phönizien, der 11. über Rhodos und der 12. über Smyrna hinweg. Aber es wird dabei die Entfernung dieser Gebiete vom Äquator und voneinander *in Stadien nicht berücksichtigt.*

Dagegen hat HIPPARCHOS – wie wir aus STRABON (C 132) wissen – einen größten Kreis der Erde in 360 Grade eingeteilt, wobei er *die Entfernung von einem Grad 700 Stadien in nord-südlicher Richtung* gleichsetzte und so die von Parallel zu Parallel eintretenden Veränderungen zwischen dem Äquator und dem Nordpol registrierte.

Es scheint nun, daß in der geographischen Literatur die in Stadien angegebenen Entfernungen der einzelnen Gebiete voneinander (immer in nord-südlicher Richtung) – für die wohl HIPPARCHOS das maßgebliche Vorbild war – durch die astronomisch fachgemäßeren Breitengrad-Bestimmungen ersetzt werden konnten. Man denke z.B. an das folgende Zitat aus dem Werk des STRABON (C 134) :

«Der längste Tag auf dem Gebiet südlich von Rom und nördlich von Neapel hat 15 Äquinoktialstunden; dieser Parallelkreis ist etwa 7000 Stadien nördlicher als derjenige, der über Alexandria in Ägypten hinweggeht, und er ist mehr als 28.800 Stadien vom Äquator entfernt; er verläuft etwa 3.400 Stadien höher als der Parallelkreis von Rhodos etc.etc.»

Wir können diese Angaben auch sogleich kontrollieren – zumindest was ihre Konsequenz betrifft.

Man könnte damit beginnen, was schon im vorigen Kapitel erwähnt wurde: Der *dreizehnte Parallel* der Alten war derjenige, auf dem der längste Tag – wie auch im vorliegenden Fall – *15 Äquinoktialstunden hat.* Nach PTOLEMAIOS (II 6) hat dieser Kreis vom Äquator *40⁰ 56´*

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



*Abstand.* – Wir können hier, der Einfachheit halber, mit 41⁰ rechnen, wie es auch HIPPARCHOS in seiner Kritik gegen ARATOS und EUDOXOS getan hat.

Wir kennen außerdem aus VITRUVIUS (s. oben S. 47 ) das äquinoktiale Gnomon-Verhältnis sowohl für Rom (9:8) wie auch für Alexandria (5:3); übrigens kennt auch STRABON dieselben Verhältnisse, siehe z. B. für Alexandria: C 133. Man könnte auch aus diesen Verhältniszahlen die geographischen Breiten sowohl für Rom wie auch für Alexandria – nach derselben antiken Methode, die vorhin schon mehrmals gezeigt wurde – berechnen. Man bekäme auf diese Weise für Rom 41⁰ 30′,[65] und für Alexandria 31⁰. – Ungefähr dasselbe Ergebnis bekommt man auch, wenn man in Stadien rechnet. Da ein Grad 700 Stadien ausmacht, müssen die etwa 10 Grade zwischen den Parallelkreisen von Rom und Alexandria (d.h. bloß die nord-südliche Entfernung gerechnet) in der Tat 7000 Stadien entsprechen. – Die Tatsache, daß STRABON die Entfernung des betreffenden Gebietes vom Äquator auf *«mehr als 28.800 Stadien»* schätzt, ist allerdings nicht völlig konsequent. Liegt nämlich Rom (nach antiker Berechnung) etwa um die Breite 41⁰ 30′, so sind dies nach der Schätzung der Alten mehr als 28.700 Stadien. Nun redet STRABON aber doch von einem Gebiet *südlich* von Rom. Man würde demnach eher eine Formulierung erwarten wie etwa: *weniger als 28.700 Stadien vom Äquator entfernt.* – Die Entfernung von Rhodos[66] wurde dann – nach antiken Maßstäben – wieder etwas konsequenter und realistischer geschätzt[67].

Aber es kommt ja hier sowieso nicht auf die Genauigkeit der antiken Messungsergebnisse an. Es interessieren uns vielmehr das Prinzip und die Methode, nach denen die Alten diese Entfernungen berechnet haben.

Es ist nun auffallend, daß STRABON die Entfernungen der Parallelkreise vom Äquator *niemals in Graden angibt.* Auch jener *fortlaufenden Numerierung* der immer kleiner werdenden Kreise, der 39 Parallelen vom Äquator ab bis zum Nordpol, die wir durch PTOLEMAIOS kennengelernt haben, bedient er sich nie. Außer dem Äquator nennt er nur die beiden Wendekreise und im Norden den arktischen Kreis. Die übrigen Parallelen bezeichnet er nur mit den Namen jener Ortschaften, über die diese hinweggehen; manchmal erwähnt er auch ihre Entfernungen – *aber*

---

65. Nach heutigen Maßstäben beinahe 42⁰.

66. Über Rhodos siehe oben S. 47.

67. Weniger beruhigend finde ich den Abschluß desselben Zitates bei STRABON. Da jedoch das Problem «Byzantion und Massalia» später sowieso noch behandelt wird, habe ich dies hier einstweilen fortgelassen.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



*nur in Stadien* – vom Äquator oder von einem anderen besser bekannten Ort (mit seinem Parallel) ab. – Die Zeitdauer des längsten Tages wird bei den einzelnen Parallelen gewöhnlich registriert und ebenso das Verhältnis des äquinoktialen Mittagschattens zum Gnomon, *aber nie wird angedeutet, daß man aus der letzteren Angabe – also aus der Gnomon-Zahl – auch etwas berechnen kann.* Hätten wir *nur* den STRABON-Text – und nicht zum Vergleich auch noch das, was man aus HIPPARCHOS und PTOLEMAIOS über den Gnomon lernen kann –, so wäre wohl nicht leicht zu erraten, wozu überhaupt die Gnomon-Zahlen so sorgfältig festgehalten wurden oder inwiefern diese eigentlich für die geographische Lage eines Ortes charakteristisch sein können? Ja, ich frage mich, ob STRABON aus einer solchen Gnomon-Zahl den Breitengrad überhaupt selbständig hätte berechnen können. – Ich halte dies *nicht* für wahrscheinlich. – Aber wir werden auf diese Frage im zweiten Teil des vorliegenden Buches noch zurückkommen.

*

Am Ende dieses Kapitels möchte ich noch eine Frage wenigstens beiläufig berühren. Ich habe nämlich vorhin vermutet, daß das Kapitel II 6 bei PTOLEMAIOS *(«Feststellung der von Parallel zu Parallel eintretenden charakteristischen Kennzeichen»)* im Grunde auf HIPPARCHOS zurückgeht. Ja, ich habe den *13. Parallel* von PTOLEMAIOS hervorgehoben, zu dem sich die sozusagen identischen Worte des HIPPARCHOS zitieren ließen. Aber man beachte dazu auch noch das Folgende :

Es gibt bei PTOLEMAIOS insgesamt 39 Parallelkreise, von denen er die ersten 25 nach jenem Prinzip gezogen hat, daß die Dauer des längsten Tages von Parallel zu Parallel um je eine Viertelstunde zunehmen soll. – Auch dieses Prinzip der Einteilung der Parallelen nach dem Zunehmen der Zeitdauer des längsten Tages um je eine Viertelstunde scheint von HIPPARCHOS zu stammen. Auch bei STRABON folgen die Parallelkreise nach demselben Prinzip aufeinander; so erwähnt er z.B. (C 134) offenbar nach HIPPARCHOS eben jenen Kreis, auf dem der längste Tag 15 ¼ Äquinoktialstunden hat, und unmittelbar danach den nächsten darauffolgenden Parallel mit einem längsten Tag von 15 ½ Stunden.

Auf der anderen Seite scheint jedoch HIPPARCHOS auch eine andere Einteilung der Parallelkreise gekannt zu haben. Denn wieder STRABON (C 132) berichtet, daß er (HIPPARCHOS) in seiner Schilderung der Himmelserscheinungen auf dem Meridian Meroë-Alexandria *vom Äquator ab schrittweise um je 700 Stadien (also um je 1⁰) nach Norden zu ging.* Gesetzt, daß er auf diese Weise in der Tat von Grad zu Grad zum Nord-

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



pol gelangte, dann müßten seine Parallelkreise zahlreicher als 39 gewesen sein. – Und man liest in der Tat bei HIPPARCHOS – an jener Stelle, die oben in der «Einleitung» zitiert wurde –, daß in Griechenland die Polhöhe ungefähr 37° beträgt und der längste Tag eine Dauer von 14 3/5 Stunden hat. – Aber einen solchen «Parallel» (mit dieser Dauer des längsten Tages) gibt es bei PTOLEMAIOS überhaupt nicht, zumal sein «11. Parallel» 36° Abstand vom Äquator hat (Rhodos, längster Tag 14 ½ Äquinoktialstunden) und sein «12. Parallel», derjenige von Smyrna, schon 38° hat, mit einem längsten Tag von 14 ¾ Stunden.

## *16. Das Vorbild des HIPPARCHOS*

Ich habe am Ende eines früheren Kapitels *(11. Eine vorläufige Zusammenfassung)* das Ziel gesetzt, daß wir versuchen wollten, die spärlichen Spuren der wissenschaftlichen Gnomon-Benutzung v o r HIPPARCHOS aufzufinden. Dieser Zielsetzung bin ich bisher *nicht* nachgekommen. Die seitdem erwähnten Gnomon-Benutzungen – bei STRABON und PTOLEMAIOS – sahen eher so aus, als ob man sie alle eben auf HIPPARCHOS zurückführen müßte. Wo gibt es einen Beleg dafür, daß der Gnomon für geographische Breiten-Bestimmung auch v o r HIPPARCHOS schon ebenso benutzt wurde?

Nun glaube ich zwar vor allem, daß jenes oben angeführte Zitat[68], wonach HIPPARCHOS als ein «Gegner des ERATOSTHENES» auftrat, indem er die Ergebnisse der Astronomie auch in der Geographie zur Geltung bringen wollte, zum Teil *irreführend* ist. – Ohne Zweifel schrieb HIPPARCHOS eine scharfe gegen ERATOSTHENES gerichtete Kritik in drei Büchern. (In drei anderen Büchern schrieb er einen kritischen Kommentar auch gegen ARATOS und EUDOXOS. Ja, das letztere Werk von ihm ist auch erhalten geblieben). Aber das ändert wohl nichts daran, daß das große Vorbild des HIPPARCHOS, eben in der Geographie, der scharf kritisierte ERATOSTHENES war. Dies wird nicht bloß aus sekundären Zeichen erschlossen. Es gibt auch konkrete Belege dafür, daß HIPPARCHOS selber in manchen Fällen die Ergebnisse des ERATOSTHENES *für sehr gut hielt* und diese auch ohne Bedenken übernehmen konnte.

Man lese z.B. jene Stelle bei STRABON nach (C 62), an der der Geograph einiger «wissenschaftlichen Verdienste» des ERATOSTHENES mit Anerkennung gedenkt, wobei – wie es heißt – manches bei ERATOSTHENES noch übrigbleibt, was man zurechtzustellen hätte. Es wird vor

68. Vgl. oben Anm. 62 und 63.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



allem gebilligt, daß nach ERATOSTHENES die mathematischen und physikalischen Grundsätze in der Geographie berücksichtigt werden sollen. (HIPPARCHOS hat dieselben Prinzipien, nur in noch höherem Maße, zur Geltung zu bringen versucht.) Auch darin, was die Kugelgestalt der Erde betrifft und daß sie rundherum bewohnt sei, habe ERATOSTHENES recht und ebenso in manchen ähnlichen Fragen – gibt STRABON großmütig zu. Ob freilich auch seine Erdvermessungen zutreffend waren, das bleibe dahingestellt – fügt er noch hinzu. Die Späteren hätten diese seine Ansichten *nicht* gebilligt und die Berechnungen von ihm *nicht* übernommen. Aber HIPPARCHOS habe auf alle Fälle – schreibt STRABON weiter, und dies ist gerade die Bemerkung, die ich mit Nachdruck hervorheben möchte – dieselben Entfernungen wie ERATOSTHENES auf dem Meridian Meroë-Alexandria-Borysthenes aufgenommen, als er nämlich die Erscheinungen registrierte, die man von Ort zu Ort beobachten kann; ja, HIPPARCHOS habe auch behauptet, daß die Angaben – die er bei ERATOSTHENES vorgefunden hatte – *von der Wirklichkeit kaum abweichend seien* (C 62).

Es sei in diesem Zusammenhang vor allem betont, daß STRABON an der genannten Stelle offenbar von jenem Kapitel bei HIPPARCHOS spricht, dessen Entsprechung wir aus dem Werk des PTOLEMAIOS schon kennengelernt haben: II 6: *«Feststellung der von Parallel zu Parallel eintretenden charakteristischen Kennzeichen»*. Höchstens hat HIPPARCHOS in dem betreffenden Kapitel außer den drei wichtigen Angaben (a. längster Tag; b. Entfernung vom Äquator; c. Gnomon-Schatten) auch noch die für die einzelnen Parallelen bezeichnenden Gestirn-Auf- und Untergänge registriert.

Beachtenswert ist nun die Bemerkung, daß HIPPARCHOS – nach dem Vorbild des ERATOSTHENES – jene Veränderungen, die man von Parallel zu Parallel beobachten kann, einem *Meridian entlang* registriert hatte. Selbstverständlich wußte man auch in der Antike, daß die *geographischen Längen* auf irgendeinem Parallelkreis und die *Breiten* auf einem *Meridian* aufzunehmen sind, wie dies STRABON einmal auch den Laien erklärt (C 85). Die Frage, ob es einen Meridian «Meroë-Alexandria-Borysthenes» überhaupt gibt, gehört auf ein völlig anderes Blatt. Versuchte man nämlich auf einer Karte oder auf einem Globus die Nord-Süd-Linie nach den vorigen drei Ortsangaben zu ziehen, so bekäme man einen merkwürdigen Zickzack mit west-östlichen Schwankungen etwa zwischen den östlichen Längen $29^0$ und $35^0$. Der «Meridian des ERATOSTHENES» könnte die Ansprüche der heutigen Kartographie schwerlich befriedigen. Aber dies war keineswegs seine einzige Ungenauigkeit. Wir haben vorhin schon gesehen, daß er auch beim Erdvermessen von

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



der Vermutung ausgegangen war, Alexandria und Syene lägen auf demselben Meridian.

Aber nicht nur dieselben Entfernungen auf demselben Meridian wie ERATOSTHENES hat HIPPARCHOS aufgenommen (vgl. STRABON C 62), sondern auch, was die gesamte Größe der Erde betrifft (die Länge eines Meridians bzw. des Äquators), ist er (HIPPARCHOS) von der Erdvermessung des ERATOSTHENES ausgegangen (STRABON C 113)[69]. Und so könnten wir noch zahlreiche Stellen aus dem Werk des STRABON anführen, die zeigen, daß das Vorbild des HIPPARCHOS – in manchen Einzelheiten der Geographie – der von ihm sonst scharf kritisierte ERATOSTHENES war. Ja, wie PTOLEMAIOS bezeugt (I 12), hat HIPPARCHOS auch das Maß für die Schiefe der Ekliptik (bzw. für den Bogen zwischen den Wendepunkten) von ERATOSTHENES übernommen.

Darum vermute ich, daß jenes Kapitel bei PTOLEMAIOS – II 6: Die Schilderung der von Parallel zu Parallel eintretenden charakteristischen Kennzeichen –, von dem ich vorhin sagte, daß es im Grunde auf HIPPARCHOS zurückgeht, in manchen seinen Einzelheiten über HIPPARCHOS hinaus von ERATOSTHENES entstammt. Später wird man sehen, daß es möglich ist, in diesem Quellennachweis – zumindest was einen bestimmten Punkt betrifft – selbst über ERATOSTHENES hinaus auf einen noch älteren Ursprung hinzuweisen.

Ich halte es nun – angesichts dieser Tatsachen – für sehr wahrscheinlich, *daß schon ERATOSTHENES den Gnomon für geographische Breiten-Bestimmung ebenso benutzt hatte wie HIPPARCHOS.* Ich kenne zwar aus der antiken Literatur keinen anderen unmittelbaren Beleg für die Gnomon-Benutzung des ERATOSTHENES als seine schon behandelte Meridian-Messung (überliefert bei KLEOMEDES), aber es gibt dafür andere, indirekte Belege, wenn man sich nämlich folgendes überlegt :

Es spielte in der antiken Geographie die Frage eine wichtige Rolle, *in welche Richtung die Schatten fallen.* Natürlich haben den Anlaß zu dieser Frage teils ein sorgfältiges Beobachten des Gnomons und teils *theoretische Überlegungen* gegeben. (Denn es gab ja schließlich doch nicht sehr

---

69. Es darf allerdings der folgende Widerspruch nicht verschwiegen werden: Es heißt bei STRABON (C 113) – an derselben Stelle, die berichtet, daß HIPPARCHOS nach dem eigenen Geständnis seinen Überlegungen das Erdvermessen des ERATOSTHENES zu Grunde gelegt habe –, daß nach ERATOSTHENES die Länge des Äquators (bzw. eines Meridians) 252.000 Stadien sei. Doch ergab das Erdvermessen des ERATOSTHENES nach KLEOMEDES (*De motu circulari corporum caelestium*, ed. H. ZIEGLER I 10) nur 250.000 Stadien. Darum liest man nun in M.R. COHEN - I.E. DRABKIN, *A Source Book in Greek Science*, Cambridge/Mass. 1958, S. 151 n.2: «It may be noted that the change of ERATOSTHENES' figure from 250.000 to 252.000, whoever it was who made it, was probably occasioned by a desire to obtain a round number for 1°, viz. 700 stades.»

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



viele Griechen in der Antike, die weitgereist und auch wissenschaftlich interessiert genug waren, um sich über das Umschlagen der Schatten *auch in concreto* zu verwundern.) Es ist nämlich leicht einzusehen, daß der Mittagschatten des Gnomons *auf einem Gebiet nördlich vom Parallelkreis der Sommerwende* immer nach Norden fallen muß. Aber nicht so ist es *auf dem Gebiet zwischen den beiden Wendekreisen,* also auf dem breiten Streifen beiderseits des Äquators. Hier muß der Mittagschatten des Gnomons nach Süden fallen, wenn die scheinbare Laufbahn der Sonne sich dem Sommerwendekreis nähert, und umgekehrt muß der Mittagschatten nach Norden fallen, wenn die scheinbare Laufbahn der Sonne sich dem Winterwendekreis nähert. – Oder denkt man an jene Stellen hoch oben im Norden, wo die Sonne monatelang nicht untergeht, so ist es klar, daß dort der Schatten des Gnomons alle Himmelsrichtungen durchwandert. Auch PTOLEMAIOS schrieb – wie oben schon einmal zitiert (S. 94 ) – über seinen 33. Parallelkreis: «Er ist der erste von den r i n g s s c h a t t i g e n Parallelen».

Wohlbekannt sind jedem, der STRABON gelesen hat, die drei Ausdrücke: ἑτερόσκιοι, ἀμφίσκιοι und περίσκιοι. Ἑτερόσκιοι sind die Menschen, deren Mittagschatten *nur* nach Norden oder *nur* nach Süden fallen. Ἀμφίσκιοι diejenigen – zwischen den beiden Tropen –, deren Schatten bald nach Norden, bald nach Süden fallen. Und περίσκιοι (ringsschattig) sind die Menschen im hohen Norden. Dementsprechend heißt es einmal bei STRABON (C 133) in genauer Paraphrase :

Bei allen denjenigen, die zwischen dem Sommerwendekreis und dem Äquator leben, *schlagen die Schatten auf beide Seiten um* (μεταπίπτουσιν αἱ σκιαὶ), sowohl nach Norden wie auch nach Süden; bei denjenigen aber, die außerhalb des Sommerwendekreises, d.h. nördlicher als Syene leben, fallen die Schatten zu Mittag *nur* nach Norden.

Auf der anderen Seite ersieht man die Tatsache, daß ERATOSTHENES den Gnomon nicht bloß für sein einmaliges Messen von einem Meridian, sondern ohne Zweifel auch ganz gewöhnlich für Breiten-Bestimmungen benutzt haben muß, aus jenem Bericht bei STRABON (vgl. C 76-77), wonach er (ERATOSTHENES) in einer Streitfrage zwischen MEGASTHENES und DEIMACHOS Stellung genommen hat. Ja, dieselbe Stelle ist zugleich auch ein unzweifelhafter Beweis dafür, daß der Gnomon selbst in der Zeit v o r ERATOSTHENES – zumindest von echten Wissenschaftlern – für Bestimmungen von geographischen Lagen benutzt wurde.

Doch erinnern wir zunächst daran, wer die Träger der beiden eben genannten Namen waren.

MEGASTHENES wurde einmal von SELEUKOS NIKATOR (357-280 v.Chr.)

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



nach Indien zu CANDRAGUPTA geschickt. DEIMACHOS wurde dagegen etwas später von ANTIOCHOS SOTER (von 293-261) zum Nachfolger von CANDRAGUPTA geschickt. Aber diese beiden – sowohl MEGASTHENES wie auch DEIMACHOS – schrieben gleichermaßen volkstümliche Reiseberichte über Indien, wobei der eine von ihnen behauptete, daß in Indien «die Schatten umschlagen», während der andere dasselbe bestritt. Natürlich ist dies eine sehr wesentliche Frage, wenn man die geographische Lage von Indien bestimmen will. Aber inwiefern verdienen diese Gewährsmänner überhaupt Beachtung? ERATOSTHENES hat ja nachgewiesen, daß DEIMACHOS – was Geographie und Astronomie betrifft – *ein völlig ungebildeter Mensch* (ἀμαθὴς) war. Er dachte nämlich, daß – ebenso wie es einen Kreis der Sommer-Sonnenwende und *einen anderen* der Winterwende gibt – auch der Kreis der Tag- und Nachtgleiche im Frühling und derjenige des Äquinoktiums im Herbst *zwei verschiedene* Kreise seien. Er hatte nicht begriffen, daß es sich beide Male um denselben Äquator handelt.

Dieses Mißverständnis verrät sogleich auch, wie weit die Ergebnisse der antiken Wissenschaft zur Zeit des frühen Hellenismus Gemeingut waren und wieviel davon in breiteren Kreisen auch richtig verstanden wurde. Natürlich sprachen viele vom «Umschlagen der Schatten», von «Verhältniszahlen des Gnomons», «Parallelkreisen», «Wendekreisen» und «Äquator», aber es gibt keine Garantie dafür, daß jeder, der diese Ausdrücke gebrauchte, mit den betreffenden Begriffen auch richtig umgehen konnte.

Oft versagt in dieser Hinsicht auch unsere reichhaltigste Quelle, STRABON selber, – entweder, weil er manchmal ungenau (ja, hie und da auch unzuverlässig) ist oder weil er gerade das Wesentlichste verschweigt; anstatt uns jene wertvollen Angaben mitzuteilen, die ihm offenbar noch zur Verfügung standen, stellt er unsere Geduld mit seiner übergelehrten Kritik auf die Probe. Ich werde im nächsten Kapitel einen Fall zeigen, in dem wir einen ziemlich groben Irrtum von ihm noch verhältnismäßig leicht korrigieren können. Aber hier möchte ich vorerst einen anderen Fall nennen, bei dem wir seine übertriebene Verschwiegenheit nur bedauern können.

Er beruft sich einmal (C 77) auf einen gewissen PHILON – vermutlich auf den Admiral von PTOLEMAIOS I. (367-283) –, der ein Werk über seinen Schiffsweg nach Äthiopien geschrieben hatte. In diesem habe PHILON behauptet, daß in Meroë die Sonne 45 Tage v o r der Sommerwende auf dem Zenit steht, ja, er habe auch die hiesigen Verhältniszahlen des Gnomons – sowohl bei den Sonnenwenden wie auch bei Tag- und Nachtgleiche registriert; *und auch* ERATOSTHENES

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



*selber stimme in dieser Hinsicht mit* PHILON *beinahe überein.*

Eine hochinteressante Mitteilung: PHILON habe also beobachtet, daß des «Umschlagen des Schattens» in Meroë etwa drei Monate dauert. Hätte STRABON in diesem Zusammenhang auch noch PHILONS Gnomon-Zahlen für Meroë aufgezeichnet, so besäßen wir nicht nur eine Gelegenheit der Kontrolle, sondern es könnte auch sein, daß uns in seiner Mitteilung eine wichtige und aufschlußreiche Angabe sowohl über ERATOSTHENES wie auch über seinen Gewährsmann PHILON zur Verfügung stünde. Es sieht ja so aus, als hätte PHILON eben solche Gnomon-Angaben aufgezeichnet, die später bei ERATOSTHENES, HIPPARCHOS und PTOLEMAIOS (II 6, vom Äquator bis zum Nordpol) zu einer vollständigen Liste wurden. Aber in der gegenwärtigen Form, verkürzt, wirkt der Bericht des STRABON mit den wichtigtuerischen Bemerkungen des halbgebildeten Geographen eher enttäuschend.

## *17. PYTHEAS von Massalia*

Den schlagendsten Beweis dafür, daß der Gnomon zur Bestimmung der Entfernung vom Äquator *auch im 4. Jahrhundert v.Chr. schon ebenso benutzt wurde,* wie sich dieses Verfahren vorhin für HIPPARCHOS ohne jeden Zweifel rekonstruieren ließ, liefert uns STRABON im Zusammenhang mit dem bekannten Reisenden *PYTHEAS von Massalia.*

Es genügt wohl, hier über PYTHEAS nur soviel vorauszuschicken, daß er im 4. Jahrhundert v.Chr. lebte. Er war also ein Zeitgenosse des ARISTOTELES. Seine berühmten Reisen fallen vielleicht noch in die Periode v o r 330 v.Chr.[70] STRABON erwähnt den Namen des PYTHEAS mehrmals, aber er hat für ihn so gut wie nichts übrig. Ja, er betont sogar bei jeder sich bietenden Gelegenheit, daß seiner Meinung nach PYTHEAS ein skrupelloser Lügner war (vgl. C 63 und C 104), der alle diejenigen irregeführt hat, die sich auf ihn verlassen haben. Es wird auch dem ERATOSTHENES vorgeworfen (C 104), daß er die Märchen des PYTHEAS für bare Münze nahm, wo ihn, den PYTHEAS, selbst ein DIKAIARCHOS (der Schüler des ARISTOTELES) keines Vertrauens gewürdigt habe.

Uns interessieren in diesem Zusammenhang insgesamt *vier* STRABON-Stellen (C 63, 71, 115 und 134), die alle sowohl über PYTHEAS und HIPPARCHOS wie auch über die beiden geographischen Punkte Byzantion

---

70. Wie F. GISINGER in seinem Artikel *(Pytheas von Massalia) RE* 47. Halbband, 1963, Sp. 314-366 schrieb: «die Reise war *wohl noch vor 332 v.Chr.*».

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



und Massalia berichten. Der Bericht enthält auch einen offenbaren Irrtum, den man zum Teil erklären und auf alle Fälle *restlos zurechtstellen* kann. Da die vier Stellen sich gegenseitig ergänzen, behandle ich sie im folgenden in jener Reihenfolge, in der sie den Leser von Schritt zu Schritt weiterführen.

Einmal schreibt STRABON (C 71) in einem hypothetischen Nebensatz: «Wenn derselbe Parallelkreis über Byzantion und Massalia hinwegführt, wie HIPPARCHOS – im Vertrauen auf PYTHEAS – behauptet...» – Wie man sieht, enthält sich der Geograph in diesem Fall des Urteils, er distanziert sich nur von seinen Quellen, angeblich HIPPARCHOS und PYTHEAS. – Dieser Bericht wäre auch in sich schon aufschlußreich genug, denn er bezeugt ja, daß schon PYTHEAS im 4.Jahrhundert v.Chr. mit Parallelkreisen gearbeitet hat. N i c h t HIPPARCHOS im 2. Jahrhundert und auch n i c h t ERATOSTHENES im 3. Jahrhundert waren die Bahnbrecher der mathematischen Geographie; auch ihr Vorgänger PYTHEAS im 4. Jahrhundert hatte schon die Erdkugel mit Parallelkreisen versehen. – Aber hätte in der Tat schon PYTHEAS Byzantion und Massalia auf denselben Parallel gesetzt? – Nein, diese letztere Vermutung wäre allerdings verfehlt. STRABON meinte es anders.

Die beiden anderen Stellen (C 115 und C 63) verraten nämlich, daß HIPPARCHOS derjenige war, der – zumindest nach STRABON – zu dem Schluß kam, daß der Parallelkreis von Byzantion derselbe sei wie derjenige von Massalia. Er habe in Byzantion *dasselbe Verhältnis des Gnomons zu seinem Mittagschatten* gefunden wie PYTHEAS in Massalia. Die Gnomon-Zahlen selber werden an diesen beiden Stellen *nicht* mitgeteilt; nur soviel läßt das eine Mal (C 63) die Ausdrucksweise des STRABON vermuten: Es handelt sich wohl *nicht um den äquinoktialen Mittagschatten* des Gnomons, der gewöhnlich benutzt wurde, um die geographische Lage eines Ortes zu charakterisieren. Doch versichert uns die Quelle auch hier schon, daß die beiden Messungen – sowohl diejenige in Byzantion wie auch die andere in Massalia – «zu derselben Zeit», also an demselben Tag des Jahres vorgenommen wurden.

Die vierte STRABON-Stelle (C 134), die für uns jetzt entscheidend ist, heißt nun folgendermaßen :

«In der Gegend von Byzantion hat der längste Tag des Jahres 15¼ Äquinoktialstunden, und das Verhältnis des Gnomons zu seinem Mittagschatten zur Zeit der Sommersonnenwende macht *120: (42 - 1/5)* aus. Diese Gegend ist von jenem Parallelkreis, der die Insel Rhodos in der Mitte durchschneidet, 4900 Stadien und vom Äquator 30.300 Stadien entfernt. (Fährt man dagegen mit dem Schiff in den Pontus hinein und legt einen Weg von noch 1400 Stadien nach Norden zurück,

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



so wird der längste Tag 15 ½ Äquinoktialstunden haben; diese andere Gegend ist nämlich vom Nordpol und vom Äquator gleich entfernt, etc.etc.)

Ich habe die für uns wichtige Stelle noch mit zwei Sätzen der Fortsetzung in Klammern ergänzt, da ich später auf diese Forsetzung zurückkommen muß. Aber vorerst fassen wir die Mitteilung über die «Gegend von Byzantion» näher ins Auge.

Im Sinne der drei anderen, vorhin erwähnten STRABON-Stellen soll der große Astronom HIPPARCHOS selber die eben mitgeteilte Gnomon-Messung vorgenommen haben. Interessant ist die zitierte Stelle besonders deswegen, weil sie eine *mehrfache Kontrolle* nahelegt. Beginnen wir zunächst mit der Frage: Um welchen Parallelkreis handelt es sich hier eigentlich?

Man kann die Antwort auf die vorgelegte Frage auf Grund der dortigen Zeitdauer des längsten Tages – 15¼ Stunden – im *Almagest* des PTOLEMAIOS (II 6) — sehr leicht nachschlagen. Es heißt dort wörtlich :

«Der *vierzehnte* Parallel ist derjenige, auf welchem der längste Tag *15¼ Äquinoktialstunden* hat. Er hat vom Äquator *43⁰ 4′* Abstand.» – Wir können uns hier mit der approximativen Genauigkeit begnügen, und wir sagen: Der Parallelkreis, von dem im STRABON-Zitat die Rede ist, liegt *etwas mehr nach Norden zu als der* 43. Grad vom Aquator.

Man bekommt dasselbe Ergebnis (43⁰) auch, wenn man die von STRABON hervorgehobene «Entfernung von Rhodos» in Stadien berücksichtigt. Nach der Umrechnung des HIPPARCHOS (vgl. STRABON C 132) – 1⁰ dem Meridian entlang = 700 Stadien – machen 4900 Stadien 7⁰ aus. Addiert man diese 7⁰ zu der Polhöhe von Rhodos (vgl. PTOLEMAIOS II 2), 36⁰, so bekommt man gerade 43⁰, wie vorhin auf Grund der anderen, einstweilen nur angedeuteten Berechnung nach der Zeitdauer des längsten Tages.

Noch genauer ist die dritte Kontroll-Angabe, die Entfernung vom Äquator in Stadien. Denn 30.300 Stadien sind einem Meridian entlang – wieder im Sinne der Umrechnung des HIPPARCHOS – 43 2/7⁰. Das betreffende Gebiet muß also offenbar *«etwas nördlicher als der* 43. Grad» liegen.

Dann wollen wir – als vierte Kontrolle – die geographische Breite des betreffenden Gebietes auch noch aus jenem Gnomon-Verhältnis berechnen, das auch den beiden Stadien-Berechnungen offenbar zu Grunde lag. Diese antike Berechnung muß nach der folgenden Überlegung stattgefunden haben (vgl. dazu *Fig. 10) :*

Gegeben war diesmal der Gnomon – AB = 120 – und der Sommerwendschatten – $BR = \left(42 - \frac{1}{5}\right)$ – in Längeneinheiten. Man konnte

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



daraus – nach der schon bekannten Regel – zunächst den Winkel δ gegenüber dem Sommerwendschatten *(BR)* berechnen. Addierte man zu diesem Winkel die «Schiefe der Ekliptik» $\varepsilon = 24^0$, so bekam man den Winkel φ, die Entfernung vom Äquator in Winkelgraden.

Um die Berechnung zu erleichtern, nahmen wir statt $\left(42 - \frac{1}{5}\right) = 41\ \frac{4}{5}$ den Dezimalbruch 41,8. Die Hypotenuse wird also $\sqrt{120^2 + 41{,}8^2} = \sqrt{16147{,}24} \approx 127$. Um die Sehnentafel des Ptolemaios benutzen zu können, stellen wir das Verhältnis der Hypotenusen (nämlich der Hypotenuse des Dreiecks der ptolemäischen Sehnentafel, $120^p$, und der anderen hier vorliegendenden Hypotenuse, 127) bzw. dasjenige der kürzeren Katheten, also die Proportion folgendermaßen auf: $120:127 = x:41{,}8$, und aus dieser Proportion bekommt man $x = \frac{120 \times 41{,}8}{127} \approx 39{,}4$ bzw. $39\ \frac{24}{60}$.

In der Sehnentafel des Ptolemaios findet man danach neben der nächstkleineren Sehne $\left(39\ \frac{4}{60}\right) 38^0$ und neben der nächstgrößeren $\left(39\ \frac{33}{60}\right) 38\ \frac{1}{2}^0$. Darum wird der gesuchte Zentriwinkel (2δ) *«etwas größer als 38⁰»* und der entsprechende Peripheriewinkel (S) *«etwas größer als 19⁰»*. Die geographische Breite (die Entfernung vom Äquator) wird die Summe der beiden Winkel $\varphi = 24^0 + \delta$, also *«etwas über dem 43. Breitengrad»*.

Vier verschiedene Kontrollen hintereinander – 1. mit dem längsten Tag; 2. mit der Entfernung von Rhodos; 3. mit der Entfernung vom Äquator (die beiden letzteren Angaben in Stadien); 4. mit den Gnomon-Zahlen –, die alle zu demselben Ergebnis führen: Die Entfernung des betreffenden Gebietes vom Äquator soll 43 Breitengrade ausmachen. – Ja, Strabon gibt uns unmittelbar danach auch noch eine *fünfte* Möglichkeit der Kontrolle an die Hand. Denn er sagt, man soll nur 1400 Stadien – also nach der Umrechnung des Hipparchos $2^0$ – weiter nach Norden zu gehen, und man kommt auf ein Gebiet, das vom Äquator und Nordpol *gleich entfernt ist.* Auch das könnte haargenau stimmen: $45^0$ ist eben die Mitte zwischen Äquator und Nordpol[70a].

Doch frage man sich endlich: Liegt Byzantion denn in der Tat um

---

70a. Weniger konsequent ist die *sechste* Kontroll-Möglichkeit bei Strabon (C 134-135). Redet er nämlich unmittelbar danach von einem Gebiet «3800 Stadien nördlicher als Byzantion, wo der längste Tag 16 Äquinoktialstunden hat», so entspricht dies bei Ptolemaios (II 6) der Breite *48⁰32′*, und demnach müßte Byzantion *weniger* als $43^0$ sein.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



den 43. Grad herum? – *Keineswegs.* Es liegt ungefähr um zwei volle Grade südlicher, seine Breite macht kaum mehr als 41⁰ aus. – Aber wir können den Irrtum sogleich auch korrigieren[71]. Denn STRABON spricht ja an der eben untersuchten Stelle (C 134) von einem Gebiet, wo der längste Tag 15¼ Äquinoktialstunden lang ist. Und PTOLEMAIOS (II 6) charakterisiert diesen Parallelkreis n i c h t mit Byzantion, sondern vollkommen richtig mit *Massalia.*

Wer ist dann für die irrtümliche Angabe bei STRABON (Byzantion) verantwortlich? – Der Geograph wollte in seiner kurzsichtigen Voreingenommenheit die Schuld von vornherein auf PYTHEAS abwälzen. Wenn die Angabe doch nicht stimmte, dann sollte es ein Fehler des PYTHEAS sein. Darum schrieb er (C 71), HIPPARCHOS habe *«im Vertrauen auf PYTHEAS»* behauptet, daß derselbe Parallelkreis über Massalia und über Byzantion hinwegführe. Als ob die Messung *nur in Massalia* und nicht in Byzantion hätte unzutreffend sein können.

Und doch stimmen die vorhin geschilderten Berechnungen überraschend gut auf Massalia; diese Stadt liegt in der Tat – auch nach den heute üblichen Karten – *kaum etwas nördlicher als der 43. Breitengrad.* PYTHEAS mag die Breite von Massalia mit den Gnomon-Zahlen $120:\left(42-\frac{1}{5}\right)$ tadellos berechnet haben. Wenn jemand einen Fehler gemacht hat, dann könnte das – eben nach STRABON – nur HIPPARCHOS gewesen sein. – Aber hat HIPPARCHOS in der Tat so irrtümlich gemessen und die Gnomon-Zahlen für Byzantion wirklich so falsch festgestellt?

Ich glaube dies durchaus nicht. Nicht nur deswegen lehne ich eine solche Vermutung ab – trotz des ausdrücklichen Berichtes bei STRABON –, weil HIPPARCHOS anerkanntermaßen einer der größten Astronomen der Antike war, der auch schwierigere Messungen überraschend gut vornehmen konnte, sondern auch aus dem folgenden Grunde: Man könnte die geographische Breite von Byzantion – mindestens annähernd – mit der Breite des Hellespontes charakterisieren. Denn diese Stadt liegt ja kaum etwas nördlicher als der Hellespont. Und eben über den Hellespont hat ja HIPPARCHOS richtig festgestellt, daß er um den 41.Grad

---

71. Es ist bezeichnend, wie ratlos T. HEATH diesem ganzen Problem gegenüber war. Ich zitiere die folgenden Worte aus einer längeren – auch sonst aufschlußreichen – Fußnote in seinem Buch (*Aristarchus of Samos*, Oxford 1913, S. 131-132): «According to STRABO, HIPPARCHUS said that the same ratio of the gnomon to the shadow as PYTHEAS found at Massalia held good at Byzantium also, whence, relying in PYTHEAS' accuracy, he inferred that the two places were on the same parallel latitude. As however, Marseilles is 2⁰ further north than Byzantium, it is clear that there must have been an appreciable error of calculation *somewhere*» (von mir hervorgehoben – *A´.Sz.*). – Offenbar hat HEATH nie versucht, die bei STRABON angedeuteten Ergebnisse nachzurechnen.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



herum liegt. Man vergleiche dazu sowohl seine eigenen in der «Einleitung» dieses Buches zitierten Worte wie auch die Stelle bei PTOLEMAIOS II 6 (über den «dreizehnten Parallel»), die offenbar auf HIPPARCHOS zurückgeht. – Aber wie entstand dann der offenbare Irrtum bei STRABON?

Ich glaube nicht, daß ein derartiges «Gnomon-Messen in Byzantion» wie das von STRABON erwähnte *überhaupt jemals stattfand.* Das war eine freie Erfindung des Mannes, der Byzantion irrtümlich auf den Parallelkreis von Massalia gesetzt hatte. Läge nämlich Byzantion in Wirklichkeit auf demselben Parallel wie Massalia, dann müßten dort auch die Gnomon-Zahlen dieselben sein wie in Massalia. Und vermutlich konnte der Betreffende – der den Fehler begangen hatte (das falsche Lokalisieren von Byzantion auf den Parallelkreis von Massalia) – sich nur deswegen auf HIPPARCHOS berufen, weil er dabei in der Tat *die Parallelkreis-Liste des HIPPARCHOS* benutzt zu haben scheint; darin hat er nämlich wohl einfach nur einen Posten verwechselt. Wie ich vermute, waren in dieser Liste der 13., 14. und der 15. Parallelkreis genauso wie bei PTOLEMAIOS II 6. Und darin hat der Urheber des Irrtums – mag es STRABON selber oder ein unbekannter Gewährsmann von ihm gewesen sein – Byzantion anstatt auf den 13. aus Versehen auf den 14. Parallelkreis gesetzt.

Diese meine Vermutung läßt sich auch noch erhärten, wenn man jene Fortsetzung des zuletzt angeführten STRABON-Zitates, die ich in Klammern gesetzt habe, mit der folgenden Fortsetzung bei PTOLEMAIOS (II 6) vergleicht :

«Der *fünfzehnte Parallel* ist derjenige, auf welchem der längste Tag 15 ½ Äquinoktialstunden hat. Er hat vom Äquator 45° 1′ Abstand (mit anderen Worten: er ist gerade in der Mitte zwischen Äquator und Nordpol – *A′.Sz.*) und er geht mitten durch den *Pontus* etc.etc.» – Diese Worte des PTOLEMAIOS erinnern auffallend an das vorige Zitat aus STRABON – ohne daß dabei das irrtümliche Lokalisieren von Byzantion auf den Parallelkreis von Massalia auch bei PTOLEMAIOS wiederholt wäre. Und doch folgen beide Texte – sowohl PTOLEMAIOS II 6, wie auch das vorige STRABON-Zitat – der gemeinsamen Quelle, der Parallelkreis-Liste des HIPPARCHOS.

*

Noch ein interessanter Schluß ergibt sich aus dem vorigen Vergleich. Aus welcher Quelle mag nämlich der sog. *«vierzehnte Parallelkreis»* des PTOLEMAIOS (II 6) entstammen? – Der Text beginnt so :

«Der *vierzehnte Parrallel* ist derjenige, auf welchem der längste Tag 15¼ Äquinoktialstunden hat. Er hat vom Äquator 43° 4′ Abstand und geht durch *Massalia* etc.etc.»

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Die Angaben sind dieselben, die bei STRABON (halb-verfehlt) für Massalia-*Byzantion* erwähnt werden – mit dem Unterschied, daß hier, bei PTOLEMAIOS, richtig *nur* Massalia genannt wird. – Aber mit welchen geographischen Namen kennzeichnet PTOLEMAIOS seine übrigen Parallelen? Es wird sich lohnen, hier nur die folgenden Fälle hervorzuheben: Der 10. Parallel geht über *Phönizien,* der 11. über *Rhodos,* der 12. über *Smyrna,* der 13. über den *Hellespont* – und der 15. über den *Pontus* hinweg. Alle genannten geographischen Einheiten liegen dem sog. «Meridian Meroë-Alexandria-Borysthenes» entlang (der von ERATOSTHENES entstammt!), oder sie fallen mehr nach Osten zu, d.h. sie sind sowohl der Geburtsstadt von HIPPARCHOS (Nikaia) wie auch der Insel Rhodos näher – wo er nämlich längere Zeit gearbeitet hat – als *Massalia*, der Name, der den 14. Parallel kennzeichnet[71a]. – Stammen die Angaben für den *14. Parallelkreis* nicht von dem *Massalioten PYTHEAS* noch aus dem 4. Jahrhundert v.Chr.? Diese Frage wäre auch dann vollkommen berechtigt, wenn wir *nur* aus Strabon wüßten, daß PYTHEAS den Gnomon und seinen Schatten in Massalia gemessen hatte. – Aber wir können ja in der Kontrolle selbst über diese Tatsache noch weiter hinausgehen. Man frage sich nämlich: Was sind denn die Gnomon-Zahlen für den Sommerwendschatten in Massalia bei PTOLEMAIOS?

Man findet bei ihm 60:20 $\frac{5}{6}$, denn PTOLEMAIOS arbeitet ja immer mit einem bloß $60^{p}$ langen Gnomon. Verdoppelt man jedoch beide Zahlen und nimmt ihre Dezimalbruchform, so sieht man sogleich, wie nahe beieinander beide Varianten sind: 120:41,6 bei PTOLEMAIOS und 120:41,8 bei STRABON-PYTHEAS. Wie man sieht, hat PTOLEMAIOS die alte Angabe aus dem 4. Jahrhundert in der Tat etwas modifiziert; ebenso hat er hier und da auch HIPPARCHOS korrigiert. HIPPARCHOS schrieb z.B., daß die Polhöhe am Hellespont «ungefähr $41^{0}$» sei[71b], während bei PTOLEMAIOS dieselbe Angabe $40^{0}\,56'$ heißt (vgl. II 6: der «dreizehnte Parallel»).

### *18. Die Messungen des PYTHEAS*

Nun ist das älteste Messen eines Gnomon-Verhältnisses – *zwecks*

---

71a. Man hat beinahe den Eindruck, als hätte derjenige (STRABON oder sein unmittelbarer Gewährsmann), der *Byzantion* irrtümlich auf den Parallelkreis von Massalia gesetzt hatte, die vorige östliche Liste – *Phönizien, Rhodos, Smyrna, Hellespont – Pontus* – vor dem zuletzt genannten noch mit einer östlicheren Stadt als Massalia, also *Byzantion*, ergänzen wollen.

71b. Vgl. seinen Text in der «Einleitung» dieses Buches.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



*Bestimmung der geographischen Breite eines Ortes (d.h. seiner Entfernung vom Äquator)* –, das ich zur Zeit kenne, dasjenige des PYTHEAS von Massalia im 4. Jahrhundert v.Chr. Das heißt, ich habe bisher in der Literatur keine anderen unmittelbaren Belege für einen älteren derartigen Gebrauch dieses wissenschaftlichen Instrumentes nachweisen können. Bedeutet dies nun auch soviel, daß man die Geschichte der Benutzung des Gnomons für geographische Zwecke in der Tat mit PYTHEAS beginnen sollte?

Ich glaube es nicht. Mir scheint, es gibt mehrere *indirekte Indizien* dafür, daß der Gnomon aller Wahrscheinlichkeit nach auch schon früher ähnlich benutzt wurde. Darüber jedoch erst im zweiten Teil dieser Untersuchungen. Hier möchte ich zunächst jene Konsequenzen näher ins Auge fassen, die sich aus den bisherigen Feststellungen ergeben.

Es ist natürlich schon längst bekannt, daß PYTHEAS von STRABON ungerecht beurteilt wurde. Aber diese Kritik stellt nicht so sehr PYTHEAS, sondern eher STRABON in ein recht ungünstiges Licht. Abgesehen davon, daß die Reiseberichte des PYTHEAS gar nicht so unglaubwürdig sind, wie STRABON dachte, waren auch manche wissenschaftlichen Beobachtungen von ihm durchaus beachtenswert. Es scheint z.B., daß PYTHEAS zumindest einer der ersten war, der den Zusammenhang zwischen den Mondperioden und den Ebbe- und Flut-Erscheinungen erkannte[72]. Noch interessanter ist, wie der Astronom HIPPARCHOS des PYTHEAS anläßlich des Nordpol-Problems gedachte. Er schrieb nämlich[73] :

«Was den nördlichen Pol anbelangt, so befindet sich EUDOXOS in einem Irrtum, wenn er also sagt:' Es gibt einen Stern, welcher immer an derselben Stelle bleibt. Dieser Stern ist der Pol der Welt.' Am Pol steht nämlich kein Stern, sondern dort ist ein leerer Raum, in dessen Nähe drei Sterne (κ λ Drac. und ß Ursi min.[74]) stehen, mit denen der Punkt am Pol ungefähr die Figur eines Vierecks bildet, eine Behauptung, die auch PYTHEAS von Massalia aufstellte».

Das Gnomon-Messen des PYTHEAS – seine Bestimmung des Parallelkreises für Massalia – steht also in bestem Einklang damit, daß er auch die Stelle des Weltpols besser berechnen konnte als die volkstümliche Praxis, wonach nämlich der Polarstern diese Stelle bezeichnete. Es ist charakteristisch, daß der große Mathematiker EUDOXOS in der ersten Hälfte des 4. Jahrhunderts, kaum 50 Jahre vor PYTHEAS, sich noch mit der gröberen Bestimmung begnügen konnte, während PYTHEAS – der

72. AETIUS, *Placita* III 17. (Hier zitiert nach M.R. COHEN-I.E. DRABKIN, op. cit., S. 391.)
73. MANITIUS 1894, S. 31.
74. Eingefügt von C. MANITIUS.



ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



vielleicht ein Schüler des EUDOXOS war[75] – in der Genauigkeit der Berechnung über seinen Meister schon hinausging. – Es wird sich lohnen, hier auch jenes Gnomon-Messen des PYTHEAS näher ins Auge zu fassen, das zum Ergebnis 120:41,8 führte.

Beide Zahlen sind ziemlich hoch, darum halte ich es *nicht* für wahrscheinlich, daß sie das *unmittelbare* Ergebnis einer sog. «einfachen Wechselwegnahme» darstellen könnten. Aber ist der approximative Quotient der beiden – 120:41,8 – nicht gerade *3*? – Diese Beobachtung ließ mich vermuten, daß man wohl als erstem Schritt mit der groben Annäherung *3:1* hätte beginnen können. Multipliziert man die Glieder dieses ersten Probeverhältnisses mit 7, so bekommt man 21:7. Damit wäre natürlich noch nichts gewonnen, aber *korrigiert* man die erste Zahl auf 20, so wäre das Verhältnis *20:7* schon eine bessere Approximation. Und multipliziert man das letztere mit 6 – also 120:42, bzw. *korrigiert* man diesmal im zweiten Glied $120:\left(42-\frac{1}{5}\right)$, wie das Verhältnis bei STRABON überliefert ist –, so hat man eben die traditionelle Zahl des PYTHEAS.

Ich habe nur deswegen gewagt, das eben skizzierte Gedankenexperiment niederzuschreiben, weil es Anlaß zur nächsten (offen bleibenden!) Frage bietet. Warum hat derjenige, der schließlich beim Ergebnis 120:41,8 angelangt war, sich nicht mit kleineren Zahlen, etwa eben mit *20:7* begnügt? Hat er in der Tat eine «größere Genauigkeit» erstrebt[76]? Aber versucht man, die geographische Breite für Massalia auf Grund des Verhältnisses 20:7 – selbstverständlich auch diesmal nur unter Benutzung der Sehnentafel bei PTOLEMAIOS – zu berechnen, so ist das Überraschende, daß man auch in diesem Fall beinahe dasselbe Ergebnis ($43^0\,15'$) bekommt wie mit den Zahlen des PYTHEAS.

Aber einerlei, durch welche Überlegungen PYTHEAS anläßlich der Bestimmung der geographischen Breite von Massalia zu so hohen Verhältniszahlen (120:41,8) geführt wurde, so glaube ich, daß diese Tatsache selbst zwei Schlüsse nahelegt, auf die wir hier näher eingehen müssen.

1. Derjenige, der das Längenverhältnis des Gnomons zu seinem Mittagschatten bestimmt – ob zu Sonnenwenden oder ob zu Äquinoktien –, will mit diesen Zahlen zweifellos einen *Bogen* bzw. einen *Winkel*

---

75. PYTHEAS hat also den EUDOXOS korrigiert. Man vgl. dazu F. GISINGERS folgende Bemerkung (a.a.O. Sp. 316): «PYTHEAS war von EUDOXOS astronomisch gewiß angeregt... wenn er nicht gar aus seiner Schule hervorging».

76. Man wird unwillkürlich an die Worte von D.R. DICKS (*Geographical Fragments of Hipparchus*, 1960, S. 179) erinnert: «PYTHEAS measurement is remarkable enough *without attributing him a false superaccuracy*» (?).

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



bestimmen. Ich muß diese Tatsache deswegen mit besonderem Nachdruck betonen, weil ich damit einen merkwürdigen Irrtum ein für alle Male beseitigen möchte. Dieser Irrtum war der folgende :

Der verdienstvolle Historiker REHM schrieb in einem sonst sehr lehrreichen Artikel[77] über die «vollständige Tabelle des HIPPARCHOS, die Angaben über die Schattenlängen des Gnomons an den Wenden» enthielt: «Mit Hilfe einer solchen Tabelle konnte jeder Reisende die geographische Breite seines Aufenthaltsortes so genau bestimmen, als es damals überhaupt möglich war.» Und dann fügte er dieser Erörterung noch den merkwürdigen Satz hinzu: «Diese Verhältniszahlen waren ja ohnehin antiquiert, *als man dazu gekommen war, Winkel durch Bogengrade auszudrücken.*»

Ich glaube, ein jeder, der diesen letzten, von mir hervorgehobenen Satz des Zitates liest, wird unweigerlich denken, es hätte also in der Entwicklung der griechischen Wissenschaft eine *frühere* Epoche gegeben, in der die Winkel, die im Zusammenhang mit den Gnomon-Messungen interessant waren, einfach durch eine Verhältniszahl – Gnomon und eine seiner Schattenlängen – ausgedrückt wurden. *Später* hätte man jedoch diese Gewohnheit aufgegeben und wäre zur Messung der Winkel in Bogengraden übergegangen.

Nun kann ich einer solchen Vermutung *auf keinen Fall* beipflichten. Ich glaube *nicht*, daß es in der Geschichte der griechischen Gnomon-Messungen jemals eine Epoche gegeben hat, in der man die Verhältniszahlen (Gnomon und Schattenlänge) *unmittelbar* hätte benutzen können – ohne aus ihnen den fraglichen Bogen (Winkel) zu berechnen. Man interessierte sich im Zusammenhang mit den Gnomon-Messungen *immer* für irgendeinen *Bogen* – seitdem man darauf gekommen war, daß man einen *Bogen* halbieren muß, wenn man den äquinoktialen Schatten des Gnomons bekommen will.

[Es wird sich lohnen, hier – in der Form eines kurzen Exkurses – sogleich auch jene Bogen nacheinander aufzuzählen, die im Zusammenhang mit den Gnomon-Messungen in Betracht kamen. Zum folgenden siehe *Fig. 7.*

a ) Der Bogen zwischen den Mittagstrahlen der beiden Wenden: $2\varepsilon$. Die Hälfte von diesem ist die «Schiefe der Ekliptik» ($\varepsilon$).

b ) Der Bogen zwischen dem senkrecht stehenden Gnomon und dem Mittagstrahl der Sommerwende: $\delta$.

c ) Die Summe ($\delta + \varepsilon$) ist die Entfernung des betreffenden Punktes *(B)* vom Äquator; dieser Winkel liegt dem äquinoktialen Mittag-

77. REHM, *Horologium* in *RE* VIII, 2420.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



schatten gegenüber, und er ist der *Polhöhe* (φ) gleich. Subtrahiert man diese Summe *(δ + ε)* – oder anders ausgedrückt: subtrahiert man die Polhöhe (φ) – von $90^0$, so bekommt man die sog. «Äquatorhöhe des Punktes *B*», also den Winkel bei *C*.

d ) Und schließlich ist die Summe $\delta + 2\varepsilon$ der Winkel dem Winterwendschatten gegenüber.]

Die Verhältniszahl (Gnomon und Schattenlänge) wurde also nur deswegen in Evidenz gehalten weil man aus ihr einen Winkel berechnet hatte. Aber die Verhältniszahl selber besagte *nur* für den kundigen Mathematiker oder Astronomen etwas. Nur ein solcher konnte aus ihr den fraglichen *Bogen (Winkel)* berechnen.

Ich glaube auch nicht, daß – wie das vorige Zitat nach REHM besagt – «jeder Reisende mit Hilfe einer solchen Tabelle der Gnomon-Zahlen (nämlich bei HIPPARCHOS) die geographische Breite seines Aufenthaltsortes» hätte bestimmen können. Der Durchschnittsreisende hatte nämlich sicher gar keine Ahnung davon, wie man die Gnomon-Zahlen benutzen soll. Ja, selbst STRABON registrierte zwar häufig die Gnomon-Zahlen, aber er ließ daneben die Breitengrade – die man aus diesen gewinnen kann – konsequent fort, weil er *vermutlich gar nicht begriffen hatte, worin eigentlich der Zusammenhang dieser beiden – der Gnomon-Zahlen und der Bogengrade – besteht.* Wüßten wir nicht aus dem älteren Werk des HIPPARCHOS, daß die Astronomen diese Gnomon-Zahlen in Breitengrade umzurechnen pflegten, so könnten wir dies – bloß nach STRABON – kaum erraten. Anstatt der Breitengrade hat STRABON lieber die Stadien-Entfernungen der einzelnen Parallelkreise vom Äquator ab aus seiner Vorlage abgeschrieben.

Ich behaupte also, daß, *seitdem die griechischen Gelehrten die Gnomon-Verhältnisse je nach Gebietseinheiten aufgezeigt hatten, dieselben – zumindest von den kundigen Mathematikern und Astronomen – auch in Bogengrade umgerechnet wurden.*

2. Der andere Schluß, den mir die traditionellen Gnomon-Zahlen des PYTHEAS von Massalia nahezulegen scheinen, ist der folgende: Derjenige, der das Längenverhältnis des Gnomons und seines Schattens in so hohen Zahlen wie 120:41,8 zum Ausdruck bringt, wird den *Winkel* – um dessentwillen das Verhältnis überhaupt genannt wird – höchstwahrscheinlich mit einer *Sehnentafel* berechnet haben. Man könnte sich nämlich fragen – solange es sich um solche Gnomon-Zahlen handelt wie 4:3 (Athen), 7:5 (Rhodos), 5:3 (Alexandria) oder auch 9:8 (Rom) –, ob man in diesen Fällen den fraglichen Winkel nicht einfach *mit geometrischer Konstruktion* gewonnen hat.

Mir ist zwar eine solche geometrische Konstruktion, um den betref-

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



fenden Winkel messen zu können, aus der Überlieferung *nicht* bekannt. Aber es wäre in der Tat ziemlich einfach, rechtwinklige Dreiecke zu konstruieren, deren Katheten durch verhältnismäßig kleine Zahlen ausgedrückt werden, wonach man den Kreisbogen des gesuchten spitzen Winkels auch praktisch leicht messen könnte.

Doch ist eine derartige Konstruktion – um den Winkel praktisch zu messen – von vornherein weniger wahrscheinlich, wenn man dabei die beiden Katheten mit solchen Zahlen mißt wie 120 und 41 4/5. Diese ziemlich hohen Gnomon-Zahlen bilden also beinahe schon in sich selbst einen Beleg *für die damalige Existenz von Sehnentafeln.* Es dürften also schon zur Zeit des PYTHEAS-ARISTOTELES Sehnentafeln existiert haben.

Mit diesem Schluß sind wir an einem heiklen Punkt der historischen Rekonstruktion angelangt, über den wir uns bisher stillschweigend hinweggesetzt haben. Wir haben nämlich, um den Parallelkreis von Massalia aus der Gnomon-Zahl des PYTHEAS – im 4. Jahrhundert v.Chr. – berechnen zu können, eine *Sehnentafel* benutzt, die erst im Werk des KLAUDIOS PTOLEMAIOS – also aus einer Epoche etwa ein halbes Jahrtausend n a c h PYTHEAS – vorliegt.

In der Tat hätte man noch kaum etwas dagegen einwenden können, daß wir versuchten, in der Rekonstruktion der Berechnungen des HIPPARCHOS uns jener Sehnentafel zu bedienen, die wir nur aus dem Werk des viel späteren PTOLEMAIOS heranziehen konnten. Denn die ursprüngliche Sehnentafel des HIPPARCHOS ist zwar nicht erhalten geblieben, aber man weiß einerseits, daß HIPPARCHOS in der Tat schon eine Sehnentafel zusammengestellt hatte, und es durfte auf der anderen Seite von vornherein vermutet werden, daß seine Sehnentafel im Grunde dieselbe sein mußte wie diejenige des PTOLEMAIOS. – Aber darf man jetzt dieselbe Sehnentafel benutzen, um eine Berechnung des PYTHEAS zu rekonstruieren – volle zwei Jahrhunderte noch v o r HIPPARCHOS selber?

Mein voriger Versuch steht natürlich in schroffem Gegensatz zu jener vorhin erwähnten *«communis opinio»* der Historiker[78], wonach HIPPARCHOS der erste Schöpfer der Trigonometrie gewesen sei, ja, ihm auch die erste Sehnentafel zu verdanken sei.

Natürlich ist damit, daß die Sehnentafel des PTOLEMAIOS sich überraschend zur Rekonstruktion der Berechnung des PYTHEAS anwenden ließ, die Existenz einer solchen Tafel für das 4. Jahrhundert v.Chr. noch nicht über jeden Zweifel erwiesen. Aber diese merkwürdige Tatsache steht doch im besten Einklang mit jener anderen Beobachtung, die ich schon mehrmals hervorgehoben habe: HIPPARCHOS scheint ausdrücklich

78. Vgl. oben die Anmerkungen 10, 11, 12 zur «Einleitung».

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



zu betonen, daß jene Berechnungsergebnisse, auf die er hinweist (siehe oben seinen Text in der «Einleitung» dieses Buches), n i c h t von ihm selbst stammen. Diese waren in seinen Tagen allgemein bekannte Tatsachen der zeitgenössischen Wissenschaft.

## *19. Zusammenfassung*

Wir fassen am Ende des ersten Teils in diesem Buch die dürftigen Angaben über den Gnomon chronologisch geordnet in den folgenden *11 Punkten* zusammen :

1.) ANAXIMANDROS
2.) OINOPIDES
3.) HERODOT
4.) PYTHEAS
5.) EUKLID
6.) PHILON
7.) ARISTARCHOS
8.) ERATOSTHENES
9.) HIPPARCHOS
10.) STRABON-VITRUVIUS
11.) PTOLEMAIOS

### *1.) ANAXIMANDROS*

ANAXIMANDROS im 6. Jh. v.Chr. wird als ältester Benutzer des Gnomons erwähnt[79]. Die Überlieferung hebt nur hervor, daß er mit diesem Instrument die *Tag- und Nachtgleichen* gezeigt habe. Dies involviert jedoch – wie gesehen –, zumindest meiner Interpretation nach, auch die folgenden Erkenntnisse :

a) Er wird vor allem den himmlischen *Bogen zwischen den Wendekreisen erkannt haben*;
b) mit dem Halbieren des Spiegelbildes von diesem Bogen wird er die *Ebene des äquinoktialen Mittagstrahls* der Sonne, die *Länge des äquinoktialen Mittagschattens* und die *Schiefe der Ekliptik* gezeigt haben;
c) mit seiner Gnomon-Konstruktion wird er eine wissenschaftliche *Weltbild-Darstellung* angeregt haben, die nach ihm einen wichtigen Ausgangspunkt sowohl für die Astronomie als auch für die mathematische Geographie bildete.

Ohne hier die Argumente für diese Interpretation zu wiederholen,

79. Es liegt wohl nur eine Verwechslung vor, wenn es bei PLINIUS (*N.H.* II 187) heißt: «Umbrarum hanc rationem et quam vocant gnomonicen invenit ANAXIMENES Milesius, ANAXIMANDRI, de quo discimus, discipulus, primusque horologium quod appellant sciothericon Lacedaemone ostendit.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



fragen wir: Wie lassen sich diese Vermutungen in jenes Bild einfügen, das wir von den ähnlichen Erkenntnissen der frühen Milesier haben?

Es wurde oben bereits erwähnt, daß nach dem einen Zweig der Überlieferung[80] auch THALES schon «zwei Bücher über die Sonnenwenden und über die Tag-und Nachtgleichen» geschrieben hatte. Dies scheint dafür zu sprechen, daß dieselben Probleme, über die ANAXIMANDROS später denkwürdige Ergebnisse erzielte, in Miletos auch vor ihm schon an der Tagesordnung waren. Noch mehr erhärtet wird diese Vermutung, wenn man an die folgenden Aufzeichnungen jenes THEON SMYRNAEUS denkt, der im 2. Jh. n.Chr. gelebt hat.

Dieser Verfasser beschwert sich vor allem darüber[81], daß ein gewisser DERKYLLIDES (etwa *vor* der Zeit des römischen Kaisers TIBERIUS, 14-37 n.Chr.), von dem auch er (THEON) einige Aufzeichnungen übernahm, über diese Sachen nicht in der nötigen und angemessenen Ordnung geschrieben habe. Dann notiert THEON – aus jenem Anlaß, daß nach dem ARISTOTELES-Schüler EUDEMOS (4. Jh. v.Chr.) der Entdecker der Ekliptik-Schiefe OINOPIDES (5. Jh.) gewesen sei – folgendes :

THALES habe die Gründe der Sonnenfinsternisse und *die Perioden der Sonne in bezug auf die Wenden erkannt, daß nämlich diese nicht dieselben sind*;

ANAXIMANDROS habe entdeckt, daß die Erde in der Mitte des Weltalls schwebt;

ANAXIMENES, daß der Mond sein Licht von der Sonne hat und wie seine Finsternisse erfolgen. – Und *nach* diesen hätten andere erkannt – setzt THEON SMYRNAEUS seinen Bericht fort –, daß die Ekliptikschiefe $24^0$ ausmacht.

Auffallend ist nun an diesem Bericht in der Tat die wohlüberlegte Aufeinanderfolge von einigen einfachen, aber grundlegenden astronomischen Erkenntnissen. Uns interessiert hier besonders der Bericht über «THALES und die Wendeperioden». Man versteht nämlich diese Worte gewöhnlich in dem Sinne, daß THALES erkannt habe, daß die Periode von Sommerwende bis Winterwende l ä n g e r ist als umgekehrt[82]. Dieser Bericht paßt nämlich nicht nur sehr gut zu dem anderen über die vorhin erwähnten «zwei Bücher des THALES» (wohl über dasselbe

---

80. Bei DIOGENES LAERTIOS I 23.

81. THEONIS SMYRNAEI, *Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem*, rec. E. HILLER, Lipsiae 1878, S. 198, 9 ff. und 14 ff.

82. M.R. COHEN – I.E. DRABKIN, op. cit. S. 92 n. 2: «The reference seems to be to the fact that the period from the summer solstice to the winter solstice is approximately 184 1/2 days, whereas that from winter solstice to the summer solstice is approximately 180 1/2 days.»

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Thema), sondern als vorangehende Erkenntnis auch zu jener anderen Entdeckung, die ich für ANAXIMANDROS zu rekonstruieren versucht habe. Der nächstfolgende Milesier nach THALES (also ANAXIMANDROS) habe mit seiner Erkenntnis – wie der Mittagschatten des Äquinoktiums zu finden sei – eben die frühere Erkenntnis des THALES über die Sonnenperioden fortgesetzt.

## 2. *OINOPIDES*

Die nächste Angabe in chronologischer Folge über den Gnomon verbindet sich mit dem Namen jenes OINOPIDES von Chios, der etwa 100-120 Jahre n a c h ANAXIMANDROS gelebt hat. (Seine Haupttätigkeit wird auf die Jahre 450-425 v.Chr. datiert[83].) Es liegen eigentlich zwei Berichte vor, deren innerer Zusammenhang jedoch nur vermutet werden kann.

In dem einen wird ein archaischer Zug des Sprachgebrauchs des OINOPIDES erwähnt. Anläßlich des Euklidischen Satzes *Elem.* I 12 («Auf eine gegebene unbegrenzte Gerade von einem gegebenen Punkt, der nicht auf ihr liegt, eine senkrechte Linie <Lot> zu ziehen») bemerkt nämlich der Kommentator PROKLOS[84] :

«Dieses Problem machte zuerst OINOPIDES zum Gegenstand seiner Forschung, da er es für die Astronomie für nützlich hielt. Er nennt aber die Senkrechte in altertümlicher Weise *nach dem Gnomon* (κατὰ γνώμονα), weil auch der Gnomon mit dem Horizont rechte Winkel bildet.»

Man hat sich schon mehrmals gefragt: Wie ist es möglich, daß die Antike die historische Rolle des OINOPIDES im Zusammenhang mit einer so einfachen und elementaren Konstruktion wie derjenigen in EUKLIDS *Elem.* I 12 erwähnenswert fand? – Anstatt auf dieses Problem einzugehen, erinnere ich hier daran, daß es in der Tat auch *praktisch wichtig* ist, daß der Gnomon genau *senkrecht* auf die horizontale Ebene aufgestellt wird, denn nur so kann man mit ihm mehr oder weniger zuverlässige Messungen vornehmen. Allerdings legt die Tatsache, daß OINOPIDES eben anläßlich einer solchen für die Astronomie auch praktisch wichtigen Konstruktion sich des archaischen Ausdruckes κατὰ γνώμονα bediente, die Vermutung nahe, daß er dieses Instrument wohl auch für wissenschaftliche Zwecke benutzt hat.

---

83. Vgl. K. v. FRITZ s.v. *Oinopides* in *RE*, 34. Halbband 1937, Sp. 2258 ff.
84. PROCLUS, *In Eucl. (F)* 283.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Der andere Bericht, der auch in zwei kurzen Glossen erhalten blieb, erwähnt zwar den Gnomon überhaupt nicht, aber der Inhalt der Mitteilung erinnert den Leser doch an dieses Instrument.

a ) Es heißt nämlich einmal in den *Placita* des AETIUS[85], daß OINOPIDES die sog. Schiefe des Zodiakus-Kreises[86] für seine eigene Erkenntnis hielt.

b ) Im Grunde demselben Gedanken begegnet man auch bei THEON von Smyrna, der sich sogar – wie vorhin gesagt[87] – auf EUDEMOS berief: Auch dieser Schüler des ARISTOTELES schrieb das Verdienst, die Ekliptikschiefe erkannt zu haben, dem OINOPIDES zu. THEON selber sagt am Ende desselben Berichtes – wie davon schon oben unter *Punkt 1.* die Rede war – doch nur soviel, daß nach einigen früher genannten (THALES, ANAXIMANDROS und ANAXIMENES) «a n d e r e erkannt hätten, die Ekliptikschiefe mache $24^0$ aus».

Es fällt nun angesichts dieser Formulierungen zunächst auf, daß die «Schiefe der Ekliptik» in der Antike *mehreren* als Entdeckung zugeschrieben wurde. PLINIUS (*N.H.* II 31), der darin ein Verdienst des A N A X I M A N D R O S erblicken wollte, datiert auch die Erkenntnis: *olympiade quinquagesima octava* (=548-545). Doch steht in den *Placita* des AETIUS an der Stelle des ANAXIMANDROS P Y T H A G O R A S[87a]. Und schließlich wird als dritter «Entdecker» O I N O P I D E S genannt. – Die vorsichtige moderne Interpretation wird aus diesen Berichten nicht mehr entnehmen wollen als bloß soviel, daß es sich nach der *communis opinio* der Antike offenbar um *eine sehr alte Entdeckung* handelte – selbst wenn nur der dritte «Entdecker» in Betracht kommen sollte.

Aber eine völlig andere Perspektive bekommen auch diese unsicheren Berichte, wenn man daran denkt, daß OINOPIDES der älteste Wissenschaftler war, dessen Name Anlaß für die Quelle bot, *das archaische Maß der Ekliptikschiefe* ($24^0$) zu erwähnen. (Nirgends wird das Auffinden dieses Maßes dem ANAXIMANDROS oder dem PYTHAGORAS – den beiden anderen vermeintlichen «Entdeckern» – zugeschrieben.) Es wurde außerdem auch schon in einem früheren Kapitel dieses Buches – anläßlich der Horologium-Erörterungen des *Vitruvius* – darauf hingewie-

---

85. AETIUS, *Placita* II 12, 2 (vgl. in H. DIELS, *Doxographi Graeci*, Berolini 1879).

86. Hier λόξωσις genannt, sonst gewöhnlich λοξότης. Wohl eben diese Form hat H. DIELS auf den Gedanken geführt, die verdorbene Form διάζωσιν im Text des THEON von Smyrna (ed. HILLER, Lipsiae 1878, S. 198) auf λόξωσιν zu korrigieren. Darüber schrieb K.v. FRITZ in *RE*, 34. Halbband 1937, Sp. 2260: «Die Konjektur von DIELS λόξωσιν anstatt διάζωσιν ist unzweifelhaft richtig.»

87. Siehe oben Anm. 81.

87a. Ihm gegenüber habe nämlich OINOPIDES die *eigenen Verdienste* um die Entdeckung betonen wollen.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



sen, daß man dieses Maß (24°) ursprünglich mit der Konstruktion des regelmäßigen Fünfzehnecks erhalten hatte. Eben die Konstruktion des Fünfzehnecks, als unerläßliche Vorbedingung für das von VITRUVIUS erstellte Gnomon-Weltbild, hat uns schon in den vorangehenden Kapiteln ermöglicht, zumindest die Anfänge desselben wissenschaftlichen Weltbildes mit großer Wahrscheinlichkeit auf die voreuklidische Periode zu datieren. Denn es ist ja eine mit antikem Zeugnis belegte Tatsache, daß in voreuklidischer Zeit die Seite des regelmäßigen Fünfzehnecks (als Sehne zum Zentriwinkel von 24°) das Maß für die «Entfernung beider Pole voneinander» war. Und eben unter Hinweis auf den altpythagoreischen Ursprung sowohl des regulären Fünfecks wie auch des Fünzehnecks hat man vor einigen Jahrzehnten schon versucht, die Stelle bei THEON SMYRNAEUS als einen Beleg dafür aufzufassen, daß in der Tat OINOPIDES das alte Maß für die Ekliptikschiefe (24°) gefunden habe[88].

Ich muß dies nur noch mit der Frage ergänzen: Inwiefern genügt eigentlich die Konstruktion des regelmäßigen Fünfzehnecks zum approximativen Messen der Ekliptikschiefe? – Offenbar muß das betreffende Polygon in *denselben Kreis* eingeschrieben sein, der auch die Ekliptikschiefe veranschaulicht. Nur so kann man nämlich zeigen, daß eine Seite dieses Polygons genau (oder eher nur: *beinahe*) der Entfernung beider Pole voneinander gleich ist. – Ich hoffe, daß die vorangehende VITRUVIUS-Interpretation schon gezeigt hat, daß ein solcher Kreis eben mit dem Gnomon als Radius und mit der Gnomonspitze als Zentrum geschlagen wurde. Darum vermute ich nun, daß OINOPIDES das Maß für die Ekliptikschiefe (24° bzw. die Seite des regulären Fünfzehnecks als Sehne) gerade mit Hilfe jener Gnomon-Konstruktion finden konnte, deren Ursprung vorhin auf ANAXIMANDROS zurückgeführt wurde.

### *3.) HERODOT*

Der Bericht des mit OINOPIDES gleichaltrigen HERODOT über den Gnomon wurde vorhin schon in vollem Umfang zitiert. Es ist nicht nötig, hier darauf zurückzukommen. Man wird später, in einem anderen Zusammenhang, sehen, daß auch dieser Bericht – vom Gesichtspunkt der *wissenschaftlichen Anwendung* des Gnomons aus – mindestens einen wichtigen Hinweis enthält[88a].

---

88. K. v. FRITZ a.a.O.

88a. [Korrektur-Note] Es sei hier auch auf meine inzwischen veröffentlichte Arbeit hingewiesen: A. SZABÓ, *Astronomische Messungen bei den Griechen im 5. Jahrhundert*

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



## 4.) Pytheas

Wann hat man entdeckt, daß die Länge des Mittagschattens von einem Gnomon nicht nur von der Jahreszeit, sondern auch von der *geographischen Lage* des Beobachtungsortes abhängig ist? Seit wann kennt man den Begriff der *«Entfernung vom Äquator»* (= *«Krümmung des Himmelsgewölbes»* = κλῖμα, und auch *«Krümmung* der mit dem konkaven Himmelsgewölbe parallelen konvexen *Erdoberfläche»*)? Seit welcher Zeit weiß man, daß der *Winkel,* mit dem man diese «Entfernung vom Äquator» (also: τὸ κλῖμα, die «Krümmung») einem Meridian entlang messen kann, dem *Winkel der Polhöhe* daselbst gleich ist? Und seit wann sammelte man die Gnomon-Zahlen, d.h. die Längenverhältnisse des Gnomons und seines Mittagschattens an einem bestimmten Tag des Jahres, um aus diesen Angaben die «Krümmung» des Beobachtungsortes in Winkelgraden zu berechnen[89]?

Man muß offen zugeben, daß wir gar keine Antworten auf diese Fragen wissen. Ja, es sei mir erlaubt, hier mit Nachdruck zu betonen, daß meines Wissens diese Fragen bisher auch noch nie gestellt wurden – ein Zeichen dafür, wie wenig wir einstweilen von der historischen Entwicklung der antiken Wissenschaft kennen.

Aber es ist eine Tatsache, daß die angedeuteten Kenntnisse etwa im zweiten Drittel des 4. Jahrhunderts, zur Zeit des Pytheas, vorhanden sein mußten, denn sonst hätte der Reisende aus Massalia den Parallelkreis seiner Vaterstadt nicht mit einer Gnomon-Messung zur Sommerwende bestimmen können. Überlegt man sich, daß im Sinne des vorangestellten Rekonstruktionsversuches ein Jahrhundert v o r Pytheas der Astronom *Oinopides von Chios* vielleicht noch nichts mehr als die Ekliptikschiefe messen konnte (24°), so bedeutet das Parallelkreis-Messen des Pytheas zweifellos einen großen Schritt vorwärts. Wir werden schwerlich jemals genau sagen können, wie diese Errungenschaft in der Zwischenzeit Schritt für Schritt erzielt wurde. Wir können höchstens versuchen, einiges von der vermutlichen Entwicklung zu rekonstruieren.

---

*v.Chr. und ihr Instrument* in: *Historia Scientiarum* (The History of Science Society of Japan, Tokyo) No. 21, 1981, 1-26.

89. Das Problem der babylonischen «Gnomon-Tafeln» (vgl. z.B. B.L.v.d. Waerden, op. cit. 80 ff.) lasse ich hier einstweilen unberücksichtigt – nicht nur deswegen, weil ich zuerst die griechische Wissenschaft etwas besser verstehen möchte, bevor ich es wage, nach ihren Zusammenhängen mit ähnlichen Erscheinungen im älteren Orient zu fragen, sondern auch deswegen, weil mir Zweck und Ziel dieser orientalischen Tafeln eigentlich noch nicht klar geworden ist. Zu welchem Zweck haben die *Babylonier* die Schattenlängen registriert? Was wollten und was konnten sie daraus erfahren?

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



*5.) Euklid*

Euklid hat seine *Elemente* rund um 300 v.Chr. in Alexandria zusammengestellt. Er mag also, im Vergleich zu Pytheas, kaum mehr als *eine* Generation jünger gewesen sein. Sein Werk scheint – vom Gesichtspunkt unseres historischen Interesses aus – zunächst nicht sehr ergiebig zu sein. Es kommt bei ihm auch der Name unseres Instrumentes gar nicht vor, d.h. er versteht unter «Gnomon» etwas völlig anderes[90].

Und doch gibt es bei ihm zahlreiche Sätze, die unmittelbar in der Astronomie benutzt wurden oder deren Ursprung auf die Astronomie zurückgeht. Proklos bemerkt z.B. anläßlich des Satzes 7. im Buch I. der *Elemente*:[91] Der Beweis von ihm sei «den Astronomen auf dem Gebiete der Finsternisse von außerordentlichem Nutzen. Denn mit seiner Hilfe könne man beweisen, daß drei aufeinanderfolgende Verfinsterungen *in gleichen Zeitabschnitten voneinander* nicht stattfinden können». Und aus diesem Anlaß fügt Proklos jene Bemerkung in sein Werk ein, die für uns auch vorhin schon in der Vitruvius-Interpretation so wesentlich war. Es sei hier die Stelle in vollem Umfang zitiert :

«Und nicht bloß diesen hat der Verfasser der *Elemente* als zweckdienlich für die Astronomie beiläufig bewiesen, sondern auch viele andere Lehrsätze und Probleme. Das letzte z.B. im 4. Buche (IV 16), in welchem er die Seite des Fünfzehnecks dem Kreis einschreibt, warum legt er das wohl vor, wenn nicht wegen der Beziehung dieses Problems zur Astronomie? Schreibt man nämlich *in den durch die Pole gehenden Kreis das Fünfzehneck ein,* so erhält man den Abstand der Pole vom Äquator und vom Tierkreis. Denn ihr Abstand voneinander beträgt die Seite des Fünfzehnecks. Es scheint also, daß der Verfasser der *Elemente* im Hinblick auf die Astronomie auf viele Beweise Vorbedacht genommen habe, um uns auch auf diese Wissenschaft vorzubereiten.»

Der Name «Gnomon» wird zwar auch hier nicht gebraucht, aber der Ausdruck *«der durch die Pole gehende Kreis»* ist doch völlig eindeutig. Es handelt sich *selbstverständlich* um jenen Kreis, den man mit dem Gnomon als Radius und mit der Gnomonspitze als Zentrum schlägt. Wäre nämlich der hier genannte «Kreis» bloß der *gedachte Kolur* am Himmel, so könnte man ihm gar kein Fünfzehneck einbeschreiben. Die Konstruktion des Polygons als Maß für die Ekliptikschiefe wird erst dann möglich, wenn man vorher mit Hilfe des Gnomons ein Spiegelbild des Weltalls hergestellt hat.

---

90. *Elem.* II def. 2; vgl. auch oben S. 48 Anmerkung 28a.
91. Proclus op. cit., S. 269. (Schönberger, S. 353).

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Es ist vielleicht nicht überflüssig, hier auch noch zu erklären, wieso im vorigen Zitat die «Ekliptikschiefe» als *Abstand der beiden Pole voneinander* bezeichnet wird. Ich habe bisher (vgl. dazu etwa *Fig. 7.*) die *Hälfte des Bogens zwischen den Wendepunkten* als «Ekliptikschiefe» (ε) bezeichnet. – Es besteht natürlich gar kein Widerspruch zwischen den beiden Ausdrucksweisen. Man überlege sich nämlich folgendes :

Errichtet man die Senkrechte auf dem Äquator *(NF)* im Punkt der Gnomonspitze, so bekommt man die Erdachse *(PQ)*; die gedachte Verlängerung von dieser ist die Weltachse (oder Himmelsachse), und der Schnittpunkt der Himmelsachse mit dem Himmelsgewölbe ist der *Himmelspol.* (Wir berücksichtigen diesmal nur die obere, die nördliche Hemisphäre.) Errichtet man dagegen die Senkrechte in demselben Punkt der Gnomonspitze *auf dem Mittagstrahl der einen Sonnenwende,* so bekommt man auch eine «Achse»[91a] – nämlich diejenige der Ekliptik (d.h. der scheinbaren Sonnenbahn am Himmelsgewölbe) –, und der Schnittpunkt von dieser mit dem Himmelsgewölbe ist der sog. *Pol der Ekliptik.* Natürlich ist der Bogen (Winkel) zwischen den beiden Polen – Himmelspol und Pol der Ekliptik – ebenso groß wie zwischen jenen Geraden, auf denen die gedachten Achsen senkrecht sind (d.h. also ε auf *Fig. 7.).* Darum kann nun sowohl die «Hälfte des Bogens zwischen den Wendepunkten» wie auch der «Abstand beider Pole voneinander» als die «Schiefe der Ekliptik» gelten.

*

Man ersieht aus dem angeführten PROKLOS-Zitat, daß es eine Überlieferung der Alten gab, wonach in *voreuklidischen Zeiten* das Maß für die Ekliptikschiefe die Seite des regulären Fünfzehnecks war. Ja, EUKLID habe eben im Hinblick auf diese Tatsache die Konstruktion des betreffenden Polygons in seine *Elemente* aufgenommen. Nun ist diese Tradition in bestem Einklang mit unserem vorigen Versuch, das Entdecken des betreffenden astronomischen Maßes dem *OINOPIDES von Chios,* etwa 100-130 Jahre v o r EUKLID, zuzuschreiben.

Der Kommentator behauptet jedoch daselbst, daß man im Werk des EUKLID auch noch «viele andere Lehrsätze und Probleme» findet, die von astronomischem Gesichtspunkt aus ähnlich interessant sind. Eben diese Bemerkung berechtigt uns zu fragen, ob man aus den *Elementen* nicht auch die Benutzung des Gnomons für wissenschaftliche Zwecke in älteren Zeiten belegen könnte.

---

91a. Diese andere «Achse» habe ich in der *Fig. 7.* nicht mehr kenntlich gemacht. Aber ich glaube, man wird sie im Gedanken leicht ergänzen können.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Ich glaube in der Tat, auf einen wichtigen Euklidischen Satz *(Elem. III 36)* hinweisen zu können, dessen Erkenntnis – wie mir scheint – ohne eine längere und vertiefte Untersuchung der Gnomon-Probleme wohl gar nicht möglich gewesen wäre. Man überlege sich nämlich folgendes :

Unserer Rekonstruktion nach soll PYTHEAS schon etwa 30-40 Jahre v o r der Abfassung der *Elemente* durch EUKLID die Gnomon-Verhältniszahl bei Sommerwende für Massalia festgestellt haben: $120 : \left(42 - \frac{1}{5}\right)$. Ähnliche auch bis dahin schon erwähnte Gnomon-Verhältniszahlen, wie 4:3 (Athen), 7:5 (Rhodos), 5:3 (Alexandria) u.a.m., gelten für die Tag- und Nachtgleiche. Obwohl diese letzteren Zahlenpaare und auch andere ähnliche erst für spätere Zeiten, n a c h PYTHEAS, belegt sind, müssen manche von ihnen bedeutend älter sein als die Zeit des PYTHEAS. Das erschließe ich einfach aus der Tatsache, daß PYTHEAS sich so *hoher Zahlen* bediente. Er erstrebte offenbar eine größere Genauigkeit als die vor ihm übliche. Man hat in allen diesen Fällen mit dem Verhältnis des Gnomons und seines Mittagschattens zu tun. Ja, es werden für jeden Ort *drei* solche *variablen* Verhältnisse angegeben: das Verhältnis bei Sommerwende, beim Äquinoktium und bei Winterwende. So werden diese Zahlenpaare auch in dem vorhin schon ausführlich behandelten Kapitel bei PTOLEMAIOS (*Almagest* II 6) registriert. Eine *konstante Größe* ist in allen Fällen nur der Bogen zwischen den Wendepunkten, den man aus den miteinander zusammenhängenden *variablen* Gnomon-Zahlen berechnen kann. Aber wäre es nicht möglich, auch noch eine andere *Konstante* in diesen Verhältnissen nachzuweisen?

Fasse man nur die drei Skizzen *(a, b* und *c)* der *Fig. 11.* ins Auge. Es sind schematische Darstellungen des Gnomons zur Mittagszeit der beiden Sonnenwenden *(a* und *c)* und des Äquinoktiums *(b).* Man sieht sofort, daß die drei Schatten – $s_a$, $s_b$ und $s_c$ – unterschiedlich lang sind. Der Gnomon *(g)* selber ist zwar an unserer Figur in allen drei Fällen derselbe – wie auch bei PTOLEMAIOS der Gnomon immer $60^p$ lang ist. Stellt man jedoch das Verhältnis der beiden Größen (Gnomon und Schattenlänge) mit *Wechselwegnahme* fest, so braucht dieselbe Länge gar nicht immer notwendigerweise durch dieselbe Zahl ausgedrückt zu sein. – Natürlich sind im vorliegenden Fall auch die drei «längsten Geraden», die die «Sonnenstrahlen» symbolisieren, unterschiedlich lang. Doch diese letzteren Geraden lassen sich – und zwar in allen drei Fällen – auch folgendermaßen zerlegen: ihre Segmente innerhalb der Kreise sind immer die *Doppelten des Gnomons (2g),* und daran schließt sich in allen drei Fällen außerhalb des Meridiankreises je eine kleine unterschiedlich lange Strecke: $x_a$, $x_b$ und $x_c$ an. (Diese letztere Strecke, $x$, ist

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



also der symbolische «Sonnenstrahl» *minus* zweimal der Gnomon.)

Ich glaube, es genügt, auf diese Tatsache aufmerksam gemacht zu haben, und ein jeder Kenner der Elementargeometrie wird sofort einsehen: In allen drei Fällen ist *die Schattenlänge die Mittlere Proportionale zwischen dem ganzen Sonnenstrahl und jenem Abschnitt des Sonnenstrahls, der außerhalb des Meridiankreises dargestellt wird* (d.h. «Sonnenstrahl *minus* zweimal der Gnomon»). Also :

$$(2g + x) : s = s : x$$

ganzer Sonnenstrahl — Schatten — Sonnenstrahl *minus* zweimal der Gnomon

Eben dieser Zusammenhang wird bei EUKLID als Satz *(Elem. III 36)* folgendermaßen formuliert :

*«Wählt man außerhalb eines Kreises einen Punkt* (das ist der Endpunkt des Gnomonschattens) *und zieht man von ihm aus zum Kreis zwei Strecken, von denen die eine den Kreis schneidet* (das ist an unseren Skizzen die längste Strecke, der symbolische «Sonnenstrahl»), *die andere den Kreis berührt* (das ist der Schatten des Gnomons), *so muß das Rechteck aus der ganzen schneidenden Strecke und dem außen zwischen dem Punkt und dem erhabenen Bogen abgegrenzten Stück* (also: $(2g + x) \times x$) *dem Quadrat über der Tangente* ($s^2$) *gleich sein.»*

Der Satz stellt also eigentlich die Gleichheit eines Rechtecks $(2g + x) \times x$ und eines Quadrats $(s^2)$ fest :

$$(2g + x) \times x = s^2$$

Aber man kann diese Gleichung – im Sinne des Euklidischen Satzes, *Elem. VI 17,* (über die Gleichheit des Produktes der äußeren Glieder einer Proportion mit dem Produkt der inneren Glieder, und vice versa) ohne weiteres in die vorhin genannte Proportion umgestalten.

EUKLID führt einen doppelten Beweis für den zitierten Satz: zunächst den ersten für jene *spezielle Form,* die auch unsere Gnomon-Figuren zeigen *(Fig. 11. a, b* und *c),* und dann einen anderen für die *allgemeine Form* desselben. Denn jene Gerade, die man von dem Punkt außerhalb des Kreises zieht und die *den Kreis schneidet,* braucht ja gar nicht unbedingt durch das Zentrum des Kreises hindurchzugehen, wie dies bei unseren drei Gnomon-Figuren der Fall ist. Der Satz ist auch dann gültig, wenn das Zentrum des Kreises völlig außer acht bleibt. Für diesen letzteren, allgemeinen Fall führt EUKLID einen zweiten Beweis. Uns interessiert jedoch im vorliegenden Zusammenhang nur der erste, der spezielle Fall, in dem jene «längste Strecke» nach der Gnomon-

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Darstellung der «symbolische Sonnenstrahl» ist.

Ich vermute nämlich, daß der Satz *III 36* zu allererst eben in jener *speziellen Form* erkannt wurde, deren Illustration durch eine Zeichnung mit der traditionellen Gnomon-Darstellung vollkommen übereinstimmt und für welche spezielle Form auch EUKLID seinen Sonderbeweis vorausschickte.

Einen schlagenden Beweis für meine Vermutung kann ich zwar aus der antiken Überlieferung *nicht* anführen. Aber überlegen wir uns nur: Wie hätte man überhaupt einen solchen *konstanten Zusammenhang* erkennen können, wenn man nicht zuvor das immer wieder andere *Verhältnis des Gnomons und seines Schattens* zueinander untersucht hätte? Diese Frage scheint mir ziemlich einleuchtend zu sein. Die beiden Größen – Gnomon und Schatten – treten ja auch im fraglichen Euklidischen Satz *(Elem. III 36)* auf. Der «Schatten» wird die *Tangente* zum Kreis, und anstatt des «Gnomons» haben wir in der «speziellen Form» des Satzes bei EUKLID sein *Doppeltes (2g)*, den Durchmesser des Kreises, der einen Abschnitt des «symbolischen Sonnenstrahls» ausmacht.

Außerdem scheint mir auch der Euklidische Beweis für die *spezielle Form* des Satzes *(Elem. III 36)* die vorige Vermutung zu unterstützen. EUKLID verweist nämlich zum Beweis auf Satz *Elem. II 6 :*

*«Halbiert man eine Strecke und setzt man ihr irgendeine Strecke gerade an* $[2g+x]$, *so ist das Rechteck aus der ganzen Strecke mit Verlängerung und der Verlängerung* $[(2g+x)\times x]$, *zusammen mit dem Quadrat über der Hälfte* $[g^2]$, *dem Quadrat über der aus der Hälfte und der Verlängerung zusammengesetzten Strecke* $[=(g+x)^2]$ *gleich».*

Ich habe die Anwendung des zitierten Satzes auf den vorliegenden Fall in eingefügten eckigen Klammern angedeutet. Es handelt sich also darum, daß das Rechteck aus der «längsten Strecke» und einem Teil von ihr (siehe z.B. *Fig. 11. c)*, zusammen mit dem Quadrat auf der Hälfte, dem Quadrat des Sonnenstrahls (von der Gnomonspitze ab gerechnet) gleich ist :

$$(2g+x)\cdot x + g^2 = (g+x)^2$$

*Fig. 11.c* zeigt jedoch, daß die Größe auf der rechten Seite dieser Gleichung – $(g+x)^2$ – *Quadrat auf der Hypotenuse eines rechtwinkligen Dreiecks* ist. Man kann darum diese Größe – im Sinne des pythagoreischen Lehrsatzes – mit den Quadraten auf den beiden Katheten ersetzen. Demnach wird die vorige Gleichung :

$$(2g+x)\times x + g^2 = g^2 + s^2$$

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Läßt man von beiden Seiten $g^2$ fort, so bekommt man den zu beweisenden Satz :

$$(2g+x) \times x = s^2$$

bzw. in der Form einer Proportion :

$$(2g+x) : s = s : x$$

Der zum Beweis herangezogene Satz *(Elem. II 6)* ist in der Fachliteratur der antiken Mathematik als die sog. *hyperbolische Flächenanlegung* bekannt. Wir wissen aus dem Werk des Kommentators PROKLOS[92], daß er eine Erfindung der alten Pythagoreer war. Später wird man sehen, welch zentrale Rolle demselben Satz auch in jener Astronomie zufiel, die hier behandelt wird.

### 6.) *PHILON*

Die Angaben des PHILON über die Gnomon-Verhältniszahlen in Äthiopien – von denen wir aus STRABON wissen – sind in diesem Zusammenhang besonders deswegen interessant, weil sie verraten, daß man solches Material in früh-hellenistischer Zeit für die mathematische Geographie wohl schon systematisch gesammelt hat. Dieses Material haben dann ERATOSTHENES, HIPPARCHOS und PTOLEMAIOS in ihren Sammlungen zusammengestellt. Ja, die späteren Systematiker haben in die Zusammenfassungen – wie gesehen – auch die diesbezüglichen Angaben des noch älteren PYTHEAS aufgenommen.

### 7.) *ARISTARCHOS*

Die Tätigkeit des ARISTARCHOS – wohl im ersten Drittel des 3. Jahrhunderts v.Chr. – ist für unsere Rekonstruktion der Entfaltung der Gnomon-Benutzung deswegen wichtig, weil die Nachricht, daß ARISTARCHOS den Gnomon mit einer *σκάφη* – also mit einer konkaven Halbkugel (*hemisphaerium,* vgl. VITRUVIUS IX 8) – ergänzt habe[92a], ein unzweifelhafter Beleg dafür ist, daß man selbstverständlich mit dem

92. PROCLUS op. cit., 418, 15-420, 12. Vgl. auch A. SZABÓ, *Die Muse der Pythagoreer, Historia Mathematica* I, 1974, 291-316.

92a. [Korrektur-Note] Siehe oben Anm. 88a.



ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Gnomon und Gnomonschatten einen B o g e n messen wollte. Einen solchen mit *σκάφη* ergänzten Gnomon benutzte später ERATOSTHENES, als er feststellte, wievielter Teil des ganzen Meridiankreises der B o g e n zwischen Alexandria und Syene ist. Das konkave Kugelsegment des ARISTARCHOS war übrigens ebenso *Spiegelbild* von einem Teil des Himmelsgewölbes, wie auch früher schon – anläßlich des Messens der Ekliptikschiefe – der halbierte Bogen zwischen den Sonnenstrahlen der beiden Wenden *Spiegelbild* von einem Abschnitt des himmlischen Meridians war.

### *8.) ERATOSTHENES*

Was ERATOSTHENES betrifft, muß ich in dieser Zusammenfassung auf zweierlei hinweisen. Ich hoffe nämlich einerseits, wahrscheinlich gemacht zu haben, daß ERATOSTHENES den Gnomon – auch zur Bestimmung der geographischen Breite – schon ebenso benutzt hat wie nach ihm HIPPARCHOS. Es gab in dieser Hinsicht wohl gar keinen wesentlichen Unterschied zwischen den beiden: ERATOSTHENES und HIPPARCHOS. – Aber es wurde oben doch kein Beleg angeführt, aus dem man hätte schließen können, daß ERATOSTHENES auch *Sehnentafeln* besaß. Der Bericht über sein Meridian-Messen sah eher so aus, als hätte ERATOSTHENES die Länge des betreffenden Bogens unmittelbar – ohne sich um die Sehne zu kümmern – zum Kreisumfang gemessen. Auch die Erwähnung bei PTOLEMAIOS (*Almagest* I 12) darüber, wie ERATOSTHENES die Länge des Bogens zwischen den Wendepunkten bestimmt habe, verrät nichts von der Benutzung einer Sehnentafel.

Aber das Fehlen eines solchen Beleges, aus dem man auf die «Sehnentafel des ERATOSTHENES» schließen könnte, mag – meiner Vermutung nach – doch nur aus der Zufälligkeit unserer Überlieferung folgen. Denn auf die viel frühere Existenz einer solchen Tafel – auch in der Zeit lange vor ERATOSTHENES – schließe ich aus der Angabe bei STRABON, wie PYTHEAS den Parallelkreis von Massalia aus der Verhältniszahl des Gnomons bei Sommerwende daselbst berechnet hatte. Es wäre nämlich völlig zweck- und sinnlos gewesen, dieses Verhältnis in so hohen Zahlen (120:41,8) zu bestimmen, wenn man aus der Sehnenlänge nicht den dazugehörigen B o g e n hätte bestimmen wollen; und dies ist ohne eine Sehnen-Berechnung doch nicht möglich.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



### *9.) Hipparchos*

Der Text des Hipparchos war nicht nur Ausgangspunkt unserer Gnomon-Untersuchungen, sondern er bildet auch seine *zentrale Stütze.* Die Tatsache nämlich, daß Hipparchos sowohl die äquinoktiale Verhältniszahl des Gnomons für Griechenland wie auch das «approximative Ergebnis» der Umrechnung dieser Verhältniszahl in Breitengrade in sein Werk aufgenommen hat, ist der Beweis dafür, daß derartige Umrechnungen zu seiner Zeit mit Hilfe von Sehnentafeln ausgeführt wurden. Nachdem diese Umrechnung – unter Berufung auf das Beispiel des Ptolemaios – sich rekonstruieren ließ, konnten wir nach den Vorgängern des Hipparchos fragen. Am überraschendsten war dabei die Tatsache, daß ein ähnliches Gnomon-Verhältnis wie die viel späteren auch unter dem Namen des Pytheas aus dem 4. Jahrhundert v.Chr. erhalten blieb. Dabei war dieses Verhältnis in so hohen Zahlen angegeben (120:41,8), daß sich der Verdacht nicht beseitigen ließ, daß der Messung des Pytheas schon eine *längere Praxis* vorangegangen sein muß. Seine Verhältniszahl ist nur dann sinnvoll, wenn schon Pytheas ähnliche Umrechnungen hatte anstellen können wie diejenigen, die wir für Hipparchos rekonstruiert haben. Wäre es möglich, daß auch Pytheas schon Sehnentafeln besaß? – Diese Schlüsse sollen in den folgenden Untersuchungen irgendwie erhärtet werden.

### *10.) Strabon-Vitruvius*

Man wird in dieser Zusammenfassung anläßlich der beiden letzten Namen vor allem das *Negative* betonen müssen. Denn es ist in der Tat überraschend, daß, obwohl das Werk des Strabon sehr viel nützliches Material für die Gnomon-Untersuchungen enthält, man diese Angaben - allein auf Grund dessen, was man von diesem Schriftsteller darüber erfährt – kaum gebrauchen kann. Das Werk des Strabon enthält nämlich keine einzige Andeutung, aus der man auch nur erahnen könnte, wie die Verhältniszahlen des Gnomons in Breitengrade umgerechnet wurden. Ja, es bliebe, nur nach dem Werk des Strabon, auch noch ein Rätsel, wozu eigentlich von Ort zu Ort diese Verhältniszahlen so genau festgehalten wurden? In welchem Sinne verraten die Gnomon-Zahlen überhaupt etwas? Ja, auch der Begriff der «Breitengrade» selbst wird bei dem Geographen eigentlich nur berührt; er sagt nämlich – unter Berufung auf Hipparchos –, daß der Kreis in 360 Teile geteilt werden kann und daß dem 360-sten Teil des Meridiankreises 700

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Stadien entsprechen. Aber nirgends werden bei ihm die dem Äquator parallelen Kreise numeriert – wie später bei PTOLEMAIOS von 1 bis 39. Noch weniger verrät STRABON die Kenntnis davon, daß man auch aus der Zeitdauer des längsten Tages die geographische Breite des betreffenden Ortes berechnen kann – obwohl eben diese Angabe (die Dauer des längsten Tages) auch bei STRABON, ebenso wie später bei PTOLEMAIOS, immer an erster Stelle registriert wird. – Und doch beeinträchtigen diese ernsthaften Mängel kaum die Brauchbarkeit jenes reichen und wertvollen Materials, das STRABON aus den Vorlagen abgeschrieben und in seiner Kompilation für die Nachwelt angehäuft hat.

Auch der mit STRABON gleichaltrige VITRUVIUS scheint vom Sinn der bei ihm selbst überlieferten Gnomon-Zahlen nicht sehr viel zu wissen. Wohl weiß er, daß die Unterschiedlichkeit dieser Zahlen irgendwie mit der *declinatio caeli* im Zusammenhang steht. Er kennt auch den praktischen Gebrauch dieser Zahlen bei der Herstellung eines Horologiums. Ohne seine im Grunde tadellose Schilderung hätten wir das alte Gnomon-Weltbild gar nicht rekonstruieren können. Aber hat er auch den Begriff des «Breitengrades» gekannt? Wußte er auch davon, wie man die Gnomon-Zahlen in Zentriwinkel und Peripheriewinkel umrechnet? Und hat er eine Sehnentafel jemals in der Hand gehabt? – Ich sehe in seinem Werk keine Andeutung, die das Beantworten dieser Fragen ermöglichte.

### *11.) PTOLEMAIOS*

Ohne PTOLEMAIOS hätten wir natürlich gar kein konkretes Bild davon, wie die Sehnentafeln der Griechen in Wirklichkeit aussahen. Ja, wir wüßten auch nicht, wie die Gnomon-Zahlen in Winkelgrade umgerechnet wurden. Wir könnten zwar auch so – ohne das Werk des PTOLEMAIOS jemals gesehen zu haben – unsere (modernen) Winkelfunktionen z.B. auf die bei VITRUVIUS überlieferten Gnomon-Verhältnisse anwenden; und es wäre auch nach einer solchen Probe erstaunlich genug, daß man aus derartigen Angaben der Antike die geographischen Breiten der betreffenden Orte zumindest «annähernd genau» bestimmen kann. Aber die anspruchsvollere historische Forschung könnte sich mit einer solchen Anwendung *unserer* wissenschaftlichen Mittel auf die alten Verhältniszahlen kaum begnügen. Es bliebe immer noch fraglich, ob wir nicht etwas in die alten Angaben hineinprojizieren, woran man in der Antike vielleicht gar nicht gedacht hat.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Das Werk des PTOLEMAIOS bildet also eine wichtige Stütze unserer Gnomon-Rekonstruktionen. Aber man vergesse nicht, daß derselbe Gnomon eben für solche Zwecke, für die dieses Instrument offenbar zur Zeit des HIPPARCHOS, und noch früher, gedient hat, bei PTOLEMAIOS nicht mehr gebraucht wird. Der Bogen zwischen den Wendepunkten – und damit auch die Entfernung beider Pole voneinander – wird bei PTOLEMAIOS (*Almagest* I 12) *nicht* mit dem Gnomon, sondern mit einem anderen Instrument gemessen. Auch die Entfernung irgendeines Ortes vom Äquator ab einem Meridian entlang, also die geographische Breite oder Polhöhe, charakterisiert PTOLEMAIOS nie mit Gnomon-Zahlen. – Aber wozu gebraucht er dann den Gnomon?

Einzig und allein dazu, um zu zeigen *(Almagest II 5)*, wie man bei gegebener geographischen Breite eines Ortes (oder was dasselbe ist: bei gegebener Polhöhe) daselbst die Schattenlängen eines solchen Gnomons berechnen kann, dessen Länge ebenfalls gegeben ist. Und dementsprechend registriert er auch in der sog. «Charakteristik der Parallelkreise» (II 6) von Ort zu Ort – d.h. Schritt für Schritt der Breite nach immer weiter nach Norden fortschreitend – die jeweils dazugehörigen drei Schattenlängen. Aber dieses Registrieren der Gnomon-Zahlen ist für PTOLEMAIOS kaum mehr als nur noch eine interessante wissenschaftliche Tradition. Die Zahlen, aus denen man einst wichtige Tatsachen der mathematischen Geographie berechnet hatte, sind bei ihm zu Ergebnissen von interessanten Berechnungen geworden.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΚΑΔΗΜΙΑ
ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens

# II. DER LÄNGSTE TAG

## *1. Das Verhältnis des längsten Tages zum kürzesten*

Das Zitat aus dem Werk des HIPPARCHOS oben in der «Einleitung» dieser Studie machte dem ARATOS-EUDOXOS zum Vorwurf, er sei über die geographische Breite im Irrtum gewesen, wenn er meinte, daß in Griechenland der längste Tag zum kürzesten in dem Verhältnis von 5:3 stehe. Denn wie es später heißt (vgl. oben S. 23 ): «Wo der längste Tag zum kürzesten in dem Verhältnis von 5:3 steht, dort hat der längste Tag eine Dauer von 15 Stunden, während die Polhöhe ungefähr $41^0$ beträgt». Und wie HIPPARCHOS erklärt, sind diese Umstände für Griechenland *nicht* zutreffend, da in Griechenland das äquinoktiale Gnomon-Verhältnis 4:3 ist. «Folglich hat dort der längste Tag eine Dauer von 14 3/5 Stunden, während die Polhöhe ungefähr $37^0$ beträgt.»

Man kann also – wie die eben wiederholten Worte verraten – die Polhöhe eines Ortes (oder anders gesagt: seine geographische Breite, τὸ κλῖμα) nicht nur aus dem äquinoktialen Mittagschatten, sondern ebenso auch aus der Dauer des längsten Tages daselbst berechnen. Hätte die Dauer des längsten Tages in Griechenland in der Tat 15 Stunden – wie ARATOS glaubte –, so müßte dieses Gebiet um den 41. Grad herum liegen – sagt HIPPARCHOS. Da jedoch in Griechenland der längste Tag eine etwas kürzere Dauer hat, kann auch seine geographische Breite nicht so hoch ($41^0$) sein.

Faßt man diesen Gedankengang schärfer ins Auge, so hat man zunächst den Eindruck, als wäre eben die Beobachtung der Zeitdauer des längsten Tages *der ältere Weg* gewesen, um Schlüsse in bezug auf die geographische Breite (τὸ κλῖμα) zu ziehen. Der Irrtum des ARATOS-EUDOXOS, den HIPPARCHOS korrigiert, wäre also etwa auf diese Weise entstanden: ungenaue Bestimmung des längsten Tages – allerdings *nicht* in *Stunden* und ihren Bruchteilen (Minuten), sondern irgendwie mit einer merkwürdigen Zweiteilung des Kreises der Sonnenbahn – und daraus der verfehlte Schluß auf das ἔγκλιμα in den Gegenden von Griechenland.

Für eine solche Annahme – daß man also mit der Beobachtung der unterschiedlichen Zeitdauer des längsten Tages auf den verschiedenen

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Punkten der Erdkugel begonnen hätte und später irgendwie auf diesem Wege zur Berechnung der Breiten-Unterschiede gekommen wäre – könnte auch noch das Folgende sprechen. Auch PTOLEMAIOS schickt in seiner Charakteristik der 39 Parallelkreise (*Almagest* II 6) als erste grundlegende Tatsache immer wieder die genaue Zeitdauer des längsten Tages voraus, und offenbar daraus berechnete er in jedem einzelnen Fall die Entfernung des betreffenden Kreises vom Äquator (die Polhöhe). Ein vorangehendes Kapitel in seinem Werk (II 3) heißt sogar: «*Wie sich aus der Dauer des längsten Tages die Polhöhe bestimmen läßt, und umgekehrt*»[1].

Nun, ich glaube im folgenden dennoch zeigen zu können, daß auch diese Art Berechnungen (aus der Zeitdauer des längsten Tages) durch die alten *Gnomon-Untersuchungen* vorbereitet wurden. Beginnen wir diesmal mit dem auffallenden Ausdruck: «*Verhältnis des längsten Tages zum kürzesten*». Wie kam man zu diesem merkwürdigen Begriff?

Überlegen wir uns das vorhin schon mehrmals besprochene Gnomon-Weltbild noch einmal *(Fig. 12.)* Am Tag der Nachtgleiche scheint die Sonne sich in der Ebene des Äquators zu bewegen. Die Gerade *NAF* veranschaulicht den Durchmesser jenes Kreises, der die scheinbare Sonnenbahn an diesem Tag ist. Der Betrachter wird zwar ursprünglich ebenso in *B* stehend gedacht, wie auch der Gnomon *(AB)* in diesem Punkt aufgestellt ist, aber wenn die Erdkugel symbolisch durch die Gnomonspitze dargestellt wird, verschiebt sich in diesem Bild auch jener Punkt, von dem aus wir uns das Weltall zu betrachten denken: als stünden auch wir dort, wo die Gnomonspitze die unbewegliche Erde in der Mitte des Kosmos symbolisiert. Die Gerade *EAI* zeigt also den Durchmesser unseres Horizontkreises, und von der Sonnenbahn des Äquinoktiums, dem himmlischen Äquator-Kreis, gilt nur die obere Hälfte als «sichtbar». Die untere Hälfte des Äquator-Durchmessers *(AF)* gehört zu jener Kreishälfte, die als «unsichtbar» (unter dem Horizont) gedacht wird.

Dagegen wird die Sonne – wie im Kapitel «*VITRUVIUS*» im ersten Teil dieser Untersuchungen ausführlich erörtert wurde – zur Mittagszeit der Sommerwende im Punkt *L* gedacht. An diesem *längsten Tag* das Jahres scheint sie nämlich einen solchen, mit dem Äquator parallelen Kreis zu beschreiben, dessen Durchmesser die Strecke *LG* veranschaulicht. Allerdings wird auch in diesem Fall vom ganzen Kreis der Sonnenbahn

---

1. Diese Übersetzung durch MANITIUS, 1912 (S. 62) ist *dem Sinne nach* natürlich tadellos. Der Wortlaut des Originals unterscheidet sich von diesem nur deswegen, weil der antike Verfasser auch durch den Titel den engen Zusammenhang des betreffenden Kapitels mit dem vorangehenden betonte.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



nur der Teil *über dem Horizont* als «sichtbar» gedacht. (Sichtbar wird die Sonne, erst wenn sie sich über den Horizont erhoben hat). Zu diesem «sichtbaren» Teil des Kreises gehört das obere (dicker ausgezogene) Segment des ganzen Durchmessers *LG*.

Man vergleiche nun mit diesem Kreis der scheinbaren Sonnenbahn am Tag der *Sommerwende* den anderen Kreis der *Winterwende*. Am *kürzesten Tag* des Jahres (zur Winterwende) scheint die Sonne zu Mittag im Punkt *K* zu stehen. Den Durchmesser der scheinbaren Sonnenbahn an diesem kürzesten Tag des Jahres veranschaulicht die Strecke *KH*. Auch von diesem letzteren Durchmesser habe ich das Segment über dem Horizont dicker ausgezogen.

Ich glaube, es genügt ein Blick auf die dicker ausgezogenen Segment-Teile der beiden Durchmesser – von *LG* und *KH* –, um einzusehen, daß eben diese Segment-Stücke jenes *«Verhältnis des längsten Tages zum kürzesten»* verenschaulichen, von dem in unserem HIPPARCHOS-Text die Rede ist.

Damit hoffe ich, nicht nur den Zusammenhang der antiken, auf den «längsten Tag» bezüglichen Berechnungen mit den alten Gnomon-Untersuchungen wahrscheinlich gemacht zu haben, sondern mir scheint dieser Hinweis auch noch die folgenden drei Dinge besser zu beleuchten:

1. Ich habe schon in der «Einleitung» auf die nur *scheinbare* Inkonsequenz im Zitat aus dem Text des HIPPARCHOS aufmerksam gemacht[2]. ARATOS bezieht das Verhältnis 5:3 auf den Sommerwendekreis (θερινὸς τροπικὸς scil. κύκλος): 5 Teile von diesem sind *über* dem Horizont (das ist der «längste Tag») und 3 *unter* demselben (das ist die «kürzeste Nacht»). HIPPARCHOS redet dagegen vom «Verhältnis des längsten *Tages* zum kürzesten *(Tag)*». Diese zwei verschiedenen Wendungen – «längster Tag – kürzeste Nacht» (ARATOS) und «längster Tag – kürzester Tag» (HIPPARCHOS) – sind deswegen untereinander austauschbar, weil der dünne Segment-Teil von *LG unter* dem Horizont e b e n s o l a n g ist wie das dicke Segment-Stück von *KH über* dem Horizont.

2. Ebenso habe ich oben mit einem modernen Zitat auch schon darauf hingewiesen, daß man in der Antike davon überzeugt war, die kürzeste Nacht (des Sommers) sei an einem gegebenen Ort der Erdkugel ebenso lang wie der kürzeste Tag (des Winters) daselbst, was in Wirklichkeit natürlich nicht der Fall ist[3]. Aber unerklärt blieb bisher, wie man diese «Symmetrie» postulieren konnte. Nun scheint das Gnomon-Weltbild eine vollständige Erklärung dafür zu bieten. Ja, es

---

2. Vgl. oben S. 25f.
3. Vgl. Anm. 8. zur «Einleitung».

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



sieht so aus, als hätte man es auch gar nicht für nötig gehalten zu versuchen, die postulierte Symmetrie mit irgendwelchen Messungen zu rechtfertigen. Die geometrische Konstruktion des Gnomon-Weltbildes schien eine überzeugende Garantie für die Annahme zu sein.

3. Ja, ich glaube sogar, daß der Hinweis auf das Gnomon-Weltbild – anläßlich des Ausdruckes *«das Verhältnis des längsten Tages zum kürzesten»* – auch noch eine andere, bisher gar nicht beachtete Eigentümlichkeit jenes HIPPARCHOS-Zitates besser beleuchtet, das wir zum Ausgangspunkt unserer Erörterungen gewählt hatten. – Man frage sich nämlich: Hat etwa ARATOS (EUDOXOS) die Zeitdauer des längsten Tages irrtümlich gemessen, und hat ihn dieser Irrtum zu einem falschen Bild über die geographische Breite geführt? – Der Satz, mit dem HIPPARCHOS seine Kritik beginnt, spricht n i c h t für eine solche Vermutung. Es heißt nämlich: «ARATOS scheint über die geographische Breite im Irrtum zu sein, wenn er meint, daß sie in den Gegenden von Griechenland *zur Folge habe,* daß der längste Tag zum kürzesten in dem Verhältnis von 5:3 stehe». – Die Formulierung dieser Worte legt ziemlich eindeutig einen anderen Verdacht nahe: Die irrtümliche Bestimmung des Verhältnisses vom längsten Tag zum kürzesten scheint nur die K o n s e q u e n z eines anderen Irrtums zu sein. – Noch mehr erhärtet wird derselbe Verdacht, wenn man sich die nächste Frage stellt: Hat etwa HIPPARCHOS die Zeitdauer des längsten Tages in Griechenland genauer gemessen und seine Korrektur des durch ARATOS (EUDOXOS) begangenen Irrtums darauf gegründet? – Keineswegs. Der Text besagt völlig unmißverständlich: «Darüber ist man jedenfalls einig, daß in den Gegenden von Griechenland der Schattenzeiger zum Mittagschatten der Tag- und Nachtgleichen in dem Verhältnis von 4:3 steht. F o l g l i c h hat dort der längste Tag eine Dauer von etwa 14 3/5 Stunden, während die Polhöhe ungefähr $37^0$ beträgt.» HIPPARCHOS ging also in seiner Widerlegung des ARATOS vom äquinoktialen Gnomon-Verhältnis in Griechenland aus. Damit begründete er seine Behauptung, daß die Zeitdauer des längsten Tages in Griechenland eine andere sein muß als diejenige, die man aus den Worten des ARATOS erschließen kann.

Demnach glaube ich vermuten zu dürfen, daß man das *«Verhältnis des längsten Tages zum kürzesten»* ursprünglich gar nicht auf dem Wege des Messens der Zeitdauer (der Nacht oder des Tages) mit Hilfe einer Sanduhr oder einer Klepsydra festzustellen versuchte. Man hat eher mit dem Gnomon und seinem Mittagschatten (beim Äquinoktium oder bei Sommerwende) das schon bekannte Weltbild konstruiert, und man hat daran die Segment-Stücke der Durchmesser von beiden Wendekreisen

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



über dem Horizont miteinander verglichen[3a].

*

Es sei am Ende dieses Kapitels auch noch darauf hingewiesen, wie man mit dem Gnomon-Weltbild den Zusammenhang der geographischen Breite und des Verhältnisses vom längsten Tag zum kürzesten in der Tat konkret illustrieren kann. Wie bekannt, wird der Unterschied in der Zeitdauer der Tage umso *weniger* auffallend, je mehr man sich dem Äquator nähert. Am Äquator selbst gibt es überhaupt keinen längsten und kürzesten Tag. Alle Tage und Nächte dauern hier je 12 Stunden. Die Entfernung des Punktes *B* vom Äquator illustriert nun an den beiden Figuren *13 a* und *b* der kürzere bzw. der längere Bogen *BF*. (Der in Graden gemessene kleinere Winkel φ, *Fig. 13 a,* oder der größere φ′, *Fig. 13 b,* ist die geographische Breite des Punktes *B*). Aber die Darstellung zeigt auch dies: Je nach dem, ob der Bogen kürzer oder länger ist, so ändert sich das Verhältnis der beiden dicker ausgezogenen Segmente *LS* und *KU* zueinander – der Abschnitte der Durchmesser der beiden Wendekreise über dem Horizont – wie auf *Fig. 13 a* oder 13 *b.* Man sieht also in der Tat, wie mit dem Sich-Verändern der «Breite» des Beobachtungsortes sich auch das Verhältnis des längsten Tages zum kürzesten verändert.

## *2. Die Umgestaltung des Gnomon-Weltbildes*

Zweifellos hat HIPPARCHOS aus der Dauer des längsten Tages die geographische Breite des Beobachtungsortes ebenso zu berechnen vermocht, wie er auch imstande war, diese Aufgabe auf Grund der Kenntnis des äquinoktialen Gnomon-Verhältnisses zu lösen. Es werden zwar in seinem Text dem Leser die Berechnungen nicht vorgelegt, aber die Ergebnisse werden mehrmals angedeutet. Versucht man nun zu rekonstruieren, auf welchem Wege wohl HIPPARCHOS seine Ergebnisse erhielt, so muß man wiederum den Text des PTOLEMAIOS zu Rate ziehen, ebenso wie wir die Gnomon-Berechnungen des HIPPARCHOS durch PTOLEMAIOS kennengelernt haben. Es wurde vorhin auch schon das betreffende Kapitel des PTOLEMAIOS (II 3) zumindest dem Titel nach zitiert (s. oben S. 136 ). Man findet dabei die *Figur,* auf die die Erklärungen Bezug

---

3a. Vgl. auch weiter unten, S. 160f., wie HYPSIKLES – meiner Erklärung nach – das Verhältnis des längsten Tages zum kürzesten in Alexandria zu bestimmen versuchte: «χρώμενοι ταῖς ἀπὸ τῶν γνωμόνων γιγνομέναις μεσημβριναῖς σκιαῖς τροπικαῖς».

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



nehmen, in der maßgeblichen Textausgabe von J.L. HEIBERG dem vorangehenden PTOLEMAIOS-Kapitel (II 2) beigefügt[4].

Zuallererst muß ich die historische Entstehung dieser Figur erklären. Allerdings berücksichtige ich dabei die Figur nicht in der Form, wie sie bei HEIBERG abgedruckt ist, sondern wie sie beim Übersetzer MANITIUS abgeändert wurde[5]. Denn ich schließe mich in der Tat der Ansicht des trefflichen Übersetzers an, der trotz seiner Hochschätzung des HEIBERG-Textes dennoch bemerken mußte:[6] «Hinsichtlich der Figuren, die HEIBERG mit etwas zu großer Treue vielfach in ungenauer Zeichnung, ja oft in fehlerhafter Gestalt aus den Handschriften in seine Ausgabe herübernommen hat, erschien es angezeigt, manche Abänderungen vorzunehmen».

Wir wollen nun verstehen, wie jene grundlegende Figur entstand, die die Berechnungen aus der «Zeitdauer des längsten Tages» ermöglichte und die hier nach MANITIUS als *Fig. 14 b* wieder abgedruckt wird[7]. Man fasse vor allem das schon wohlbekannte, aber hier etwas vereinfachte Gnomon-Weltbild ins Auge: *Fig. 14 a.*

Der Gnomon selbst *(AB)* wird hier nur als Radius des *Meridiankreises* benutzt, wobei die Gnomonspitze – wie gewöhnlich – das Zentrum bildet. Von den drei Schatten berücksichtigen wir diesmal nur das Ende des *äquinoktialen Mittagschattens* (Punkt *M*), aber auch dies nur, damit es zusammen mit der Gnomonspitze die Richtung des *äquinoktialen Mittagstrahls* ergibt. *NAF* ist also *Durchmesser des himmlischen Äquators.* Die waagerechte Linie *EAI* ist Durchmesser des *Horizontes.* Der Durchmesser des Sommerwendekreises wurde diesmal fortgelassen; nur seine Schnittpunkte – oben an der «sichtbaren» und unten an der «unsichtbaren» Hälfte des Meridiankreises – wurden angedeutet. Auch vom Durchmesser des *Winterwendekreises* wurde nur der «sichtbare» Teil oben *(KU)* ausgezogen; der «unsichtbare» Teil desselben wurde nur als gestrichelte Linie unter dem Horizont angedeutet. Und zum Schluß haben wir in Punkt *A* der Gnomonspitze die Senkrechte auf den Äquator-Durchmesser gestellt, so erhielten wir die *Weltachse PQ.* Auf diese Weise sieht man nämlich, daß der Bogen $\widehat{BF}$ – die «Entfernung

4. HEIBERG, 1898, S. 90.
5. MANITIUS, 1912, S. 60.
6. MANITIUS, 1912, S. XXII.
7. Die *Fig. 14 b* ist also dieselbe wie bei MANITIUS. Doch benutze ich zur Bezeichnung der entscheidenden Punkte andere Buchstaben, nicht dieselben, die man bei MANITIUS und auch nicht diejenigen, die man im HEIBERG-Text findet. Ich behalte nämlich *möglichst* die Buchstaben der VITRUVIUS-Interpretation in diesem Buch bei. Ich hoffe, daß dies einerseits die Lektüre erleichtert, und andrerseits weist es auch darauf hin, daß es sich im Grunde immer um dieselbe Figur handelt.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



vom Äquator», gemessen mit dem Winkel φ – ebenso groß ist wie φ′, die Polhöhe.

Vergleicht man nun mit diesem Gnomon-Weltbild seine weiterentwickelte Variante *(Fig. 14 b)*, so fällt vor allem auf, daß im letzteren Fall der Gnomon selber gar nicht mehr gebraucht wird. Der *Meridian* wurde unverändert als *ganzer Kreis* beibehalten. Aber anstatt des Horizont-Durchmessers *(EAI* auf *Fig. 14 a)* sieht man diesmal seinen, dem Betrachter zugewandten *Halbkreis: EAI.* Ein anderer *Halbkreis* $\widehat{NAF}$ veranschaulicht jetzt den *Äquator* (anstatt nur seines Durchmessers, wie auf *Fig. 14 a)*. Und ein dritter Halbkreis wäre auch noch jener, der – anstatt der *Weltachse (PQ)* – die beiden Pole (den Nordpol: *P* und den Südpol: *Q*) miteinander verbinden könnte; aber von diesem letzteren haben wir nur ein Stück, vom Südpol *(Q)* bis zu seinem Schnittpunkt mit dem Äquator (in Punkt *C*), ausgezogen. Das übrige des dritten Halbkreises wurde nur als Punktreihe angedeutet. – Und schließlich haben wir auch jenes Stück des Winterwendekreises, das in der vorigen Figur *dem Segment-Stück KU des Winterwendekreis-Durchmessers* entsprechen würde, bloß als Punktreihe angedeutet. Diese letztere Punktreihe ist natürlich *parallel* zum Kreis des Äquators. Denn die Bahn der Sonne scheint ja auch am Tag der Winterwende (am kürzesten Tag des Jahres) parallel zu ihrer Bahn an Tag- und Nachtgleichen (also zum Äquator) zu sein. Am Tag der Winterwende geht die Sonne in Punkt *U* auf; sie wird morgens an diesem Punkt des Horizontes sichtbar. Und Mittag ist an diesem kürzesten Tag dann, wenn die Sonne vom Punkt *U* aus den Meridiankreis erreicht zu haben scheint.

Faßt man nun die dicker ausgezogenen Teile der *Fig. 14 b* aufmerksamer ins Auge, so fällt vor allem auf, daß *alle vier Bogen:* $\widehat{NA}$, $\widehat{EA}$, $\widehat{NQ}$ *und* $\widehat{QC}$ *je einen Viertelkreis (also je* $90^0$*) ausmachen.* Man überlege sich nämlich im einzelnen: $\widehat{NA}$, die Hälfte des Äquator-Halbkreises, ist natürlich ein Viertelkreis; ebenso auch *EA*, die Hälfte des Horizont-Halbkreises. Doch auf dieselbe Weise je ein Viertelkreis (ein Quadrant, also je $90^0$) sind auch $\widehat{NQ}$, der Meridianbogen, und $\widehat{QC}$, der Bogen jenes größten Kreises (Kolur), dessen Durchmesser die auf den Äquator senkrechte Achse ist. (Man vergesse nämlich nicht, daß die *Fig. 14 b* eigentlich eine *Kugel* veranschaulichen soll, und nur der zweidimensionalen Darstellung zuliebe die vier Quadranten unterschiedlich lang gezeichnet werden mußten).

Aber es ist über diese einfache Feststellung hinaus auch noch ein weiteres Messen möglich, wenn die Dauer des längsten Tages in Stunden (und in ihren Bruchteilen) gegeben ist. Man überlege sich nämlich :

Am Tag der Nachtgleiche wird die Sonne morgens in Punkt *A* des

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Horizontes sichtbar. Da dieser Tag genau 12 Stunden lang ist, wird die Sonne 12 Stunden später drüben, auf der hinteren (auf unserer Darstellung *nicht* sichtbaren) Seite des Horizontes untergehen. Auf der Darstellung ist nur der Mittag-Punkt der Nachtgleiche, *N*, sichtbar, Diesen letzteren Punkt erreicht die Sonne genau *6 Stunden* später, nachdem ihr Aufgehen in Punkt *A* sichtbar wurde. Den Viertelkreis des Äquators, $\widehat{NA}$ ($90^0$) legt die Sonne in *sechs* Äquinoktialstunden zurück; *einer* Äquinoktialstunde entsprechen also $15^0$ (sog. Zeitgrade) ihrer himmlischen Bahn. – Am Tag der Winterwende geht jedoch die Sonne in Punkt *U* des Horizontes auf. An diesem Tag braucht sie nicht 6 Stunden, um ihren Mittagpunkt dort zu erreichen, wo nach der schematischen Darstellung die Punktreihe, von *U* ab aufwärts, aufhört. Diese Punktreihe ist die Hälfte des Tagbogens der Sonne zur Winterwende. Eben dieser Bogen ermöglicht uns zu berechnen, wieviel Grade der Bogen $\widehat{NC}$ des Äquatorkreises ausmacht. Dazu braucht man nur die folgenden zwei Dinge zu berücksichtigen :

1. Die Punkte, die auf unserer schematischen Darstellung *(Fig. 14 b)* mit den Buchstaben *U* und *C* bezeichnet wurden, liegen auf demselben Deklinationskreis, d.h. auf demselben größten Kreis um die Achse der Welt. Und da «sich die Drehung der Sphäre um die Pole des Äquators vollzieht, so ist es klar, daß diese Punkte (*C* und *U*) *gleichzeitig in den Meridian gelangen werden*»[8].

2. Bezieht man nun dieselbe schematische Darstellung auf einen solchen Ort der Erde, wo der längste Tag – wie nach dem obigen ARATOS (EUDOXOS)-Zitat – 15 Äquinoktialstunden dauert, so muß daselbst die kürzeste Nacht (und nach antiker Auffassung auch der kürzeste *Tag*) 9 Stunden lang sein. Der kürzeste Tag hat also daselbst von Sonnenaufgang bis Mittag 4 ½ Stunden. Darum entspricht auf der schematischen Darstellung *(Fig. 14 b)* die Punktreihe von *U* aufwärts bis zum Meridiankreis 4 ½ Äquinoktialstunden. Derselben Zeitspanne entspricht auf dem Äquator der Bogen $\widehat{NC}$. Und da *eine* Äquinoktialstunde $15^0$ der Sonnenbahn (auf dem Äquator) ausmacht, muß die Sonne in *vierundeinhalb* Stunden $67^0\,30'$ auf dem Äquator zurücklegen. An dem untersuchten Ort – wo also der längste Tag des Jahres 15 Stunden hat – kann vom Äquator-Viertel $\widehat{NA}$ ($=90^0$) das Bogen-Segment $\widehat{NC}$ nur $67^0\,30'$ sein. – Folglich wird das übrigbleibende Bogen-Segment $\widehat{CA}$ $22^0\,30'$ ausmachen.

Noch einfacher kann man die Maße der Bogen-Segmente $\widehat{QU}$ und $\widehat{UC}$ feststellen.

---

8. PTOL., *Almagest II* 2 (*MANITIUS*, 1912, *S.* 60).

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Man muß nämlich nur daran denken, daß der Bogen $\widehat{UC}$ gerade die *Entfernung des einen Wendekreises vom Äquator einem größten Kreis entlang* ist. Mit anderen Worten: dieser Bogen mißt *die Hälfte der Entfernung beider Wendekreise voneinander,* er ist die *«Schiefe der Ekliptik»*. Wie schon mehrmals erwähnt, verband man in archaischer Zeit mit diesem Bogen die Seite des regelmäßigen *Fünzehnecks* (als Sehne); er entspricht also einem Zentriwinkel von $24^0$. (Dasselbe Maß wurde, wie PTOLEMAIOS berichtet, später auf $23^0\,51'\,15''$ korrigiert)[9]. Subtrahiert man diesen Wert von $90^0$, so bekommt man den Bogen $\widehat{QU} = (90^0 - 24^0) = 66^0$.

Eine ganz besondere Aufmerksamkeit verdient der Bogen $\widehat{EQ}$. Denkt man nämlich einerseits an jenen *Durchmesser* des Horizont-Kreises, dessen Endpunkt $E$ ist, und andererseits an jene *Achse* der Welt *(PQ),* die sich beide – also der *Horizont-Durchmesser* und die *Achse* – im Zentrum der Kugel schneiden, so sieht man sogleich ein, daß der Bogen $\widehat{EQ}$ gerade jenen Winkel dem Meridian-Kreis entlang mißt, dessen beide Schenkel ein *Horizont-Radius* und die *Weltachse* bilden und dessen Spitze das Zentrum der Kugel selber ist. – Der Winkel, den die Weltachse mit dem Horizont bildet, ist natürlich die *Polhöhe* oder mit anderem Namen: die *«geographische Breite»,* die für jeden beliebigen Ort der Erde selbstverständlich der *«Entfernung des betreffenden Ortes vom Äquator»* gleich ist. (Es darf hier nebenbei auch noch darauf hingewiesen werden, daß der fragliche Winkel, den auf unserer *Fig. 14 b* der Bogen $\widehat{EQ}$ mißt, sozusagen «Scheitelwinkel» zu jenem $\varphi'$ bildet, den man auf *Fig. 14 a* sieht.)

Fasse man nun die *Fig. 15* – eine Wiederholung der dicker ausgezogenen Teile der *Fig. 14 b* – ins Auge. Es fragt sich, ob man nach dieser Figur den Bogen $\widehat{EQ}$ $(=\varphi)$ nicht für einen solchen Ort der Erde berechnen könnte, wo der längste Tag z.B. *15 Stunden* hat. Der Winkel $\varphi$ wäre nämlich die *Polhöhe* (=geographische Breite) des betreffenden Ortes.

Die erwähnte Dauer des längsten Tages am gegebenen Ort impliziert – wie gesehen –, daß daselbst der Bogen $\widehat{NC} = 67^0\,30'$, $\widehat{CA} = 22^0\,30'$, während $\widehat{CU} = \varepsilon = 24^0$ (für jeden Punkt der Erde) und dementsprechend $\widehat{QU} = 66^0$ sind. Offenbar wird man – um $\widehat{EQ}$ berechnen zu können – vor allem wissen müssen, wie lang in Graden die beiden Horizontbogen $\widehat{EU}$ und $\widehat{UA}$ sind. Von diesen letzteren ist einstweilen nur bekannt, daß ihre Summe $90^0$ ausmacht $(\widehat{EU} + \widehat{UA} = 90^0)$. Übrigens heißt der hier mit $\widehat{UA}$ bezeichnete Bogen bei PTOLEMAIOS «der zwischen Äquator und

9. *Vgl. oben S.* 59.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Ekliptik liegende *Horizontbogen*», während ihn die moderne Astronomie – je nachdem, ob er im östlichen oder im westlichen Horizont liegt – *Morgenweite* oder *Abendweite der Sonne* nennt[10].

### *3. Lösung in drei Schritten*

[In diesem Abschnitt fasse ich nur denjenigen Teil des Gedankenganges von PTOLEMAIOS – *Almag. I 13: «Einige den sphärischen Demonstrationen vorauszuschickende Lehrsätze»* – zusammen, der für uns im vorliegenden Zusammenhang unmittelbar wichtig ist. Um den Überblick zu erleichtern, verwende ich andere Buchstabierung, nicht dieselbe, die man bei PTOLEMAIOS findet. Außerdem gebe ich der ganzen Herleitung eine Form, die – meiner Ansicht nach – für den heutigen Leser leichter ist. Doch wird dabei der Gedankengang des Originals strengstens beibehalten].

Unsere Aufgabe ist nun, (an *Fig. 15.*) die Bogenlänge $\widehat{EQ}$ (in Graden ausgedrückt: φ) zu berechnen, wenn sowohl die beiden Bogen $\widehat{NC}$ und $\widehat{CA}$ wie auch ihre Summe ($90^0$) und ebenso auch die beiden anderen Bogen $\widehat{QU}$, $\widehat{UC}$ und ihre Summe ($\widehat{QU}+\widehat{UC}=90^0$) bekannt sind und wenn man außerdem weiß, daß der Bogen $\widehat{NQ}$ ebenfalls $90^0$ ausmacht. Es sei vorausgeschickt, daß uns auch die Sehnentafel des PTOLEMAIOS zur Verfügung steht. Also auch die Sehnen, die die vorhin genannten Bogen unterspannen, dürfen als bekannt gelten, da man diese in der Tafel nach den einzelnen Bogen-Werten ohne weiteres heraussuchen kann. Und wenn man aus diesen Sehnen andere, solche, die nicht gegeben sind, berechnet, wird man auch die zu ihnen gehörigen Bogen-Werte in der Tafel einfach nachschlagen können.

Man wird also anstatt mit Bogen zunächst mit Sehnen rechnen können. Aber es erhebt sich damit eine andere Schwierigkeit.

Man denke sich alle Sehnen, die die Bogen der *Fig. 15.* unterspannen, als *gerade Strecken* – wie etwa die Segmente auf *Fig. 16.* dargestellt sind[10a]. Ich habe an dieser letzteren Figur alle Schnittpunkte der geraden Strecken mit denselben Buchstaben bezeichnet wie die entsprechenden Bogenschnittpunkte auf *Fig. 15.* – Es fragt sich nun vor allem: Dürften denn die geraden Segmente, z.B. *NA, CA* etc. der *Fig. 16.*, etwa als symbolische Darstellungen von solchen Sehnen gelten, die die

---

10. *Vgl. Almagest* II 2 und MANITIUS, 1912, S. 60 Anm. a.
10a. Vgl. HEIBERG, 1898 I., S. 69, bzw. MANITIUS, 1912 I., S. 45.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



entsprechenden Bogen der *Fig. 15.* (also $\widehat{NA}$, $\widehat{CA}$ etc.) unterspannen?[11]

*Keineswegs.* Denn wohl können zwar *NA* und *NQ* der *Fig. 16.* in der Tat *Sehnen* unter den entsprechenden Bogen der *Fig. 15.* sein, aber es gibt an diesen Sehnen einstweilen keine solchen Schnittpunkte wie *E* und *C* der *Fig. 16.* Man überlege sich nämlich folgendes :

*Fig. 17.* wiederhole denselben größten Kreis wie der zu den Bogen auf *Fig. 15.* gehörige und mit denselben Schnittpunkten *N, C* und *A*[11a]. Man sieht daran sowohl den Bogen $\widehat{NA}$ wie auch die Sehne, die diesen unterspannt. Aber der Punkt *C* teilt *nur* den Bogen $\widehat{NA}$ in zwei ungleiche Teile: $\widehat{NC}$ und $\widehat{CA}$, wobei der Punkt *C* mit der Sehne unter demselben Bogen gar nichts zu tun hat. Wohl wird auch die Sehne *NA* in zwei ungleiche Teile *(NC´* und *AC´)* zerlegt, *wenn man den Punkt C mit dem Zentrum des Kreises O verbindet.* Aber die beiden unterschiedlich langen Segmente der ursprünglichen Sehne *NA* – also *NC´* und *AC´* – sind den neuen Sehnen *(NC, CA)* unter den entsprechenden Bogen *($\widehat{NC}$, $\widehat{CA}$) nicht* gleich. Und wir müßten doch mit dem *Verhältnis* der beiden Segmente *(NC´* und *AC´)* der ganzen Sehne *NA* rechnen können, um unserer Aufgabe, der Berechnung der Sehne *EQ (Fig. 16.)* bzw. der des dazugehörigen Bogens *($\widehat{EQ}$* auf *Fig. 15.)*, näherzukommen. Darum greifen wir zur folgenden Hilfskonstruktion :

Man fälle von den Punkten *N* und *A (Fig. 17.)* die Lote *NB* und *AH* auf den Radius *OC.* – Was ist nun das Streckensegment *NB* nach dieser Konstruktion? – Offenbar *«die Hälfte jener Sehne, die das Doppelte des Bogens $\widehat{NC}$ unterspannt»* (abgekürzt: *½ s2b $\widehat{NC}$*). Auf dieselbe Weise ist auch *AH «die Hälfte jener Sehne, die das Doppelte des Bogens $\widehat{CA}$ unterspannt» (½ s2b $\widehat{CA}$).* Dabei sind die beiden rechtwinkligen Dreiecke *NBC´* und *AHC´* – nach der Darstellung – untereinander ähnlich. Darum sind ihre entsprechenden Seiten proportional (vgl. *Eukl. VI 4*): Das Verhältnis der beiden Hypotenusen *(NC´, AC´)* ist dasselbe wie das der beiden längeren Katheten *(NB , AH )*, oder man kann anstatt der letzteren auch *«die Hälften von jenen Sehnen, die die Doppelten der betreffenden Bogen unterspannen»*, schreiben. Darum heißt nun die Proportion :

---

11. Man beachte, daß der größte Bogen, der in diesem Gedankengang berücksichtigt wird, immer 90° hat. Der Text des Ptolemaios (*Almag.* I 13) – dessen Paraphrase hier vorbereitet wird- hebt dagegen sorgfältig hervor, daß die fraglichen Bogensegmente *kleiner als ein Halbkreis* sein müssen. Die größte Sehne unterspannt nämlich eben den *Halbkreis.* Ein Bogen, der *größer als ein Halbkreis ist,* kommt darum nicht in Betracht. Auf der anderen Seite können die Bogen, die in der Vorbereitung berücksichtigt werden, deswegen *nicht größer als 90° sein,* da sie – wie man später sehen wird – im Laufe der Berechnung *verdoppelt werden.*

11a. Vgl. Heiberg, 1898 I., S. 70, bzw. Manitius, 1912 I., S. 47.



ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



$$\frac{NC'}{AC'} = \frac{\text{s 2b } \widehat{NC}}{\text{s 2b } \widehat{CA}}$$ [12].

Man wird also in den später folgenden Verhältnissen von Streckensegmenten (der *Fig. 16.*) die Strecken durch jene *«Sehnen, die die Doppelten der betreffenden Bogen* (der *Fig. 15.*) *unterspannen»*, ersetzen können. Dies wird jedoch erst der *dritte Schritt* unserer Strategie sein. Fassen wir hier zunächst jene beiden anderen Schritte ins Auge, die diesem vorangehen.

*

Von den Streckensegmenten der *Fig. 16.* gelten die folgenden als bekannt: *NC, CA* und ihre Summe *(NA)* sowie *QU, UC* und ihre Summe *(QC)*. Dagegen sind die beiden Segmente *EU* und *UA nicht* gegeben, nur ihre Summe *EA* ist bekannt. Ebenso unbekannt sind auch die beiden anderen Segmente: *EQ* und *EN*; auch in diesem Fall ist nur ihre Summe *NQ* bekannt.

Wir wollen nun eigentlich die Strecke *EQ* berechnen, denn diese wird uns die gesuchte Polhöhe an dem fraglichen Ort in die Hand geben. Um jedoch diesen Hauptzweck erreichen zu können, müssen wir erst die beiden Segmente *EU* und *UA* berechnen. Das Berechnen von *EQ* wird erst danach möglich. (Es genügt in Wirklichkeit, das eine der beiden Segmente – also entweder *EU* oder *UA* – zu gewinnen. Das andere bekommt man nämlich, nachdem das eine berechnet wurde, durch einfache Subtraktion, da die Summe von beiden, *EA,* bekannt ist.)

Der erste Schritt der Strategie ist also das Berechnen der Strecke *EU* (und *UA*). Und dann der zweite Schritt das Berechnen von *EQ* – schon mit der Kenntnis von *EU.* Zu beiden Schritten führt je eine Hilfskonstruktion.

*Der erste Schritt* : Man führe von *C* aus das zu *EA* parallele Hilfssegment *gestrichelt* ein und bezeichne es als *k (Fig. 18.)*. Außerdem führe man – lediglich der größeren Bequemlichkeit halber – die folgenden einfacheren Bezeichnungen ein :

$$NA = a, \qquad EU = d,$$

$$NC = b, \qquad QU = h,$$

$$EA = c, \qquad QC = g,$$

---

12. Man hat auf der rechten Seite der Gleichung ursprünglich sowohl oben wie auch unten im Bruch $\frac{1}{2}$. Dies konnte jedoch einfach fortgelassen werden.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Es fällt nun bei aufmerksamerer Betrachtung sogleich auf, daß wir durch die Parallele $k$ auf einmal je zwei ähnliche Dreiecke bekommen haben, in denen demselben Segment $k$ zwei verschiedene Rollen zufallen.

*Einmal* sind nämlich jene beiden Dreiecke ähnlich, deren gemeinsame Spitzen in $N$ zusammenfallen. Die gegenüberliegende Grundlage des kleineren Dreiecks ist in diesem Fall $k$, und die Parallele $EA$ ist die Grundlage des größeren, dem vorigen ähnlichen Dreiecks.

Das *andere Mal* sind die ähnlichen Dreiecke jene, deren gemeinsame Spitzen in $Q$ zusammenfallen. Diesmal ist $k$ Grundlage des größeren Dreiecks, während die Grundlage des kleineren $EU = d$ ist.

Eben diese doppelte Rolle des Segmentes $k$ ermöglicht das von uns angestrebte Berechnen. Denn in dem einen Paar von ähnlichen Dreiecken – in denjenigen, deren gemeinsame Spitzen in $N$ zusammenfallen – steht $k$ in demselben Verhältnis zu $EA = c$ wie auf der rechten Seite der Figur die beiden Schenkel ($b$ und $a$) zueinander. Und da nun aus der viergliedrigen Proportion nur ein Glied *(k)* unbekannt ist, kann man dies leicht berechnen. – Anders ist es im anderen Paar von ähnlichen Dreiecken – in denjenigen, deren gemeinsame Spitzen in $Q$ zusammenfallen. Diesmal ist die der Spitze $Q$ gegenüberliegende Grundlage des größeren Dreiecks, $k$, schon bekannt; unbekannt aus dem kleineren Dreieck *(EQU)* ist nur die zu $k$ parallele Grundlage, $d$. Aber auch hier sind die Schenkel auf der rechten Seite der Figur ($h$ und $g$) bekannt; ihr Verhältnis ist dasselbe wie das der beiden Grundlagen ($d$ und $k$). Und so kann man auch diesmal aus der viergliedrigen Proportion $d$ berechnen. Die vollständige Operation ist also die folgende :

Die Proportion aus den Dreiecken, deren Spitzen in $N$ zusammenfallen, heißt :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{k} .$$

Man führt als Hilfsfaktor $d$ ein, und darum :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{k} \times \frac{d}{d} \qquad \text{oder} \qquad \frac{a}{b} = \frac{c}{d} \times \frac{d}{k}$$

Und jetzt nehmen wir wahr – um ein bequemeres Verhältnis anstatt $\frac{d}{k}$ zu finden –, daß aus den beiden anderen ähnlichen Dreiecken –

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



deren gemeinsame Spitzen in $Q$ zusammenfallen – das Verhältnis $\frac{d}{k}$ (dasjenige der beiden Grundlagen) dasselbe ist wie das Verhältnis der beiden Schenkel $\frac{h}{g}$ . Darum kann man nun die vorige Proportion folgendermaßen schreiben :

$$\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \times \frac{h}{g}$$

Aus dieser Gleichung kann man schließlich $\frac{d}{c}$ ohne weiteres berechnen :

$$\frac{d}{c} = \frac{b}{a} \times \frac{h}{g}$$

Noch weiter führt uns die folgende Beobachtung an *Fig. 18.*: $c = a = g$. Denn diese Segmente sind ja dieselben Sehnen, die in *Fig. 15.* je einen Viertelkreis unterspannen: $c = EA$, Sehne unter dem Horizontbogen von $90^0$; $a = NA$, Sehne unter dem Viertelkreis des Äquators; und $g = QC$, Sehne unter dem Quadranten des größten Kreises um die Weltachse. Darum kann man die zuletzt aufgeschriebene Gleichung folgendermaßen vereinfachen :

$$d = \frac{b \times h}{a} \qquad \text{(I.)}$$

Und damit haben wir das Segment *d (Fig. 18.)* berechnet.

Den *ersten Schritt* der Strategie beschließen wir damit, daß wir den gefundenen Wert des Segmentes $d$ von $EA$ subtrahieren und so $AU$ bekommen, das wir im folgenden, der Einfachheit halber, als $y$ bezeichnen wollen.

*

Im *zweiten Schritt* wollen wir nun das Segment $EQ = f$ berechnen. Auch diesmal bedienen wir uns einer Hilfskonstruktion *(Fig. 19.)*. Vom Punkt $N$ aus ziehen wir (gestrichelt) die Parallele zu $CQ$, und die Strecke

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



*EU* verlängern wir (ebenfalls gestrichelt), um das mit *m* (und Klammer) bezeichnete Streckensegment zu gewinnen. Außerdem führen wir noch – zu den vorigen – die folgenden einfacheren Bezeichnungen ein :

$$AC = x \qquad \text{und} \qquad NQ = i$$

Auch jetzt haben wir je zwei ähnliche Dreiecke bekommen. Auf der einen Seite fallen nämlich von zwei ähnlichen Dreiecken die Spitzen im Punkt *A* zusammen. Das kleinere von diesen hat die Grundlage *UC* der Spitze in Punkt *A* gegenüber. Die Grundlage des größeren Dreiecks ist dagegen das parallele Hilfssegment, das wir von *N* aus gestrichelt gezogen haben. Aus diesen Dreiecken schreiben wir auf (vgl. EUKL. VI 2) :

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{m}$$

Mit dem Hilfsfaktor $\frac{d}{d}$ multipliziert :

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{m} \times \frac{d}{d} \qquad \text{oder} \qquad \frac{x}{b} = \frac{y}{d} \times \frac{d}{m}$$

Es gibt jedoch auf derselben Figur auch noch zwei andere ähnliche Dreiecke, nämlich *EQU* und jenes andere, das bei *E* den kenntlich gemachten Scheitelwinkel zum vorigen hat. Aus diesen beiden ist :

$$\frac{d}{m} = \frac{f}{i}$$ [13]

Darum die vorige Proportion :

$$\frac{x}{b} = \frac{y}{d} \times \frac{f}{i}$$

Und aus dieser Gleichung berechnet man :

---

13. Die Gleichung kann etwa folgendermaßen abgeleitet werden: Das Verhältnis der beiden Grundlagen – *d* und *(m-d)* – ist dasselbe wie dasjenige der beiden entsprechenden Seiten – *f* und *(i-f)*. Also $\frac{d}{m\text{-}d} = \frac{f}{i\text{-}f}$. Und darum auch $\frac{d}{m} = \frac{f}{i}$.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



$$\frac{f}{i} = \frac{x}{b} \times \frac{d}{y}$$

Wir müssen in diese letzte Formel nur noch den vorhin berechneten Wert von $d$ einsetzen (I.):

$$\frac{f}{i} = \frac{x}{b \times y} \times \frac{b \times h}{a}$$

Mit $b$ – im Zähler und Nenner auf der rechten Seite – und mit $i = a$ – im Nenner auf der linken bzw. auf der rechten Seite – vereinfacht, bekommt man :

$$f = \frac{x \times h}{y} \qquad \text{(II.)}$$

Mit den Formeln (I.) und (II.) berechnet man also die Segmente *d, y* und *f* der *Fig. 16.* (oder der *Fig. 18.*). Und jetzt kann der *dritte Schritt* unserer Strategie unternommen werden: Anstatt der Strecken (der *Fig. 16.)* setzt man jene *«Sehnen, die die Doppelten der betreffenden Bogen (Fig. 15.) unterspannen»* ein. Und dementsprechend schreiben wir auch anstatt der mit lateinischen Buchstaben *(a, b, d, f, x, y)* bezeichneten Segmente die Bogen der *Fig. 15.* mit ebensolchen griechischen Buchstaben bezeichnet, also: α, β, δ, φ, ξ und υ; anstatt $h$ schreiben wir: η. Demnach werden die beiden Formeln :

$$\text{s 2b } \delta = \frac{\text{s 2b } \beta \times \text{s 2b } \eta}{\text{s 2b } \alpha} \qquad \text{(I.a.)}$$

und

$$\text{s 2b } \varphi = \frac{\text{s 2b } \xi \times \text{s 2b } \eta}{\text{s 2b } \upsilon} \qquad \text{(II.a.)}$$

*

Es wurden nun im vorangehenden Kapitel *(3. Lösung in drei Schritten)* einige für uns unerläßliche Gedankengänge aus den folgenden Teilen des Werkes von PTOLEMAIOS paraphrasiert: *Almagest I 13.* und *II 2-3.* Man kann – wie gezeigt wurde – die Polhöhe eines Ortes (in

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



der Kenntnis der Dauer des längsten Tages daselbst) in zwei Schritten berechnen. Zuerst berechnet man – mit der Formel *(I.a.)* den «Horizontbogen zwischen Äquator und Ekliptik» (υ) bzw. jenen anderen Bogen (δ), der mit diesem zusammen einen Viertelkreis ausmacht ($\delta + \upsilon = 90^0$). Und dann wendet man – in der Kenntnis dieses Bogens – die Formel (II.a.) an, um den Bogen der Polhöhe (φ) zu bekommen.

## 4. *Drei konkrete Fälle*

*(1. Beispiel)* HIPPARCHOS betont nun in seiner Kritik gegen ARATOS-EUDOXOS, daß dort, wo der längste Tag eine Dauer von 15 Stunden hat, die Polhöhe *ungefähr 41⁰ beträgt.* – Wie vorhin schon darauf hingewiesen wurde, wird diese Angabe auch durch PTOLEMAIOS erhärtet. Er schreibt nämlich in seiner «Charakteristik der Parallelkreise» (*Almagest* II 6): «Der dreizehnte Parallel ist derjenige, auf welchem *der längste Tag 15 Äquinoktialstunden hat. Er hat vom Äquator 40⁰ 56′ Abstand*». – Aber wie hat wohl HIPPARCHOS seinen approximativen Wert berechnet?

Versuchen wir, die beiden obigen Formeln – (I.a.) und (II.a.) – auf den vorliegenden konkreten Fall anzuwenden. Es sei vor allem daran erinnert, daß die vorhin behandelte *Fig. 15.* eben unseren jetzigen Fall illustriert. Wo nämlich der längste Tag 15 Stunden hat, dort ist $\beta = 67^0\,30'$, und $\xi = 22^0\,30'$. Darum gestaltet sich die Formel (I.a.) in diesem Fall folgendermaßen :

$$\text{s 2b}\,\delta = \frac{\text{s 2b}\,67^0\,30' \times \text{s 2b}\,66^0}{\text{s 2b}\,90^0}$$

(Wie man sieht, begnügen wir uns in dieser Berechnung für die «Schiefe der Ekliptik» mit dem traditionellen Wert: 24⁰; darum wird bei uns der Bogen $\widehat{UQ} = \eta = 66^0$ (nach *Fig. 15.*). – PTOLEMAIOS nimmt dafür in ähnlichen Fällen – z.B. *Almagest II 6* – $66^0\,8'\,40''$).

Die entsprechenden Werte in der Sehnentafel des PTOLEMAIOS sind nun :

$$\text{2b}\,67^0\,30 = 135^0 \text{ und s b}\,135^0 = 110^{\text{p}}\,\frac{51}{60} = \frac{6651}{60}\,{}^{14}$$

14. Kleinere Bruchteile als *Sechzigstel* wollen wir in diesen approximativen Berechnungen *nicht* berücksichtigen. Ebenso begnügen wir uns bei den Graden mit der Genauigkeit bloß bis zu halben Graden (30′).

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



$$2b\,66^0 = 132^0 \text{ und } s\,b\,132^0 = 109^p\,\frac{37}{60} = \frac{6577}{60}$$

$$2b\,90^0 = 180^0 \text{ und } s\,b\,180^0 = 120^p$$

Demnach wird aus unserer Formel :

$$s\,2b\,\delta = \frac{6651 \times 6577}{3600 \times 120} = 101{,}25 = 101^p\,\frac{15}{60}$$

In der Sehnentafel des PTOLEMAIOS findet man nun nicht genau die zuletzt genannte, nur die approximative Sehnenlänge : $101\,\frac{12}{60}$, und daneben als den entsprechenden Bogen: $115^0$. Unser gesuchter Bogen wird selbstverständlich nur die Hälfte von diesem, also: $57^0\,30'$ $(=\delta)$. Und dementsprechend wird $\upsilon = 32^0\,30'$.

In der Kenntnis des «Horizontbogens zwischen Äquator und Ekliptik» $(\upsilon = 32^0\,30')$ können wir dann – da $\xi = 22^0\,30'$ auf Grund der Dauer des längsten Tages auch vorher schon bekannt war – unsere zweite Formel (II.a.) für die Berechnung der Polhöhe anwenden. Diese wird im vorliegenden Fall :

$$s\,2b\,\varphi = \frac{s\,2b\,22^0\,30' \times s\,2b66^0}{s\,2b\,32^0\,30'} = \frac{sb\,45^0 \times sb\,132^0}{sb\,65^0}$$

Die entsprechenden Werte in der Sehnentafel des PTOLEMAIOS heißen :

$$45^0 \;\ldots\ldots\; 45^p\,\frac{55}{60} = \frac{2755}{60}$$

$$132^0 \;\ldots\ldots\; 109^p\,\frac{37}{60} = \frac{6577}{60}$$

$$65^0 \;\ldots\ldots\; 64^p\,\frac{28}{60} = \frac{3868}{60}$$

Darum heißt nun die Formel :

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



$$\text{s}\,2\text{b}\,\varphi = \frac{2755\times 6577}{3868\times 60} = 78{,}07 = 78^{\text{p}}\,\frac{4}{60}\,.$$

Eine solche Sehnenlänge findet man bei PTOLEMAIOS nicht. Die nächstkleinere heißt: $77^{\text{p}}\,\frac{56}{60}$ ... $81^0$, und die nächstgrößere: $78^{\text{p}}\,\frac{19}{60}$ ... $81^0\,30'$. Zwischen diese beiden Werte fällt also $\dot{2}\text{b}\,\varphi$; und darum soll die Polhöhe ($\varphi$) *größer* als $40^0\,30'$ und *kleiner* als $40^0\,45'$ sein.

Vergleicht man nun diese Approximation mit dem Text des HIPPARCHOS («die Polhöhe beträgt *ungefähr* $41^0$»), so ist unser Ergebnis befriedigend genug. Der entsprechende Wert bei PTOLEMAIOS (*Almagest* II 6: $40^0\,56'$) ist vom unsrigen deswegen abweichend, weil PTOLEMAIOS erstens einen genaueren Wert für die «Ekliptikschiefe» benutzte, und außerdem, weil er auch kleinere Bruchteile als unsere Sechzigstel berücksichtigte.

Es darf hier zur Ergänzung noch erwähnt werden: Auch der moderne Herausgeber des HIPPARCHOS-Textes, C. MANITIUS, hat in seiner Erklärung aus der Dauer des längsten Tages (15 St) die Polhöhe berechnet[15]. Er kam zum Ergebnis: $\varphi = 40^0\,40'$, was mit dem unsrigen gut übereinstimmt. MANITIUS hat jedoch *nicht* die antike Art der Berechnung rekonstruiert, sondern er verwies statt dessen auf die zweifellos viel bequemeren, aber in einer historischen Untersuchung *anachronistischen* cos- und tg-Werte.

*(2. Beispiel)* HIPPARCHOS hat in seiner Kritik (zitiert oben in der «Einleitung») nicht nur die Angabe des ARATOS abgelehnt, sondern auch die andere – die nach dem eingenen Urteil richtige – mitgeteilt: In Griechenland ist das Verhältnis des Gnomons zu seinem äquinoktialen Mittagschatten wie 4:3, die Dauer des längsten Tages hat 14 3/5 Stunden, und *«die Polhöhe beträgt ungefähr $37^0$»*. – Es wurde im ersten Teil dieses Buches schon gezeigt, wie man aus dieser Verhältniszahl des Gnomons die «geographische Breite» (Polhöhe, $37^0$) berechnen konnte. Jetzt wollen wir sehen, wie man dasselbe Ergebnis aus der Dauer des längsten Tages erhielt.

Wenn der längste Tag 14 3/5 Stunden hat, so muß die kürzeste Nacht (und nach antiker Denkweise auch der kürzeste *Tag*) $9\ 2/5 = \frac{47}{5}$ Stunden lang sein. Nimmt man die Hälfte dieser Zahl (also: 4,7), so hat man die Zeit für den *halben Tagbogen* des kürzesten Tages. Und multipliziert man diese letztere mit $15^0$ (also $4{,}7 \times 15 = 70{,}5$), so hat

15. MANITIUS, 1894, S. 291 f.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



man den Bogen β. Also: $\beta = 70^0\,30'$; und infolgedessen $\xi = 19^0\,30'$. Die Formel (I.α.) heißt also diesmal :

$$\text{s 2b}\,\delta = \frac{\text{s 2b}\,70^0\,30' \times \text{s 2b}\,66^0}{\text{s 2b}\,90^0} = \frac{\text{sb}\,141^0 \times \text{sb}\,132^0}{\text{sb}\,180^0}$$

Die Werte in der Tafel des PTOLEMAIOS sind :

$$141^0 \;\ldots\ldots\; 113^{\text{p}}\frac{7}{60} = \frac{6787}{60}$$

$$132^0 \;\ldots\ldots\; 109^{\text{p}}\frac{37}{60} = \frac{6577}{60}$$

$$180^0 \;\ldots\ldots\; 120^{\text{p}}$$

Und darum die vorige Formel :

$$\text{s 2b}\,\delta = \frac{6787 \times 6577}{3600 \times 120} = 103{,}33 = 103^{\text{p}}\,\frac{20}{60}\,.$$

Man findet diese Sehnenlänge $\left(103^{\text{p}}\,\frac{20}{60}\right)$ in der Tafel des PTOLEMAIOS wiederum nicht. Die nächstkleinere Sehne $103^{\text{p}}\,\frac{7}{60}$ – neben dem Bogen $118\,½^0$ – ist von der gesuchten noch ziemlich weit entfernt. Näher liegt dagegen die nächstgrößere Sehne : $103^{\text{p}}\,\frac{23}{60}$ ... $119^0$. Darum wird also $\delta \approx 59^0\,30'$, bzw. $\upsilon \approx 30^0\,30'$.

Darum gestaltet sich unsere Formel (II.a.) in diesem Fall :

$$\text{s 2b}\,\varphi = \frac{\text{s 2b}\,19^0\,30' \times \text{s 2b}\,66^0}{\text{s 2b}\,30^0\,30'} = \frac{\text{sb}\,39^0 \times \text{sb}\,132^0}{\text{sb}\,61^0}$$

Die Werte in der Tafel des PTOLEMAIOS sind :

$$39^0 \;\ldots\ldots\; 40\,\frac{3}{60} = \frac{2403}{60}$$

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



$$132^0 \ldots\ldots 109\,\frac{37}{60} = \frac{6577}{60}$$

$$61^0 \ldots\ldots 60\,\frac{54}{60} = \frac{3654}{60}\,.$$

Diese Werte ergeben nach der Formel berechnet :

$$s\,2b\,\varphi = \frac{2403\times 6577}{3654\times 60} = 72{,}08 = 72^p\,\frac{5}{60}\,.$$

Da nun die nächstkleinere Sehne bei PTOLEMAIOS $\left(71^p\,\frac{47}{60}\right)$ von der gesuchten noch ziemlich weit entfernt liegt, nehmen wir auch diesmal lieber die nächstgrößere, die sich unserem Wert gut annähert: $72^p\,\frac{13}{60}$.. ..$74^0$. Wenn nun das Doppelte des gesuchten Bogens $74^0$ ist, so haben wir für die Polhöhe in der Tat $\varphi = 37^0$, wie HIPPARCHOS schreibt: *«ungefähr $37^0$ »*.

Es sei hier – anläßlich dieses zweiten Beispiels – nur noch daran erinnert, daß als wir im ersten Teil dieses Buches dieselbe Polhöhe auf Grund des Gnomon-Verhältnisses 4:3 berechnet hatten, *wir die Bruchteile (Sechzigstel) notgedrungen außer acht lassen mußten.* Es stand uns ja dort als Sehnenlänge noch gröber gerechnet nur $72^p$ $(= 3 \times 24)$ – *ohne* weitere Bruchteile – zur Verfügung.

*(3. Beispiel)* Die angeführten Beispiele haben gezeigt, wie HIPPARCHOS aus den abweichenden Angaben über die Dauer des längsten Tages in Griechenland – 15 oder nur 14 3/5 Stunden – die zwei geographischen Breiten ($41^0$ oder nur $37^0$) berechnet haben könnte. In dem einen dieser beiden Fälle wird die Verhältniszahl des Gnomons überhaupt nicht erwähnt – es heißt nur: «Wo der längste Tag 15 Stunden hat, dort beträgt die Polhöhe ungefähr $41^0$ ». Es ist also naheliegend anzunehmen, daß in diesem Fall (vielleicht!) die Berechnung in der Tat auf Grund der Dauer des längsten Tages erfolgt sein mag. Im anderen Fall werden die beiden Berechnungen – aus der Gnomonzahl und aus der Tageslänge – eher nur zur gegenseitigen Kontrolle gedient haben.

Man findet nun bei HIPPARCHOS in demselben Zusammenhang auch noch die Möglichkeit eines *dritten Beispiels,* in dem jedoch weder Berechnung noch Ergebnis mitgeteilt werden. Man bekommt nur die Angabe selbst, die zweifellos wegen der aus ihr ableitbaren Berechnung aufgezeichnet wurde.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Man liest nämlich bei HIPPARCHOS: Noch mehr müßte man sich darüber wundern, daß der Astronom ATTALOS auf die beanstandbare Verhältniszahl des EUDOXOS (also: das Verhältnis des *längsten Tages zur kürzesten Nacht*, wie 5:3) nicht aufmerksam wurde, «wo doch EUDOXOS in der anderen Schrift ein abweichendes Zahlenverhältnis angibt und schreibt, daß *der Abschnitt des Wendekreises über der Erde sich zu dem unter der Erde verhalte wie 12:7* etc.».

Ich habe in der «Einleitung» dieser Untersuchungen schon darauf hingewiesen, daß die beiden Verhältnisse zwar nahezu gleich sind ($12:7 \approx 5:3$), daß aber das vorige einen noch längeren Tag ergibt, nämlich nicht bloß 15, sondern 15,*158*... Stunden. Das heißt: *Der Ort, wo das Zahlenpaar 12:7 für das Verhältnis des längsten Tages zur kürzesten Nacht gilt, muß noch mehr nach Norden zu liegen als der Breitengrad 41°*. – Kontrollieren wir auch diese Behauptung mit der Berechnung.

Die zum längsten Tag gehörige kürzeste Nacht muß am betreffenden Ort etwa 8,84 Stunden lang sein $\left(\frac{24}{19} \times 7 = 8{,}842...\right)$. Der zum kürzesten Tag gehörige halbe Tagbogen (in Stunden gerechnet: 4,42) mit 15 multipliziert, ergibt jenen Bogen, den wir in den vorigen Beispielen als $\beta$ bezeichnet haben; also $\beta = 66{,}30^0 = 66^0\,18'$, und $\xi = 23^0\,42'$. – Da nun in diesem Fall der doppelte Bogen $2\beta = 132^0\,36'$ bzw. $2\xi = 46^0\,84'$ ist, begnügen wir uns in diesem Zusammenhang mit ihren Approximationen, also $2\beta = 132^0\,30'$, und $2\xi = 47^0\,30'$.

Die zur Berechnung von $\delta$ nötigen Angaben in der ptolemäischen Tafel sind :

$$132^0\,30' \;\ldots\ldots\; 109\,\frac{50}{60} = \frac{6590}{60}$$

$$132^0 \;\ldots\ldots\; 109\,\frac{37}{60} = \frac{6577}{60}$$

$$180^0 \;\ldots\ldots\; 120.$$

Aus diesen Angaben ergibt sich :

$$\mathrm{s}\,2\mathrm{b}\,\delta = \frac{6590 \times 6577}{3600 \times 120} \approx 100{,}33 = 100^{\mathrm{p}}\,\frac{20}{60}\,.$$

Die kaum etwas größere Sehnenlänge bei PTOLEMAIOS ist dazu :

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



$100^{p}\frac{21}{60}$... $113^{0}30'$. Demnach ist also $\delta = 56^{0}45'$, und $\upsilon = 33^{0}15'$.

Man wird darum – um φ zu berechnen – die folgenden Werte bei Ptolemaios berücksichtigen müssen :

$$2b\,\xi = 47^{0}30' \ldots\ldots 48\frac{19}{60} = \frac{2899}{60}$$

$$2b\,\eta = 132^{0} \ldots\ldots 109\frac{37}{60} = \frac{6577}{60}$$

$$2b\,\upsilon = 66^{0}30' \ldots\ldots 65\frac{47}{60} = \frac{3947}{60}.$$

Und so wird :

$$s\,2b\,\varphi = \frac{2899 \times 6577}{3947 \times 60} = 80{,}51 = 80\frac{30^{p}}{60}.$$

Nahe kommt dem bei Ptolemaios die etwas kürzere Sehnenlänge $80\frac{17}{60}$... $84^{0}$. Da nun das Doppelte des Bogens ungefähr $84^{0}$ ist, wird die Polhöhe selber etwa $42^{0}$ betragen.

Man sieht also, daß die von Hipparchos erwähnte «andere Verhältniszahl des Eudoxos» (12:7 für den längsten Tag und die kürzeste Nacht) in der Tat, wie erwartet, einen höheren Wert für die geographische Breite (also einen Ort *mehr* nach Norden zu) ergibt als das vorhin besprochene Verhältnis. (Das Verhältnis 5:3, also der längste Tag von 15 Äquinoktialstunden, ergab für die Breite *weniger* als $40^{0}45'$.)

## *5. Berechnungen vor Hipparchos*

Es wurde nun in den letzten zwei Kapiteln gezeigt, wie Hipparchos aus der Zeitdauer des längsten Tages an einem gegebenen Ort die Polhöhe (die geographische Breite) daselbst berechnet haben mag. Die Rekonstruktion der vermutlichen Berechnungen wurde nach Ptolemaios versucht – nicht nur insofern, als wir auch hier seine Sehnentafel ebenso benutzen konnten wie anläßlich der Gnomon-Berechnungen im ersten

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Teil dieser Untersuchungen. Darüber hinausgehend, haben wir auch die beiden Formeln – I.α und II.α – unmittelbar dem Werk des PTOLEMAIOS entnommen. «*Einige den sphärischen Demonstrationen vorauszuschickende Lehrsätze*» – heißt das betreffende Kapitel bei ihm (I 13). Außerdem folgten wir auch in den drei konkreten Beispielen dem Vorbild des PTOLEMAIOS. Denn er zeigt ja in einem anderen Kapitel (II 3): «*Wie sich aus der Dauer des längsten Tages die Polhöhe bestimmen läßt, und umgekehrt*».

Dagegen ersieht man die Tatsache, daß unsere Rekonstruktionen – also die versuchten «ptolemäischen» Berechnungen – in der Tat auch für HIPPARCHOS gültig sind, einfach daraus, daß auch wir, nach dem Vorbild des PTOLEMAIOS, dieselben Ergebnisse erhielten, die HIPPARCHOS in seinem Werk zumindest in zwei Fällen ausdrücklich betont: 15 Äquinoktialstunden (für den längsten Tag) ~ 41° Breite, und 14 3/5 Stunden ~ (ungefähr) 37° Breite.

Ob nun ähnliche Berechnungen in der griechischen Wissenschaft auch v o r HIPPARCHOS schon angestellt wurden? – Diese Frage müssen wir demnächst untersuchen. Aber bevor wir darauf eingehen, müssen wir hier noch den Fall des Astronomen HYPSIKLES erwähnen.

Dieser HYPSIKLES hatte nämlich unter dem Titel *Anaphorikos* ein Werk über die «Aufgänge der Gestirne» verfaßt, das erhalten blieb und das in der Wissenschaftsgeschichte ziemlich berühmt wurde, obwohl man sich über den wissenschaftlichen Wert der Abhandlung keineswegs einig war[16]. Man hat jedenfalls anläßlich dieser Arbeit geschrieben:[17] «Bei den Griechen tritt die Teilung der Ekliptik in 360 Grade und als entsprechendes Zeitmaß in 360 χρόνοι erstmals im *Anaphorikos* des HYPSIKLES auf.» (Die früheren Spuren derselben Teilung des Kreises seien unsicher.)

Diese ziemlich alte Beobachtung wird gewöhnlich auch in die neueren Arbeiten übernommen, obwohl sie eigentlich nur dann sinnvoll ist, wenn man dementsprechend HYPSIKLES ziemlich *früh datiert.* Lebte nämlich HYPSIKLES in der Tat um 180 v.Chr. in Alexandria – wie man

---

16. Sein Herausgeber im vorigen Jahrhundert, K. MANITIUS (*Des Hypsikles Schrift Anaphorikos*, Dresden 1888), hielt es noch – mindestens zum Teil – für ein «elendes Machwerk»; er glaubte auch, dem HYPSIKLES nicht «die Schmach antun zu dürfen», ihn für den Autor zu halten, und erklärte den dürftigen Charakter der Schrift als aus der Astrologie stammend. – Anders in der neueren Ausgabe: *Hypsikles, Die Aufgangszeiten der Gestirne,* herausg. u. übers. von F. de FALCO u. M. KRAUSE, mit einer Einführung von O. NEUGEBAUER, Abhandlungen der Akademie der Wiss. in Göttingen, Phil.-Hist. Kl. Göttingen, 1966.

17. REHM im Artikel *Kykloi* in der *RE* V, 1922, 2327.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



gelegentlich schrieb[18] –, so war er wohl ein älterer Zeitgenosse des HIPPARCHOS, und es ist dann interessant, daß sich die besagte Gradeinteilung des Kreises aus seinem Werk, das demjenigen des HIPPARCHOS vielleicht zeitlich voranging, belegen läßt.

Aber einfach verfehlt ist es, den *Anaphorikos* des HYPSIKLES als den «ältesten Beleg» für die Gradeinteilung des Kreises in der griechischen Wissenschaft hinzustellen, wenn man diesen Astronomen auf die «zweite Hälfte des 2. Jahrhunderts v.Chr.» datiert, wie HEATH das getan hat[19], oder wenn man ihn noch später ansetzt, wie dies kürzlich wiederholt versucht wurde[20]. Denn in diesem Fall wäre HYPSIKLES nur ein jüngerer Zeitgenosse des HIPPARCHOS, oder vielleicht hat er sogar noch später gelebt als jener, und dann wäre seine Gradeinteilung des Kreises von historischem Gesichtspunkt aus ziemlich belanglos.

Nun möchte ich hier auf einige von unserem Gesichtspunkt aus interessante Züge des HYPSIKLES-Werkes aufmerksam machen. (Es wird daraus u.a. auch meine Stellungnahme in der Frage der Datierung hervorgehen.) Beachten wir zunächst, wie er die Aufgangszeiten der Gestirne bestimmen will. Er schreibt[21] :

«Wenn der Tierkreis in 360 gleiche Bogen zerlegt wird, so soll jeder dieser Bogen ein *Ortsgrad* (μοῖρα τοπικὴ) genannt werden. Ebenso soll, wenn die Zeit, in der der Tierkreis von einem beliebigen Punkt zum gleichen Punkt gelangt, in 360 gleiche Zeiten geteilt wird, jede dieser Zeiten ein *Zeitgrad* (μοῖρα χρονικὴ) heißen. Unter diesen Voraussetzungen werden wir unter Benutzung der oben angegebenen Sätze zeigen, wie man für einen gegebenen Ort von jedem Tierkreiszeichen wissen kann, in wieviel Zeitgraden es aufgeht, wenn *das Verhältnis bekannt ist, das der längste Tag zum kürzesten hat.*»

Wir wollen aus diesem Zitat vor allem den Sinn und die Bedeutung der «*Ortsgrade*» und «*Zeitgrade*» verstehen. (Man hält sich dabei am besten eine der vorigen Figuren, z.B. *Fig. 14 b,* vor Augen.) HYPSIKLES spricht von den 360 Bogen (Graden) eines größten Kreises, des Zodiakus. Aber selbstverständlich gilt dasselbe auch für einen anderen

---

18. B.L.v.d. WAERDEN, *Erwachende Wissenschaft,* Basel-Stuttgart 1956, S. 445. Übrigens scheint auch diese Datierung auf P. TANNERY zurückzugehen; wie er in *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne,* Paris 1893, S. 39, schrieb: «... l'ouvrage d' HYPSICLES d'Alexandrie qui n'est pas antérieur à la première moitié du IIe siècle avant Jésus-Crist et n'a par conséquent, précédé HIPPARQUE que d'une ou deux générations...».

19. T. HEATH, *History of Greek Mathematics,* Oxford 1921, I, 419; II, 213-214.

20. D.R. DICKS, *The Geographical Fragments of Hipparchus,* London 1960, S. 148-149, und *ders.* in *JHS* 86, 1966, 27.

21. Ich zitiere im folgenden den Text des HYPSIKLES nach der in Anm. 16 genannten Übersetzung von F. de FALCO.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



größten Kreis, z.B. in unserem Fall *(Fig. 14 b)* für den Äquator. Darum konnten wir behaupten, daß am Tag der Nachtgleiche, wenn die Sonne im Punkt *A* des Horizontes *(Fig. 14 b)* aufgeht, sie *sechs Stunden* später den Punkt *N* des Meridians erreichen wird. Mit anderen Worten: dem Viertelkreis, den *90 Ortsgraden,* entsprechen *6 Stunden.* – HYPSIKLES würde im Sinne des eben angeführten Zitates anstatt *«einer Stunde» 15 Zeitgrade* sagen. Wir werden gleich sehen, daß er in der Tat so rechnete. Er scheint also – zumindest in diesem Punkt – völlig damit im Einklang zu sein, was wir oben (im Kapitel *«Die Umgestaltung des Gnomon-Weltbildes»)* auf Grund des viel späteren PTOLEMAIOS-Textes entwickelt haben.

Die andere interessante Tatsache, die ich hervorheben möchte, ist die folgende: HYPSIKLES betont am Ende des vorigen Zitates, daß man – um die Aufgangszeiten der Gestirne berechnen zu können – *auch die geographische Breite des betreffenden Ortes kennen muß,* und er charakterisiert diese – ebenso wie in der ersten Hälfte des 4. Jahrhunderts EUDOXOS und wie häufig STRABON im letzten Jahrhundert vor der Zeitwende – mit dem *«Verhältnis des längsten Tages zum kürzesten».*

Und jetzt wollen wir das vorige HYPSIKLES-Zitat fortsetzen :

«Es werde die Breite in Alexandria in Ägypten angenommen (τὸ ἐν Ἀλεξανδρίᾳ κλῖμα), wo der längste Tag zum kürzesten das Verhältnis hat wie 7:5. Daß sich dies so verhält, haben wir gezeigt durch Benutzung der von den Gnomonen am Mittag der Wenden geworfenen Schatten.»

Wie EUDOXOS – nach der Auslegung des HIPPARCHOS – die geographische Breite von Griechenland damit charakterisiert hatte, daß er das Verhältnis des längsten Tages zum kürzesten als 5:3 bestimmte, so fand HYPSIKLES das Verhältnis 7:5 derselben beiden Tage für die geographische Breite (κλῖμα) von Alexandria.

Ein besonderes Interesse hat für mich jedoch das eben angeführte Zitat deswegen, weil es unmißverständlich auch erklärt, *auf welchem Wege HYPSIKLES das Verhältnis des längsten Tages zum kürzesten für Alexandria zu bestimmen vermochte.* Wie der Text besagt: *«durch Benutzung der von den Gnomonen am Mittag der Wenden geworfenen Schatten»* (χρώμενοι ταῖς ἀπὸ τῶν γνωμόνων γιγνομέναις μεσημβριναῖς σκιαῖς τροπικαῖς). – Aber kann man in der Tat mit dem Gnomon auch das Verhältnis des längsten Tages zum kürzesten an einem gegebenen Ort bestimmen?

Nun ja! Fasse man nur noch einmal meine drei Skizzen – *Figur 12, 13 a* und *13 b* – sorgfältig ins Auge. Ich habe an diesen für drei verschiedene Örter bloß schematisch die Mittagschatten der beiden Wenden bzw. die Durchmesser der Wendekreise dargestellt. Ja, ich habe sogar in

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



allen drei Fällen jene Segmente der beiden Wendekreis-Durchmesser, die über dem Horizont liegen, *dicker ausgezogen.* Diese dicker ausgezogenen Segmente veranschaulichen drei verschiedene Verhältnisse «des längsten Tages zum kürzesten».

Im Sinne dieser drei Darstellungen glaube ich die Worte des HYPSIKLES folgendermaßen erklären zu dürfen: Er hat wohl in Alexandria den Mittagschatten eines Gnomons an den beiden Wenden gemessen, und im Sinne seiner Messungsergebnisse hat er dann eine solche Skizze entworfen wie die eine unserer oben erwähnten *Figuren.* Danach hat er die «dicker ausgezogenen Segmente» der Wendekreis-Durchmesser bzw. ihr Verhältnis zueinander gemessen, und so bekam er 7:5. (Ob dieses Messen exakt genug war, werden wir später sehen.)

Ich sehe also in den zuletzt zitierten Worten des HYPSIKLES die *Bestätigung meiner früher dargelegten Erklärung* (im Kapitel *«Das Verhältnis des längsten Tages zum kürzesten»*). Um zwei wesentliche Punkte dieser Erklärung auch hier noch einmal zu wiederholen :

1. Man hat die Berechnung der Polhöhe aus der Zeitdauer des längsten Tages, wie diese vorhin in zwei Kapiteln *(«Lösung in drei Schritten»* und *«Drei konkrete Fälle»)* geschildert wurde, auf Grund einer Umgestaltung des Gnomon-Weltbildes entwickelt. Erst in einer Zeit, in der die im vorangehenden Teil dieser Untersuchung geschilderten Gnomon-Berechnungen schon bekannt waren und auch häufig praktiziert wurden, konnte man an die weitaus kompliziertere Aufgabe herantreten, und zwar auf Grund der Zeitdauer des längsten Tages ähnliche Berechnungen zu versuchen.

2. Man hat das *«Verhältnis des längsten Tages zum kürzesten»* ursprünglich nicht auf dem Wege des Messens der Zeitdauer (der Nacht oder des Tages) mit Hilfe einer Sanduhr oder einer Klepsydra versucht. Statt dessen hat man mit dem Gnomon und seinem Mittagschatten – besonders anläßlich der *Wenden,* wie dies die HYPSIKLES-Worte verraten – das bekannte Weltbild konstruiert und hat daran die Segmentstücke der Durchmesser von den beiden Wendekreisen über dem Horizont miteinander verglichen.

Wir wollen jedoch hier noch einen interessanten Zug des HYPSIKLES-Textes ins Auge fassen :

Nachdem er festgestellt hatte, daß der längste Tag zum kürzesten in Alexandria das Verhältnis 7:5 hat, berechnete er sogleich auch die Dauer des Tages und der Nacht (der Sommerwende) – nicht in Stunden, sondern in *Zeitgraden:* 210 und 150. – Besonders interessant ist für uns die letztere Angabe: der Bogen des kürzesten Tages oder der kürzesten Nacht in Zeitgraden. Halbierte man nämlich diese, so hätte man



ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



sogleich in Graden jene Größe ($75^0$), die wir in den früheren Berechnungen (vgl. *«Drei konkrete Fälle»* und *(Figur 15.)* als β bezeichnet haben. Demenstprechend wäre $\xi = 15^0$. – Wie man sieht, ließen sich mit den *Zeitgraden* des HYPSIKLES sogleich jene Berechnungen durchführen, die wir vorhin auf Grund der Zeitdauer angestellt haben, die in Äquinoktialstunden gegeben waren. Eine Äquinoktialstunde macht 15 Zeitgrade des HYPSIKLES aus. So haben auch wir früher gerechnet.

Behauptet also HYPSIKLES, daß der längste Tag in Alexandria 210 Zeitgrade hat, so ist dies gleichbedeutend damit, daß dort der längste Tag *14 Äquinoktialstunden* lang ist. Vergleiche man nun diese Angabe damit, was man über den entsprechenden Parallelkreis bei PTOLEMAIOS lesen kann; es wird sich etwas sehr beachtenswertes daraus ergeben. Man liest nämlich in der Ptolemäischen Charakteristik der Parallelkreise (*Almag.* II 6) folgendes :

«Der neunte Parallel ist derjenige, auf welchem *der längste Tag 14 Äquinoktialstunden hat.* Er hat vom Äquator $30^0\,22'$ Abstand und geht *durch das Unterland von Ägypten hindurch* etc.»

Warum wird hier *«das Unterland von Ägypten»* statt A l e x a n d r i a gesagt? Schließlich war ja PTOLEMAIOS eben in Alexandria tätig. Es wäre auch deswegen schon natürlich gewesen, daß er anläßlich des betreffenden Parallelkreises als naheliegendes Beispiel Alexandria, die berühmte Stadt seiner Tätigkeit – das Zentrum des ganzen wissenschaftlichen Lebens jener Jahrhunderte –, nennt. Und dies umso mehr, als das Verhältnis des längsten und kürzesten Tages für Alexandria (7:5) – mit anderen Worten: der 14 Stunden lange Tag des Sommersolstitiums – dort angeblich eine ältere Tradition war[22], die HYPSIKLES mit den eigenen Gnomon-Messungen wohl nur zu erhärten versucht hatte. Es ist auch sehr unwahrscheinlich, daß PTOLEMAIOS von HYPSIKLES nichts gewußt hätte. Doch warum schrieb er dann nur, daß der betreffende Parallel *«durch das Unterland von Ägypten»* hindurchgeht? Liegt nicht auch Alexandria im *«Unterland von Ägypten»*? – Daß PTOLEMAIOS vermeidet, Alexandria bei dieser Gelegenheit zu erwähnen, ist also zweifellos auffallend.

Ich glaube, man bekommt eine Erklärung für dieses auffallende Nicht-Erwähnen des alten Beispiels, wenn man kontrolliert, welche

---

22. Nach einer Bemerkung von O. NEUGEBAUER (in seiner Einführung zu jener HYPSIKLES-Übersetzung, die oben in Anm.16 genannt wurde) war die Bestimmung des Verhältnisses 7:5 für Alexandria «kaum ein origineller Beitrag von HYPSIKLES». Dasselbe Verhältnis sei schon lange vor seiner Zeit bekannt gewesen. NEUGEBAUER verwies dabei auf *P. Hibeh* 27, geschrieben um 300 v.Chr., und auf B.P. GRENFELL and A.S. HUNT, *The Hibeh Papyri I*, London 1906, S. 138 ff.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Polhöhe (geographische Breite) sich eigentlich ergibt, wenn der Berechnung ein längster Tag von 14 Äquinoktialstunden zu Grunde gelegt wird? – PTOLEMAIOS bekam dafür die Breite von *30° 22′*. Eine noch etwas südlichere Breite *(30° 15′)* ergibt sich, wenn man in der Genauigkeit der Berechnung *nicht über die Sechzigstel hinausgeht, und wenn man 24° als Ekliptikschiefe gelten läßt.*

*Aber Alexandria liegt in Wirklichkeit nördlicher* – um einige Minuten auch höher noch als der 31. Breitengrad. Bezeichnet man also jenen Parallelkreis, auf dem der längste Tag 14 Äquinoktialstunden hat, mit *Alexandria,* so fällt die Ungenauigkeit dieser Angabe viel mehr auf, als wenn man statt dessen nur im allgemeinen einen ziemlich breiten Streifen nennt und sagt: *«durch das Unterland von Ägypten hindurch».* Diese vorsichtigere Umschreibung kann sogar als «genau» gelten.

Ich vermute also, daß man mit der allgemeiner formulierten geographischen Angabe – *«das Unterland von Ägypten»* anstatt *«Alexandria* – die Korrektur einer älteren Bestimmung vollzogen hat. Ich kann sogar nicht nur diese Vermutung erhärten, sondern außerdem auch noch zeigen, daß die Korrektur *nicht erst von PTOLEMAIOS herrührt.*

Man liest nämlich einmal bei STRABON (C 132) von jenem Gebiet, «das etwa um 400 Stadien *südlicher* als der über Alexandria und Kyrene[23] hinweggehende Parallel liegt und *wo der längste Tag 14 Äquinoktialstunden hat...».* Auch STRABON weiß also, daß der 14 Stunden lange Tag n i c h t für Alexandria, sondern für eine südlichere Gegend charakteristisch ist. Ja, diese Gegend liegt sogar um mehr als einen halben Grad südlicher – nachdem HIPPARCHOS, wie ebenfalls aus STRABON (C 132) bekannt ist, 700 Stadien einem Grad (1°) dem Meridian entlang entsprechen ließ. Außerdem nennt STRABON – unmittelbar nach dem vorigen Zitat – auch noch die äquinoktiale Gnomon-Zahl für Alexandria *5:3.* Und dieses Verhältnis ergibt in der Tat eine andere geographische Breite[23a], nicht dieselbe, die die Zeitdauer von 14 Stunden für den längsten Tag ergeben hatte, nämlich mindestens um einen halben Grad mehr (30° 45′) – auch nach derselben groben Berechnung, die wir vorhin angedeutet haben.

Denkt man daran, was im ersten Teil dieser Untersuchungen erwähnt wurde, daß nämlich STRABON die meisten Parallelkreis-Bestimmungen, besonders diejenigen, die mit Stadien-Angaben verbunden sind, dem HIPPARCHOS zu verdanken hat, so liegt es nahe, auch in diesem

---

23. In Wirklichkeit liegt Kyrene noch nördlicher als Alexandria.

23a. Ich benutze dabei selbstverständlich immer die antike Sehnentafel. Denn ich halte die Benutzung unserer Winkelfunktionen (sin, cos, tg etc.) in einer historischen Untersuchung wie die vorliegende für *unzulässig.*

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Fall HIPPARCHOS als Quelle zu vermuten.

Hat jedoch in der Tat HIPPARCHOS jene ältere Angabe, wonach der längste Tag von 14 Äquinoktialstunden für Alexandria charakteristisch sei, in dem Sinne korrigiert, daß dies eher für ein südlicheres Gebiet («das Unterland von Ägypten») gültig ist, so folgt daraus sogleich auch, daß das Werk des HYPSIKLES demjenigen des HIPPARCHOS wohl vorangegangen sein muß – wie dies P. TANNERY richtiger gesehen hat als die späteren Historiker. – Dabei erinnert die *Korrektur* auch daran, daß in der Tat HIPPARCHOS auch jene ungenaue Breiten-Bestimmung von Griechenland korrigieren wollte, die EUDOXOS-ARATOS vorgeschlagen hatten und die uns in diesem Buch beschäftigt. Nicht nur die Breiten-Bestimmungen des ERATOSTHENES korrigierte er mehrmals – wie dies von ihm schon längst bekannt ist –, sondern auch andere traditionelle Angaben, die weniger exakt waren. (Auch darum glaubt man nicht gern, daß HIPPARCHOS auf der anderen Seite für jenen Fehler anläßlich der Breiten-Bestimmung von Byzantion verantwortlich wäre, der ihn zunächst – nachdem, wie wir oben gesehen haben, PYTHEAS freigesprochen werden mußte – zu belasten schien. Vgl. oben S. 110f.).

Es ist übrigens interessant, daß STRABON an der vorhin angeführten Stelle (C 133) die geographische Breite jenes Gebietes, das 400 Stadien südlicher als Alexandria liegt, nur mit der Angabe der Zeitdauer des längsten Tages (14 Stunden) charakteristiert, aber für denselben Streifen kein äquinoktiales Gnomon-Verhältnis nennt. Dagegen gibt er unmittelbar danach für Alexandria *nur* die Gnomon-Zahlen (5:3) an, ohne die korrigierte Zeitdauer des längsten Tages. – Auch diese Beobachtung scheint dafür zu sprechen, daß die praktische Bedeutung der zwei Arten von Berechnungen sonst wohl in der gegenseitigen Kontrolle bestand.

Die griechische Wissenschaft war also wohl in der ersten Hälfte oder auch am Anfang des 2. Jahrhunderts v.Chr. (HYPSIKLES und HIPPARCHOS) imstande, aus der Zeitdauer des längsten Tages mehr oder weniger richtige Schlüsse in Bezug auf die geographische Lage des betreffenden Ortes zu ziehen. Welches mag nun die Vorgeschichte dieser Kenntnisse gewesen sein?

*
* *

Es ist wohl eine uralte Entdeckung, daß die Länge der Tage auf dem «bewohnten Gebiet der Erde» – auf der *Oikoumene*, die sich nach den Kenntnissen der Antike auf einen Teil der nördlichen Hemisphäre beschränkte – nicht bloß von der Jahreszeit abhängig ist, sondern auch

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



mit der geographischen Lage – d.h. mit der Lage mehr nach Norden oder mehr nach Süden zu – zusammenhängt. Man erinnert sich z.B., daß schon die Odyssee vom Land der Laistrygonen weiß, wo die «Pfade der Nacht und des Tages» so nahe beieinander sind, daß der eintreibende Hirt den austreibenden grüßen kann, und wo der schlaflose Mann – eben infolge der außerordentlichen Kürze der Nächte – auch doppelten Lohn verdienen kann (vgl. Od. 10, 82 ff.). Auch die Populärwissenschaft der Antike (z.B. GEMINUS im 1. Jh. v.Chr.) behandelte diese interessante Erscheinung in behaglicher Breite, wobei man gewöhnlich auch an die Erfahrungen des PYTHEAS hoch oben im Norden erinnerte[24].

Aber ich glaube dennoch nicht, daß die alten und volkstümlichen Beobachtungen – die wohl feststellen konnten, daß die Tage an irgendeinem Punkt der nördlichen Hemisphäre nicht nur mit dem Herannahen des Sommersolstitiums immer länger werden, sondern auch, wenn in derselben Periode der Beobachtungsort mehr nach Norden verlegt wird – sozusagen *geradewegs* zu jenen komplizierten Berechnungen führen konnten, die in den vorigen Kapiteln besprochen wurden. Eben deswegen kann ich hier auch jene Ansicht nur als ein Kuriosum erwähnen, die in den letzten Jahren die Parallelkreise des ERATOSTHENES mit der folgenden «Theorie» erklären wollte: Die empirische Beobachtung dessen, daß die längsten Tage an verschiedenen Orten dieselbe Zeitdauer haben, habe es dem ERATOSTHENES ermöglicht zu entscheiden, wie er seine Parallelkreise ziehen soll[25]. – Ich möchte diesem Gedanken gegenüber folgendes betonen :

1. Die bisherigen Betrachtungen haben wohl davon überzeugt, daß die behandelten Berechnungen aus der Zeitdauer des längsten Tages eine ziemlich hochentwickelte mathematische (geometrische) Denkweise voraussetzen.

2. Diese Berechnungen wären auch nie möglich geworden – *ohne* jene Konstruktion, die wir der Einfachheit halber als «Gnomon-Weltbild» bezeichnet haben. Im Vergleich zu den Gnomon-Berechnungen sind diese anderen bedeutend komplizierter. Auch darum würde man also vermuten, daß die Berechnung der Polhöhe aus der Zeitdauer des längsten Tages als Methode wohl *späteren Ursprungs* ist als die verhältnismäßig einfachere Gnomon-Berechnung.

3. Es wäre wohl gewagt, Vermutungen darüber anzustellen, wann in der kulturellen Entwicklung der Menschheit mit den Beobachtungen von Schattenlängen und der Zeitdauer des längsten (bzw. des kürzesten)

---

24. Man vgl. den Text des GEMINUS z.B. in: M.R. COHEN-I.E. DRABKIN, op. cit., S. 120 ff.
25. Vgl. oben S. 88 und Anm. 61 zum 1. Teil dieses Buches.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Tages begonnen wurde. Aber wir können mit ziemlich großer Sicherheit behaupten, daß diese Beobachtungen einen echt wissenschaftlichen Wert erst dadurch bekamen, daß sowohl ihnen wie auch den daran anknüpfenden Berechnungen die Theorie von der Kugelgestalt der Erde und von ihrer zentralen Stelle im Weltall zu Grunde gelegt wurde.

4. Erst auf Grund dieser Theorie konnte man nämlich versuchen, eine geometrische Darstellung des Weltalls (das sog. Gnomon-Weltbild) zu entwerfen, die es ermöglichte, die Entfernung eines Ortes vom Kreis der Tag- und Nachtgleiche (dem Äquator) einem Meridian entlang zu berechnen, wenn das Verhältnis des Gnomons zu seinem Mittagschatten an gewissen Tagen des Jahres, besonders am Tag der Nachtgleiche oder am Tag des Sommersolstitiums, bekannt ist.

5. Meiner Vermutung nach muß eben dieses Gnomon-Weltbild auch die Entdeckung von *zwei Gleichheiten* nahegelegt haben. Einerseits hat nämlich dieses Weltbild überzeugend gezeigt, daß die *Polhöhe* eines Ortes und seine *Entfernung vom Äquator* (τὸ κλῖμα) untereinander gleiche Abschnitte desselben Meridians sein müssen. – Andererseits hat man auf Grund des Gnomon-Weltbildes auch die Gleichheit der *kürzesten Nacht* und des *kürzesten Tages* an demselben Ort postuliert. Ohne dieses Postulat, das eigentlich nur theoretisch zutreffend ist, hätte man gar nicht versuchen können, aus der Zeitdauer des längsten Tages an irgendeinem Ort seine Polhöhe (bzw. die ihr gleiche Entfernung vom Äquator) zu berechnen.

Ich glaube, man versteht nach diesen fünf Punkten nun leicht, warum in der antiken astronomischen und geographischen Literatur die Zeitdauer des längsten Tages für irgendeinen Ort gewöhnlich *zusammen* mit dem Verhältnis des Gnomons zu seinem Mittagschatten daselbst registriert wird. Die Berechnungen aus diesen zwei Angaben, d.h. die Entfernung vom Äquator aus dem Gnomon-Verhältnis und die Polhöhe aus der Zeitdauer des längsten Tages daselbst, lassen sich nämlich gegenseitig kontrollieren[25a]. – Nebenbei bemerkt, versteht man auch, warum in der stereotypen Schilderung der Kennzeichen der Parallelkreise bei PTOLEMAIOS (II 6) an erster Stelle immer die Tageslänge genannt wird, obwohl das Berechnen der Polhöhe aus dieser Angabe bedeutend komplizierter ist als das Berechnen der Entfernung vom

---

25a. Man liest in dem Buch von O. NEUGEBAUER, *The Exact Sciences in Antiquity*, 2. Ausg. 1957, S. 183, über das Verhältnis *M:m* («the ratio of longest to shortest daylight») und dann auf S. 185 den Satz: «There is no trace in Babylonian astronomy of varying values of *M* according to geographical latitude». – Ich frage mich nur: Was mag der Sinn des Begriffes «geographische Breite» sein – wenn man die Kugelgestalt der Erde noch nicht erkannt hat?

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Äquator aus der Gnomon- und Schattenlänge. Das Länger-Werden der Tage fällt nämlich *unmittelbar* auf, wenn man mehr und mehr nach Norden zu geht. Demgegenüber kann das sorgfältige Messen und Vergleichen der Schattenlängen auf einem Gebiet mehr nach Norden oder mehr nach Süden zu nur etwas *Sekundäres* sein. Aber dies bedeutet noch keineswegs, daß man auch historisch die wissenschaftlichen Berechnungen mit der Angabe der Zeitdauer des längsten Tages hätte beginnen können.

Man hat also den Eindruck, daß das Zusammengehen der beiden Angaben (längster Tag – Gnomon-Verhältnis) und auch die aus diesen folgenden zweierlei Berechnungen zumindest seit HIPPARCHOS eine Tradition in der griechischen Wissenschaft waren. Es sei hier noch einmal auf jene schon einmal zitierte STRABON-Stelle (C 71) hingewiesen, die uns die Stellungnahme des HIPPARCHOS in einer geographischen Streitfrage des Altertums überliefert: Es sei nicht möglich zu entscheiden, ob die Berge zwischen Kilikien und Indien in der Tat auf demselben Parallelkreis liegen, da *weder das Verhältnis der Zeitdauer des längsten Tages zu derjenigen des kürzesten noch das Verhältnis des Gnomons zu seiner Schattenlänge vom betreffenden Gebiet bekannt ist.* – Es muß also, um die geographische Breite bestimmen zu können, mindestens eine der beiden Angaben – Zeitdauer des längsten Tages oder Gnomon-Verhältnis – bekannt sein. Am besten ist es jedoch, wenn man beide Angaben kennt, denn die daraus ableitbaren Berechnungen kontrollieren sich gegenseitig. (Ein solcher Fall war z.B. in den Jahren nach HYPSIKLES die Frage: «Alexandria» oder nur im allgemeinen «Unter-Ägypten», da die beiden Angaben: «längster Tag von 14 Stunden» und das «äquinoktiale Gnomon-Verhältnis, 5:3», nicht genau denselben Breitengrad ergeben.) – Das war also der Standpunkt des HIPPARCHOS. Aber ob man dieselben beiden Angaben (längster Tag und Gnomon-Verhältnis) nicht auch schon viel früher, v o r HIPPARCHOS, zumindest im Prinzip ebenso behandelt hatte?

Es wurde im ersten Teil dieses Buches jener PHILON, eine Quelle des ERATOSTHENES, erwähnt, der schon am Ende des 4. oder am Anfang des 3. Jahrhunderts in Äthiopien Beobachtungen über den längsten Tag (Sommer-Solstitium) und über den Gnomon-Schatten angestellt hatte. Ja, noch früher, in der zweiten Hälfte des 4. Jahrhunderts, scheint auch PYTHEAS nicht bloß das Gnomon-Verhältnis für Massalia so überraschend genau gemessen zu haben; aller Wahrscheinlichkeit nach machte er auch Aufzeichnungen über die Zeitdauer des längsten Tages an verschiedenen

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Punkten der Erde[26]. Und hätte PYTHEAS aus der Zeitdauer des längsten Tages nicht auch die Polhöhe ebenso berechnen können, wie er für Massalia den dortigen Parallelkreis aus dem Gnomon-Verhältnis tadellos berechnet hatte? – Man denke vor allem daran, daß auch jener STRABON, der keine Gelegenheit versäumte, PYTHEAS zu schmähen, diesem seine wohl allgemein anerkannten *astronomischen und mathematischen Kenntnisse* – wovon auf der anderen Seite er, STRABON, selber recht wenig verstanden haben mag – belassen mußte[27].

Auf Grund der konkret vorhandenen Belege wird man zwar kaum entscheiden können, ob PYTHEAS wirklich imstande war, aus der Zeitdauer des längsten Tages die Polhöhe irgendeines Beobachtungsortes zu berechnen, aber es gibt doch Anzeichen, die für einen solchen Verdacht sprechen.

a ) PYTHEAS scheint doch gewußt zu haben, worin der Zusammenhang der Schattenlänge des Gnomons einerseits und der Zeitdauer des längsten Tages andererseits besteht.

b ) Die ziemlich hohen Zahlen, in denen er das Gnomon-Verhältnis für Massalia zum Ausdruck brachte, sprechen dafür, daß er eine größere Genauigkeit erstrebte als die gewöhnliche, wie z.B. diejenige, die auf Grund der meisten derartigen Angaben bei STRABON und VITRUVIUS möglich ist. Aber worin mag die «größere Genauigkeit» bestanden haben, wenn das Gnomon-Verhältnis *nicht* auf Breitengrade umgerechnet wurde?

c ) Die Parallelkreis-Bestimmung des PYTHEAS für Massalia war so überraschend genau, daß sie auch durch PTOLEMAIOS beinahe unverändert übernommen werden konnte.

Eben diese Tatsachen werfen die Frage auf: War nicht auch die Methode des PYTHEAS zumindest im Prinzip dieselbe wie die des PTOLEMAIOS? Dieselbe Frage anders formuliert: Hat nicht auch PYTHEAS die doppelte Methode des Berechnens der Entfernung vom Äquator aus dem Gnomon-Verhältnis und die andere des Berechnens der Polhöhe aus der Zeitdauer des längsten Tages schon ebenso praktiziert wie später PTOLEMAIOS und vor diesem zweifellos auch HIPPARCHOS?

*
* *

Noch akuter wird dasselbe Problem, wenn man an EUDOXOS in der

---

26. Man vgl. dazu STRABON C 75 und GEMINUS; letzterer zitiert nach M.R. COHEN-I.E. DRABKIN, op. cit., S. 120.

27. Vgl. STRABON C 201 und C 295.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



ersten Hälfte des 4. Jahrhunderts v.Chr. denkt. Es liegt zwar – meines Wissens – gar keine Überlieferung vor, nach der EUDOXOS Gnomon-Messungen vorgenommen habe. Aber zu welchem Zweck hat er den Sommerwendekreis über Griechenland im Verhältnis von 5:3 zweigeteilt: 5 Teile *über* dem Horizont und 3 *unter* demselben? – Eine ähnliche Zweiteilung desselben Kreises über Alexandria (7:5) haben wir vorhin für HYPSIKLES nachweisen können. Was EUDOXOS betrifft, so hat HIPPARCHOS dessen Angabe vom Verhältnis «des längsten Tages zur kürzesten Nacht» als eine *geographische Breitenbestimmung verstanden* – HIPPARCHOS hat also die Angabe des EUDOXOS zweifellos im Sinne des Gnomon-Weltbildes aufgefaßt. Und es kann auch gar nicht bestritten werden, daß HIPPARCHOS mit dieser Auslegung – wenn sie überhaupt eine «Auslegung» und nicht die einzig mögliche und richtige Art des Verstehens von EUDOXOS ist – im Grunde vollkommen recht hatte. Auch der andere Versuch des EUDOXOS, dasselbe Verhältnis in Zahlen auszudrücken (12:7), war natürlich eine Art Breitenbestimmung, und beide Verhältnisse ließen sich in Breitengrade umrechnen.

Es ist eine andere Frage, ob man ein ähnliches Umrechnen in Breiten*grade* in der Tat auch dem EUDOXOS zuschreiben darf. Ich wäre zwar geneigt, auch diese letztere Frage mit *ja* zu beantworten – besonders deswegen, weil ich sonst gar nicht erklären kann, warum denn EUDOXOS bestrebt war, das Verhältnis möglichst genau zu bestimmen: 12:7 *oder* 5:3. Wie im anderen Fall des Gnomon-Verhältnisses des PYTHEAS für Massalia (120:41,8) die ungewöhnlich hohen Zahlen nur dann sinnvoll und verständlich werden, wenn man aus diesem Verhältnis die Breiten*grade* berechnet, so scheint mir auch das peinliche Bestreben des EUDOXOS, genau das Verhältnis des längsten Tages und der kürzesten Nacht in Griechenland festzustellen, ein unmißverständlicher Hinweis auf die *Umrechnung in Winkelgrade* zu sein.

Aber ich bin mir auch voll bewußt, daß der heutige *consensus* von Philologen und Historikern gewichtige Argumente gegen meine letztere Vermutung vorbringen könnte. Darum zähle ich hier sogleich jene drei wichtige Argumente auf, die die Möglichkeit, daß EUDOXOS die geographische Breite in der Tat *in Winkelgraden* berechnet habe, auszuschließen scheinen.

1. Die Griechen hätten zur Zeit des EUDOXOS den Kreis noch überhaupt nicht in 360 Grade eingeteilt[28].

2. EUDOXOS habe weder eine Sehnentafel gehabt, noch die nötigen

28. «Certainly EUDOXUS could not have known the zodiacal signs as segments of the ecliptic exactly $30^0$ long, since he did not use the $360^0$ division of the circle.» Vgl. D.R. DICKS, *JHS* 86, 1966, S. 27-28.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



trigonometrischen Kentnisse besessen, um derartige Berechnungen anstellen zu können[29].

3. Auch den Begriff τὸ κλῖμα selbst habe EUDOXOS noch nicht in dem Sinne gehabt, wie ihn später HIPPARCHOS benutzte.

### *6. Der Begriff κλῖμα bei EUDOXOS*

Es wird sich lohnen, hier zumindest das dritte Argument sogleich näher ins Auge zu fassen :

Ich habe schon am Anfang dieser Arbeit darauf hingewiesen, daß das griechische Wort κλῖμα mit unserem heutigen Begriff *Klima* nicht identisch ist. Im Altertum hieß dieses Wort nur: *«Neigung», «Biegung», «Krümmung»*, besonders *des Himmelsgewölbes* und dann auch *der Erdoberfläche vom Äquator zu den Polen.* – Inwiefern hat man nun diesen echt wissenschaftlichen Begriff dem EUDOXOS absprechen wollen?

Wir haben vor allem eine STRABON-Stelle (C 391), die klipp und klar bezeugt, daß EUDOXOS, der «Mathematiker», die κλίματα sehr wohl gekannt hat. Man mußte vor allem diesen unbequemen Beleg aus dem Wege schaffen. Darum versuchte eine «gelehrte» Arbeit vor mehr als 50 Jahren, folgendes nachzuweisen[30]: Die STRABON-Stelle sei nur eine Reminiszenz an die Worte des PSEUDO-SKYMNOS von Chios (etwa um 90 v.Chr.), und darum könne sie gar nicht als Zeugnis dafür gelten, daß EUDOXOS den Begriff κλῖμα wirklich gekannt hat.

Aber das war noch lange nicht genug. Da war auch noch HIPPARCHOS, der auch mehrmals vom κλῖμα bei EUDOXOS sprach[31]. Auch das mußte man noch irgendwie beiseite schieben. Darum hat man sich noch eine andere «Theorie» zusammengebastelt[32].

Es wäre zwar möglich, daß HIPPARCHOS im Text des EUDOXOS das

---

29. Auch über den viel späteren ERATOSTHENES schrieb man noch: «... the calculation of the latitude from the length of the longest day involves a knowledge of trigonometry which ERATOSTHENES did not possess». D.R. DICKS, *Geogr. Fragments of HIPPARCHUS*, 1960, S. 159.

30. E. HONIGMANN, *Die sieben Klimata etc.*, 1929. – Ich kenne dieses Werk nur aus dem Zitat bei D.R. DICKS, op. cit., S. 160.

31. Man vgl. außer der HIPPARCHOS-Stelle, die in der «Einleitung» dieses Buches zitiert wurde, auch die anderen Stellen, wie z.B. diejenigen, die F. LASSERRE (*Die Fragmente des EUDOXOS von Knidos*, Berlin 1966, S. 52-53) als Fragmente F 67, 68 aufzählt.

32. D.R. DICKS, a.a.O.: «... Nevertheless, it is possible that HIPPARCHUS found the word *klima* used by EUDOXUS for the inclination of sky, or possibly to denote direction, and that himself adapted it to designate geographical latitude in conformity with his own concept of a mathematical geography based on astronomical observations etc.».

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Wort κλῖμα vorgefunden hat. Aber HIPPARCHOS soll EUDOXOS im Grunde doch mißverstanden haben (!). Denn EUDOXOS soll das Wort κλῖμα in einem anderen Sinne gebraucht haben, als es von HIPPARCHOS ausgelegt wurde.

EUDOXOS habe nämlich das Wort κλῖμα nur benutzt, *um die Krümmung des Himmelsgewölbes zu bezeichnen* («for the inclination of the sky»), oder vielleicht, *um die Richtung anzugeben* («possibly to denote direction» – also das Wort *direction* wohl im Sinne von «Himmelsrichtung»). Und diesen einfacheren Begriff habe HIPPARCHOS sozusagen umgewertet, und er habe im Sinne seines eigenen Begriffs der mathematischen Geographie das Wort κλῖμα als *geographische Breite* verstanden («adapted it to designate geographical latitude in conformity with his own concept of mathematical geography»).

Es sei nun hier sogleich festgelegt – bevor wir diese spitzfindige Erklärung dadurch auf die Probe stellen, daß wir sie einfach weiterdenken – : Ich weiß nichts davon, daß das griechische Wort κλῖμα jemals «Richtung» oder «Himmelsrichtung» (direction) *im allgemeinen* bedeutet hätte. Die «Richtung» = «direction» kommt im Zusammenhang mit dem Wort κλῖμα nur insofern in Betracht, als man sich dabei auf den *nord-südlichen Ortswechsel* beschränkt, wenn man also vom «κλῖμα mehr nach Norden» oder von einem «κλῖμα mehr nach Süden zu» spricht. Eben auf diesem Wege entstand aus dem Wort κλῖμα der griechischen Wissenschaft unser Begriff *Klima.* Darum ist es von vornherein unwahrscheinlich, daß EUDOXOS diesen ursprünglich *echt wissenschaftlichen* und in seiner Bedeutung fest umrissenen Ausdruck in einem solchen *abgeleiteten Sinne* gebraucht haben sollte. Und so wird man diesen Teil der «Erklärung» als nicht-kontrollierten Einfall sogleich auch vergessen dürfen.

Nehmen wir jetzt probeweise an, daß EUDOXOS in der Tat unter κλῖμα nur die «Krümmung des Himmelsgewölbes» verstanden hätte. In der Tat ähnlich bezeichnete bald nach EUDOXOS AUTOLYKOS die «Neigungen» der verschiedenen Kreise am Himmel mit dem Wort κλίσις[33]. Doch EUDOXOS wußte außerdem auch von der *Kugelgestalt* der Erde, wie dieser Gedanke mindestens seit PYTHAGORAS *communis opinio* in der griechischen Wissenschaft war. Ja, EUDOXOS dachte die kugelförmige Erde auch *im Mittelpunkt des Weltalls.* Und hätte er nicht auch dasselbe gewußt, was oben von ARISTOTELES in einem anderen Zusammenhang schon zitiert wurde?

---

33. AUTOLYCI, *De sphaera quae movetur. De ortibus et occasibus etc.*, ed. F. HULTSCH, 1885, Lipsiae; index s.v. «*κλίνειν* et *κλίσις*».

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Ich meine nämlich, daß nach dem Stagiriten die kugelförmige Erde auch gar nicht besonders groß sein kann. Man braucht in südlicher oder in nördlicher Richtung nicht besonders weit zu gehen, und schon sieht man den Horizont, jenen Kreis sich verändern, der die sichtbare und die unsichtbare Hälfte des Himmelsgewölbes voneinander trennt. – Erlebt wird also die Veränderung des *klimas,* der «Krümmung des *Himmelsgewölbes*» dadurch, daß man auf der *Erdoberfläche* nach Norden oder nach Süden geht. Der wissenschaftliche Terminus κλῖμα heißt auch nicht *«Krümmung des Himmelsgewölbes im allgemeinen», sondern man versteht darunter, daß man diese Art Krümmung immer in nordsüdlicher Richtung,* zwischen den Polen und dem Äquator, erleben kann. – Aber wie könnte man diesen Begriff κλῖμα bloß auf den Himmel beschränken, wenn man dabei auch von der Kugelgestalt der *Erde* weiß? Oder noch prägnanter formuliert: War nicht eben die Krümmung des Himmelsgewölbes, das κλῖμα, der sichtbare Beweis dafür, daß die *Erde* auch in nord-südlicher Richtung gekrümmt ist? (Vgl. PTOLEMAIOS, *Almag.* I 4).

Wohl ist das κλῖμα vor allem die *declinatio caeli* – auch bei VITRUVIUS noch. Aber selbstverständlich wurde derselbe Begriff sogleich auch auf die Erde übertragen. Ähnliches gilt auch für die Begriffe: *Äquator, Wendekreise, Parallelen, Pole* etc. Die Schaffung all dieser Begriffe ging Hand in Hand mit der Erkenntnis von der Kugelgestalt der Erde und damit selbstverständlich auch zusammen mit der Übertragung der betreffenden Begriffe vom Himmel auf die Erde. Man kann *keinen* von diesen Begriffen – auch *nicht* für die älteste Zeit der griechischen Wissenschaft – bloß auf den Himmel beschränken.

[Selbstverständlich m u ß t e EUDOXOS den Begriff κλῖμα sowohl auf die *Krümmung des Himmelsgewölbes* wie auch auf die der *Erdkugel* beziehen. Es seien hier, um dies zu illustrieren, seine beiden Fragmente 287 und 288 (bei LASSERRE)[34] nur in Übersetzung eingefügt :

(287) «EUDOXOS habe von den ägyptischen Priestern erfahren, der Nil werde von den im Sommer in Äthiopien unaufhörlich und heftig niederfallenden Regen gefüllt. (288) Dies geschehe *infolge der umgekehrten Aufeinanderfolge der Jahreszeiten; denn, wenn bei uns Bewohnern der Gegenden unter der Sommerwende Sommer* herrscht, herrscht zu gleicher Zeit Winter bei den Gegenbewohnern (d.h. bei den Bewohnern der *südlichen Hemisphäre) unter dem Winterwendekreis* etc.» – Die stilistische Wendung «*unter* dem Sommerwendekreis» und «*unter* dem Winter-

34. F. LASSERRE, op. cit., S. 100. Hier wird übrigens der griechische Ausdruck «*ἀντιπερίστασις τῶν ὡρῶν*» (in meiner Übersetzung: «*umgekehrte Aufeinanderfolge der Jahreszeiten*») als «*Rückwirkung* der Jahreszeiten» verdeutscht. – Es ist mir nicht klar, was in dieser Übersetzung das deutsche Wort «Rückwirkung» heißen soll.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



wendekreis» verrät, daß man diese Kreise ursprünglich – wie natürlich – auf dem Himmelsgewölbe gedacht hatte. Aber natürlich wurden dieselben Kreise zugleich auch auf die Erdkugel projiziert.]

Zusammenfassend halte ich also jene Unterscheidung, wie EUDOXOS auf der einen Seite und wie HIPPARCHOS auf der anderen Seite den Begriff verstanden habe, für sehr unwahrscheinlich, ja, für völlig unbegründet.

Hat jedoch EUDOXOS den wissenschaftlichen Begriff κλῖμα in demselben Sinne gebraucht, wie ihn später HIPPARCHOS verstand, so erhebt sich die Frage: Hätte EUDOXOS das «κλῖμα von Griechenland» mit jenem Zweiteilen des Sommerwendekreises im Verhältnis von 5:3 (das, anders ausgedrückt, das Verhältnis des längsten Tages zur kürzesten Nacht bedeutet) charakterisieren können, wenn er nicht dasselbe «Gnomon-Weltbild» besessen hätte, das in den vorangehenden Kapiteln ausführlicher besprochen wurde? – Wie HIPPARCHOS uns versichert, hat EUDOXOS ein anderes Mal, d.h. in einem anderen seiner Werke dasselbe Verhältnis des längsten Tages zur kürzesten Nacht in Griechenland anders bestimmt (12:7). Natürlich entsprechen die beiden Verhältnisse n i c h t· genau derselben geographischen Breite; und das muß auch EUDOXOS gewußt haben[34a]. Doch besagen die beiden Verhältnisse – *ohne auf Winkelgrade umgerechnet zu sein* – kaum etwas.

Darum glaube ich, daß man jene Argumente, die am Ende des vorigen Kapitels aufgezählt wurden und die man in der letzten Zeit geneigt gewesen wäre, *gegen* die entwickelteren mathematischen Kenntnisse des EUDOXOS ins Feld zu führen, doch wird überprüfen müssen; von diesen Argumenten sind nämlich zwei noch unbeantwortet geblieben. Aber hier muß ich zunächst an eine interessante Vermutung der früheren Forschung im Zusammenhang mit EUDOXOS erinnern.

## *7. Eine Aufgabe für die künftige Forschung*

Im Jahre 1885 hat FR. HULTSCH seinen kleinen Textband *AUTOLYCUS* veröffentlicht[35]. AUTOLYKOS ist der älteste griechische Verfasser, von dem zwei kleine astronomisch-mathematische Abhandlungen erhalten geblieben sind. Seine Zeit ließ sich dadurch bestimmen, daß er nach einer Angabe des DIOGENES LAERTIOS «Lehrer» von jenem ARKESILAOS

34a. In dem Versuch, das eine Verhältnis auf Kyzikos und das andere auf ein südlicheres Gebiet zu beziehen, erblicke ich nur *eine vage moderne Spekulation.* Man hätte sich eher fragen sollen: *Wie* und *wozu* hat EUDOXOS diese Verhältnisse benutzt?

35. Siehe die Anm. 33.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



(etwa 315-240) war, dessen Name gewöhnlich mit der Begründung der sog. mittleren Akademie verbunden wird. AUTOLYKOS lebte also etwa in der zweiten Hälfte des 4. Jahrhunderts[36].

Das eingehende Studium des AUTOLYKOS-Textes hat nun den Herausgeber zu einer Vermutung geführt, die manchmal auch noch in den neueren Veröffentlichungen erwähnt wird. Man begegnet z.B. in einem der heute meistgelesenen Werke der griechischen Mathematikgeschichte der folgenden Bemerkung[37] :

«AUTOLYKOS und EUKLID führen oft ohne Beweise Sätze über Kreise auf der Kugel an. Daraus schließt HULTSCH, daß es schon vor AUTOLYKOS eine sphärische Geometrie, eine Sphairika, gegeben haben muß. Eine ungefähre Vorstellung, wie diese ausgesehen hat, können wir uns an Hand der viel späteren *Sphairika* des THEODOSIUS bilden, die wohl erhalten ist und in der man die genannten Sätze mit Beweisen wiederfindet.» (Dieser THEODOSIOS von Bithynien lebte am Ende des 2. oder am Anfang des 1. Jahrhunderts v.Chr.)

Liest man jedoch dieses Zitat in jenem Textzusammenhang, in den es in dem betreffenden Buch eingebettet ist, so wird man sich hüten, den wissenschaftlichen Wert sowohl des AUTOLYKOS wie auch seiner vermutlichen Quelle allzu hoch zu veranschlagen. Nachdem nämlich der betreffende moderne Verfasser bemerkt hatte, daß sowohl AUTOLYKOS als auch EUKLID (der letztere in seinen *Phainomena*) unter anderem bewiesen hatten, daß *«bestimmte Zeichen des Tierkreises zu ihrem Auf- und Untergang längere Zeit als andere brauchen»*, schickte er dem eben angeführten Zitat noch die folgende Bemerkung voraus :

«Viel weiter als bis zu solchen Allgemeinheiten konnte man vor der Erfindung der Trigonometrie kaum kommen. Erst HIPPARCHOS hat mit Hilfe seiner Sehnentafel durch trigonometrische Rechnung die Auf- und Untergangszeiten der Zeichen genau bestimmt.»

Nachdem nun im voraus mit Nachdruck auf die viel entwickelteren Kenntnisse des HIPPARCHOS hingewiesen wurde und nachdem uns der Verfasser versichert hat, daß sowohl bei AUTOLYKOS als auch in dem verwandten Euklidischen Werk *(«Phainomena»)* eigentlich nur «Allgemeinheiten» vorliegen, wird man kaum ein großes Interesse an jener

---

36. Wie HULTSCH selber in seiner *Praefatio* schrieb: «AUTOLYCUM Pitaneum ex Aeolide, mathematicum, ARCESILAI adulescentis, qui cum eo Sardes migraverit, praeceptorem fuisse DIOGENES LAERTIUS tradit libro IV (6, 28squ). Floruit igitur AUTOLYCUS ea fere aetate, qua ALEXANDER MAGNUS regnum obtinuit, et aequalis fuit ARISTOTELI seni ac, nisi forte extremis suae vitae annis ARCESILAUM instituit, usque ad exitum quarti vel ad initia tertii ante Chr.n. saeculi aetatem produxit.»

37. B.L.v.d.WAERDEN, op. cit., S. 321.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Vermutung haben, daß evtl. auch schon v o r AUTOLYKOS eine «Sphairika» existiert haben könnte. Die Sätze, die einst das Interesse von HULTSCH erweckt hatten, werden auch nicht angeführt; es mögen wohl ebenfalls nur «Allgemeinheiten» gewesen sein; darum schien auch der Hinweis auf den viel späteren THEODOSIOS vollkommen zu genügen. Wer wissen möchte, wie die vermutliche Vorlage des AUTOLYKOS ausgesehen haben mag, der könnte die fraglichen Sätze zusammen mit ihren Beweisen bei THEODOSIOS nachschlagen.

Nun will ich diesmal weder den AUTOLYKOS noch seine Quelle in Schutz nehmen. Es genügt mir, daß ich hier daran erinnere : HULTSCH selber hat beinahe vor hundert Jahren die Möglichkeit, daß eine «Sphairika» auch v o r AUTOLYKOS existiert haben mag, noch nicht so gleichgültig zur Kenntnis genommen. Im Gegenteil. Er war von seiner Entdeckung ü b e r r a s c h t. Ja, er hat sich sogleich auch auf jene beiden zeitgenössischen Autoritäten berufen, die ebensolche Vermutungen hatten wie er selber; diese waren nämlich J. L. HEIBERG[38] und P. TANNERY. Und diese beiden dachten auch sogleich an EUDOXOS[39]. Besonders erfreut über die Entdeckung von HULTSCH war der Franzose P. TANNERY, der in einem Brief an HULTSCH (vom September 1883) dem Verdacht Ausdruck gab, jene «Sphairika», die im Werk des THEODOSIOS vorliegt und die ä l t e r als ARCHIMEDES, ja ä l t e r sogar als AUTOLYKOS ist, könnte unmittelbar von E U D O X O S herrühren[40].

Soviel ich weiß, hat man diese übereinstimmende Vermutung der genannten drei Größen unserer Wissenschaft aus dem vorigen Jahrhundert seitdem nicht überprüft. Gab es in der Tat eine «Sphairika» auch schon in der Zeit v o r AUTOLYKOS? Dürfte man diese wirklich dem EUDOXOS zuschreiben? Und inwiefern war diese doch Vorläuferin der entwickelteren Wissenschaft des HIPPARCHOS? – Erst von der künftigen Forschung darf man eine befriedigende Antwort auf diese Fragen erwarten. Ich habe in diesem Zusammenhang nur deswegen an diese alte Schuldigkeit der modernen historischen Wissenschaft erinnert, weil mir scheint, daß die gemeinsame Vermutung von HEIBERG, HULTSCH und

---

38. F. HULTSCH, op. cit., p. IX adn. 10: J.L. HEIBERG, *Literaturgeschichtliche Studien über EUKLID*, Lips. 1882.

39. Ebd., p. XII. adn. 12: «Ab EUDOXO CNIDIO sphaerica scripta esse praeter HEIBERGIUM auspicatur etiam PAULUS TANNERY litteris mense Septembri anni 1883 ad me missis etc.»

40. Die Worte, französich zitiert, von F. HULTSCH, a.a.O.: «J'ai été joyeux de vous voir émettre l'opinion que les *Sphériques* de THEODOSE représentent un ouvrage antérieur à ARCHIMEDE et à AUTOLYCUS. On ne peut guère, je crois, penser qu' à EUDOXE.» Man vgl. dazu P. TANNERY auch in: *Recherches sur l' histoire de l' astronomie ancienne*, Paris 1893, S. 37.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



TANNERY eigentlich in dieselbe Richtung weist wie alle bisherigen Betrachtungen in diesem Buch.

## *8. Die bisherigen Vermutungen*

Ich habe schon in der «Einleitung» hervorgehoben, daß die Art und Weise, wie HIPPARCHOS den EUDOXOS durch das Werk des ARATOS kritisiert, folgendes zu verraten scheint: Die Tatsache, auf die HIPPARCHOS sich den beanstandeten Verfassern gegenüber berief, war keineswegs seine eigene und auch nicht eine zu seiner Zeit vollkommen neue Entdeckung. Im Gegenteil: Mindestens die grundlegenden Tatsachen, von denen HIPPARCHOS ausging, scheinen damals allgemein bekannt gewesen zu sein.

Zwar mußte ich wohl vor allem nachweisen, daß man zwischen PTOLEMAIOS und HIPPARCHOS – trotz der beträchtlichen zeitlichen Entfernung dieser beiden voneinander – in wissenschaftlicher Hinsicht keinen wesentlichen Unterschied aufzeigen kann. Alle Berechnungen, die in meiner Arbeit nach PTOLEMAIOS rekonstruiert wurden, gelten ohne Zweifel genauso für HIPPARCHOS. Wir haben uns zwar mit gröberen zahlenmäßigen Angaben begnügt als diejenigen, die bei PTOLEMAIOS vorliegen, aber wir haben dies bloß deswegen getan, weil auch HIPPARCHOS selber betont hatte, daß die von ihm mitgeteilten zahlenmäßigen Ergebnisse nur *Approximationen* seien.

[Ich mußte die Tatsache, daß man die Übereinstimmung der Methode und der mathematischen Kenntnisse zwischen HIPPARCHOS und PTOLEMAIOS – zumindest in der Beziehung, die uns hier unmittelbar angeht – zweifellos nachweisen kann, eigentlich nur aus *zwei* Gründen so nachdrücklich betonen :

*Erstens*, weil T. HEATH in seinem i.J. 1921 veröffentlichten Buch schrieb[41], unsere Kenntnisse im Einzelnen genügten *nicht*, um die vermutliche Sehnentafel des HIPPARCHOS mit derjenigen des PTOLEMAIOS zu vergleichen. Wir könnten unsere Schlüsse höchstens aus einer HERON-Stelle ziehen, etc. etc. – Ich wollte nun zeigen, daß man über diese vorsichtige, aber im Grunde methodisch natürlich richtige Stellungnahme von HEATH zumindest noch einen Schritt weiter hinausgehen kann. Auch *ohne* jene HERON-Stelle zu berücksichtigen, auf der HEATH seinen

41. *History of Greek Mathematics* II, 259 (1921): «We have no details of HIPPARCHUS' Table of Chords sufficient to enable us to compare it with PTOLEMY'S, which goes by half-degrees, beginning with angles of ½°, 1°, 1 ½° and so on. But HERON in his *Metrica* says etc.»

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Gedankengang aufgebaut hat, kommt man zu einem ähnlichen Ergebnis: Es bestand *kaum* ein wesentlicher Unterschied zwischen der Sehnentafel des HIPPARCHOS und des PTOLEMAIOS.

Ich hatte jedoch auch einen *anderen,* noch wichtigeren Grund, diese Beobachtung zu betonen. Die Tatsache nämlich, die ich besonders hervorheben wollte, war eigentlich schon längst anerkannt. Trotzdem hat ein bekannter Forscher eben diese Ansicht vor einigen Jahren auf eine für mich verblüffende Art angezweifelt.

I.J. 1902 schrieb noch A.A. BJÖRNBO[42] : «Zur Zeit des HIPPARCHOS waren, aller Wahrscheinlichkeit nach, sämtliche in PTOLEMAIOS' Syntaxis gebrauchte Methoden (scil. trigonometrische Methoden) vollkommen entwickelt.» – Aber im Gegensatz zu dieser Ansicht – die für mich zuerst eine Arbeitshypothese war und die sich dann erhärten ließ - sprach ein anderer Forscher i.J. 1972 von der «Abwesenheit einer systematischen Trigonometrie vor HIPPARCHOS»[43]. Ja, dieser Forscher beschloß seinen Gedankengang mit Worten, die sich deutsch etwa folgendermaßen wiedergeben lassen:[44] Man dürfe sich auch durch eine gewisse antike Überlieferung nicht irreführen lassen, wonach nämlich angenommen werden könnte, daß die trigonometrischen Tafeln auch zur Zeit des HIPPARCHOS schon hochentwickelt gewesen seien. Ganz im Gegenteil. Wir hätten Beweise dafür, daß jene alten Tafeln, der Kern der Trigonometrie des HIPPARCHOS, höchstens *roh entwickelt* waren. – Abgesehen von der Bemerkung, daß ich von den angeblichen «Beweisen», die in diesem Aufsatz erwähnt werden – *good evidence* im englischen Text – überhaupt keine Spur sehe, lasse ich die eben skizzierte Ansicht einstweilen ohne Kommentar.]

Interessanter war für mich jenes Ergebnis meiner vorangestellten Untersuchungen – vergessen wir nicht: diese wurden durch die in der «Einleitung» zitierten Worte des HIPPARCHOS ausgelöst –, daß sich auch die Vorgeschichte der wissenschaftlichen Erkenntnisse im Zusammenhang mit dem «Schattenzeiger» (dem *Gnomon*) einigermaßen re-

---

42. A.A. BJÖRNBO, *Studien über MENELAOS' Sphärik,* in: *Abh. z. Gesch. d.math. Wissenschaften* 14, 1902, S. 133. – Ich zitiere die Stelle oben in meinem Text nach G.J. TOOMER, *The Chord Table of HIPPARCH,* in: *Centaurus* 18, 1973, 6-28.

43. O. NEUGEBAUER: *On some aspects of Early Greek Astronomy,* in: *Proceedings of the American Philosophical Society* 116 no. 3, June 1972, S. 249: «the absence of a systematic trigonometry in the time before HIPPARCHUS».

44. Ebd.: «It is important... not to be misled... into the assumption of a very developed stage of trigonometric tables in the time of HIPPARCHUS, comparable, say, to the table of chords in the *Almagest* computed in steps of ½°. On the contrary, I think, we have good evidence that suggests a rather crude set of tables as the core of HIPPARCHUS'S trigonometry.»



ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



konstruieren ließ. Zweifellos hat man die Verhältniszahlen des Gnomons und seines Mittagschattens (bei Sommersolstitium oder beim Äquinoktium) je nach geographischen Gebietseinheiten auch schon am Anfang des 3., ja sogar im zweiten Drittel des 4. Jahrhunderts v.Chr. aufgezeigt: PHILON in Äthiopien und PYTHEAS in Massalia. – Jetzt können wir diese Feststellung auch noch dadurch ergänzen, daß diese beiden Beobachter, allem Anschein nach, zusammen mit den für die betreffenden Gebietseinheiten charakteristischen Gnomon-Zahlen auch Aufzeichnungen über *die Dauer des längsten Tages daselbst* gemacht haben.

Aber auch über die Einzelbeobachtungen hinausgehend, konnten wir selbst einiges über die *Entwicklungsgeschichte des Gnomons bei den Griechen* registrieren. Über ANAXIMANDROS im 6. Jahrhundert v.Chr. ließ sich in dieser Hinsicht nur soviel mit Wahrscheinlichkeit feststellen: Er hat die Länge des äquinoktialen Mittagschattens von einem Gnomon wohl auf dem Wege bekommen, daß er das Spiegelbild des himmlischen Bogens zwischen den beiden Wendepunkten halbierte. Damit hat er allerdings auch jenes «Gnomon-Weltbild» angeregt, das zur weiteren Entwicklung dieses wissenschaftlichen Instrumentes unerläßlich war. – Nur mit Hilfe dieses Gnomon-Weltbildes konnte etwa ein Jahrhundert nach ANAXIMANDROS der nächste in dieser Hinsicht bedeutende Wissenschaftler, OINOPIDES, die «Schiefe der Ekliptik» als $24^0$, d.h. als die Seite des regulären Fünfzehnecks bestimmen. (Man muß nämlich dieses Polygon eben in den *Meridiankreis des Gnomons* einschreiben, um zeigen zu können, daß die Entfernung beider Pole voneinander «genau» die Seite des Fünfzehnecks ausmacht.)

Aber zwischen OINOPIDES und PYTHEAS klafft noch eine Lücke von einem Jahrhundert. Außer bei HERODOT – der auch selber eher ein älterer als ein jüngerer Zeitgenosse des OINOPIDES war – konnte ich kein Zeugnis für den Gebrauch des Gnomons im Jahrhundert v o r PYTHEAS finden. Dabei ist diese chronologische Lücke eigentlich noch weniger beunruhigend. Peinlicher ist im Grunde, daß wir auch über die Entwicklung jener wissenschaftlichen Kenntnisse nichts Bestimmtes sagen können, die zweifellos mit dem Gebrauch des Gnomons zusammenhingen. Denn es ist doch ein großer Unterschied, wenn wir über OINOPIDES in dieser Hinsicht nicht mehr aussagen konnten, als daß er wohl mit Hilfe des Gnomon-Weltbildes die Schiefe der Ekliptik gemessen hat, während PYTHEAS denselben Gnomon schon benutzte, um die Entfernung der Stadt Massalia vom Äquator zu messen bzw. um den Parallelkreis über diesem Ort zu bestimmen.

Man überlege sich nämlich folgendes, um den prinzipiellen Unter-

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



schied der beiden Messungen, der des OINOPIDES und der anderen des PYTHEAS, in seiner vollen Breite zu erfassen : Mit den beiden Längen der Mittagschatten des Gnomons bei Sommer- und Wintersolstitium waren eigentlich auch die scheinbaren Wendepunkte der Sonne am Himmelsgewölbe gegeben. Dadurch daß ANAXIMANDROS diese Wendepunkte vermutlich erkannt hat und daß er das Spiegelbild des himmlischen Bogens zwischen denselben Punkten halbiert hat, bekam man drei Durchmesser: diejenigen der beiden Wendekreise (der κύκλοι τροπικοί) und den Durchmesser des Äquators (des κύκλος ἰσημερινός). Es spielte dabei gar keine Rolle, wo man die betreffenden Schattenlängen des Gnomons (bei den Solstitien und Äquinoktien) gemessen hatte; die Entfernungen der beiden äußeren Kreise (der τροπικοί) vom mittleren (dem ἰσημερινὸς) blieben, als Bogenlängen am Meridian gemessen, immer dieselben. Man hat also sozusagen «konstante Größen» bekommen. Eben diese, eigentlich schon durch ANAXIMANDROS ermittelte *Konstante,* die Hälfte der Entfernungen beider Wendekreise voneinander, hat nun auch OINOPIDES als Seite eines regelmäßigen Polygons (des Fünfzehnecks) *gemessen.*

Dagegen maß PYTHEAS, etwa ein Jahrhundert nach OINOPIDES, schon eine je nach geographischen Örtern *variable Größe:* den Parallelkreis bzw. seine Entfernung vom Äquator. Natürlich mußte auch diese Variable – im Sinne des damals schon zweifellos gültigen Weltbildes – als ein *Bogen* gemessen werden (wie auch die Schiefe der Ekliptik, die «Entfernung beider Pole voneinander», ein Bogen ist). Aber um diesen anderen *Bogen* – die Entfernung der Stadt Massalia vom Äquator einem Meridian entlang – zu bekommen, konnte man nur die Länge des Gnomons und seines Mittagschattens beim Solstitium vergleichen: $120:41\frac{4}{5}$. Und dieses Verhältnis besagt nur dann etwas über den Parallelkreis von Massalia, wenn man es im Sinne irgendwelcher trigonometrischer Kenntnisse in einen Bogen umrechnen kann. PYTHEAS mußte also die gemessenen Längen (ihr Verhältnis) auch noch trigonometrisch umrechnen. Die ganze auf PYTHEAS bezügliche antike Überlieferung hat nur dann einen Sinn, wenn man annehmen darf, daß PYTHEAS dieses Umrechnen irgendwie meistern konnte.

Jener Gedankengang, den ich eben zu skizzieren versucht habe, führt also zu der Vermutung, daß man in den etwa hundert Jahren – zwischen OINOPIDES und PYTHEAS – auf dem Gebiete der Forschungen, die mit dem Gnomon zusammenhängen, mindestens zwei wesentliche Erkenntnisse erzielt haben muß.

1. Man muß vor allem erkannt haben, daß mit dem Gnomon und

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



seinem äquinoktialen Mittagschatten nicht nur die Hälfte des *Bogens* zwischen den Wendekreisen gemessen werden kann – das konstante Maß nämlich, das OINOPIDES der Seite des regulären Fünfzehnecks gleichgesetzt hatte –, sondern auch noch ein anderer, besonders interessanter Bogen, derjenige nämlich, der die Entfernung des Beobachtungsortes vom Äquator dem Meridiankreis entlang zeigt. – Blickt man auf eine der vorigen Skizzen, z.B. auf *Fig. 5.*, so heißt diese Erkenntnis soviel: Man kann nicht bloß den Bogen $\widehat{HG}$ ($=48^0$), die volle Entfernung der Wendekreise voneinander bzw. ihre Hälfte ($\widehat{HF} = \widehat{FG} = 24^0$) messen, sondern ebenso auch den *variablen Bogen* $\widehat{BF}$; dieser letztere ist die Entfernung des Beobachtungsortes *B* vom Äquator dem Meridian entlang. (Den Äquator veranschaulicht auf *Fig. 5.* sein Durchmesser: *NF.*)

1. Die andere wesentliche Erkenntnis, zu der man im Sinne des skizzierten Gedankenganges vermutlich irgendwann im Jahrhundert v o r PYTHEAS gelangte, bestand darin, daß man darauf kam, wie die geometrische Aufgabe des Messens gelöst werden kann. Ich versuche dies folgendermaßen zu rekonstruieren: – Man muß entdeckt haben, daß, da der senkrecht stehende Gnomon und sein waagerechter äquinoktialer Mittagschatten als Schenkel eines *rechten Winkels* gelten dürfen, auf diesen Fall zwei wohlbekannte und nützliche geometrische Sätze angewendet werden können.

a ) Vor allem kann der *Sonnenstrahl* – von der oberen Spitze des Gnomons ab bis zum Ende seines Schattens (auf dem irdischen Meridian, Punkt *C* auf *Fig. 5.*) – als *Hypotenuse* eines rechtwinkligen Dreiecks aufgefaßt werden. Und darum kann man auf diesen Fall auch den *Pythagoreischen Lehrsatz* anwenden. Man bekommt die fragliche Hypotenuse (das besagte Segment des Sonnenstrahls), indem man das Quadrat des Gnomons zu demjenigen seines Schattens addiert und aus der Summe Quadratwurzel zieht.

b ) Noch interessanter wird dasselbe rechtwinklige Dreieck – also der *Gnomon*, sein *Schatten* und ein Stück des *Sonnenstrahls* (nämlich das zwischen der oberen Spitze des Gnomons und dem Endpunkt seines Schattens) –, wenn man dabei an den bekannten *THALES-Satz* denkt: Jedes rechtwinklige Dreieck kann als in einen Halbkreis eingeschriebenes gedacht werden, wobei die *Hypotenuse* D u r c h m e s s e r des Halbkreises ist. Die beiden Katheten – der Gnomon und sein Schatten – werden dann zwei S e h n e n in demselben Halbkreis[44a]. – Man

---

44a. Es ist wohl nicht nötig, hier noch zu betonen, daß der diesmal erwähnte «Halbkreis», dem also das betreffende rechtwinklige Dreieck (mit den Katheten: Gnomon und

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



versuche darum jetzt, den vorigen Gedankengang umzukehren. Man hat vorhin aus der Tatsache, daß der Gnomon und sein Schatten Katheten sind, die *Hypotenuse* des rechtwinkligen Dreiecks berechnet. Jetzt weiß man, daß diese Hypotenuse *Durchmesser,* also die *«größte Sehne»* in einem Kreis ist. Könnte man nicht irgendwie feststellen, wie groß die beiden *kleineren Sehnen,* die Katheten (Gnomon und sein Schatten) im Verhältnis zur größten Sehne sind? – Man denke etwa folgendermaßen: Die «größte Sehne» (= der Durchmesser) unterspannt den *größten Bogen* des Kreises (= den Halbkreis). Wie groß sind jene Bogen, die die kleineren Sehnen, also die Katheten (Gnomon und sein Schatten), unterspannen?

Wie man sieht, führen die zuletzt gestellten Fragen schon zu dem historischen Problemkreis des *Rechnens mit Sehnen* über. Solange man nämlich nur einen konstanten Bogen – die Entfernung der beiden Wendekreise voneinander oder seine Hälfte, den «Bogen zwischen den beiden Polen» (unter seinem anderen Namen: die «Schiefe der Ekliptik», λόξωσις) – messen wollte, blieb das Problem der Sehnen sozusagen noch im Hintergrund. Ja, es war nicht einmal das Einteilen des Kreises in $360^0$ (Grade) unbedingt nötig. Man verband nur die beiden Punkte *H* und *F* (auf *Fig. 5.*) miteinander, und man fragte sich: Welches reguläre Polygon hat zu seiner Seite die Sehne *HF*? Oder: Wievielter Teil des ganzen Kreisumfangs ist der Bogen $\widehat{HP}$? – Darum drückt sich die im ersten Teil dieses Buches schon einmal zitierte PROKLOS-Stelle – anläßlich des Fünfzehnecks – folgendermaßen aus[45] :

«Beschreibt man in den durch die Pole gehenden Kreis (also in den Meridiankreis des Gnomon-Weltbildes – *A´.Sz.*) das Fünfzehneck ein, so erhält man den Abstand der Pole voneinander. Denn ihr Abstand voneinander beträgt *die Seite des Fünfzehnecks...*».

Der Ausdruck *«Seite des Fünfzehnecks»* steht in diesem Zusammenhang sowohl für die betreffende *Sehne* wie auch für jenen *Bogen,* der dem *Zentriwinkel von* $24^0$ entspricht. – Auf dieser Entwicklungsstufe – die meiner Vermutung nach mit großer Wahrscheinlichkeit dem OINOPIDES zugeschrieben werden kann – ist also weder das Einteilen des Kreises in 360 Grade noch ein genaueres «Rechnen mit Sehnen» bzw. eine systematische Tafel nötig, die die Längen jener einzelnen *Sehnen*

---

sein Schatten) einbeschrieben wird, *nicht* der *Meridiankreis* des Gnomon-Weltbildes ist. Wohl möchte man auch jetzt einen Bogen des Meridiankreises messen – also etwa den Bogen $\widehat{BF}$ auf *Fig. 5.* –, aber um dies zu erreichen, transponiert man nun den Gnomon und den Schatten (als Katheten) in einen *größeren Kreis,* dessen Durchmesser nämlich der Sonnenstrahl (zwischen Gnomonspitze und dem Endpunkt des Schattens) ist.

45. PROCLUS, *In Euclid. etc.* (F. 1873) S. 269 (SCHÖNBERGER, S. 353).

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



registrierte, welche die unterschiedlich großen *Bogen* (Kreisumfang-Teile) unterspannen.

Aber kaum hätte man auf diese beiden Dinge – Grad-Einteilung des Kreises und Rechnen mit Sehnen – zu jener Zeit verzichten können, in der man schon den Parallelkreis über Massalia feststellte, also zur Zeit des PYTHEAS.

Bevor wir jedoch die Probleme «360 Grade im Kreis» und das «Zusammenstellen einer Sehnentafel» näher ins Auge fassen, wollen wir noch einige Worte über das *EUDOXOS-Problem* unserer Interpretation sagen.

## *9. EUDOXOS zwischen OINOPIDES und PYTHEAS*

Es war eine Arbeitshypothese des vorigen Kapitels, daß man im Jahrhundert v o r PYTHEAS im Zusammenhang mit dem Gnomon zwei wichtige Erkenntnisse erzielt haben muß. Es wurde nämlich *einerseits* vermutet, daß man zu dieser Zeit allerdings schon erkannt hatte, daß es möglich ist, mit dem Gnomon *den Meridianbogen der Entfernung eines gegebenen Ortes vom Äquator ab* (also seine *«geographische Breite»*) zu messen. Und andererseits muß in demselben Jahrhundert auch die Methode ausgearbeitet worden sein, wie man den Zusammenhang der *Bogen* und der sie unterspannenden *Sehnen* berechnet.

Es fragt sich nun, ob sich nicht auch das, was man aus unserer Textstelle (in der «Einleitung») über EUDOXOS erfährt, in den vermutlichen Zusammenhang der historischen Entwicklung einfügen ließe. Wie steht EUDOXOS zwischen OINOPIDES und PYTHEAS? Was könnte man z.B. über das Thema «EUDOXOS und der Gnomon» sagen?

Liest man aufmerksam das HIPPARCHOS-Zitat in der «Einleitung» dieses Buches, so muß man vor allem zugeben, daß aus diesem eigentlich nicht unmittelbar hervorgeht, ob ARATOS (bzw. EUDOXOS) im besprochenen Zusammenhang überhaupt den Gnomon im Sinne gehabt hat. Denn wohl beginnt HIPPARCHOS die Begründung seiner Kritik mit den Worten :

«Darüber ist man jedenfalls einig, daß in den Gegenden von Griechenland der Schattenzeiger (= der Gnomon) zum Mittagschatten der Tag- und Nachtgleichen in dem Verhältnis von 4:3 steht etc.etc.» – Aber man könnte sich dennoch fragen, ob diese Worte in sich ein hinreichender Beleg dafür sind, daß ARATOS (EUDOXOS) auch den Gnomon benutzt hat? War es nicht eben HIPPARCHOS selber, der in der Streitfrage des κλῖμα – anstatt der anderen Berechnung auf Grund des längsten

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Tages – auf den Gnomon hinweisen wollte?

Ja, es sieht so aus, als könnte man auch aus den Fragmenten des Eudoxos den Gebrauch des Gnomons *nicht* nachweisen. Im Wortregister der Fragmenten-Sammlung von F. Lasserre wird das Wort γνώμων gar nicht unter den gebrauchten Ausdrücken aufgezählt[46].

Nun halte ich den Gebrauch des Gnomons seitens des Eudoxos dennoch für *sehr wahrscheinlich* – und zwar auf Grund dessen, was ich oben, in einem früheren Kapitel *(Das Verhältnis des längsten Tages zum kürzesten),* schon dargestellt habe. Ich lasse in diesem Zusammenhang jene – wie mir scheint, schon häufiger vorgeschlagene – Vermutung vollkommen außer acht, wonach man die Dauer des längsten Tages (oder diejenige der kürzesten Nacht) mit einer Klepsydra (Wasseruhr) gemessen hätte. Ich glaube, man hat es im vorliegenden Fall des Eudoxos-Aratos zweifellos mit einer anderen Art Messung zu tun. Denn unsere Quelle redet gar nicht von «Stunden» oder von irgendwelchen Einheiten der Zeit, mit denen Tag und Nacht gemessen werden sollten; sie spricht vom *Sommerwendekreis,* der vom Horizont zweigeteilt wird. Und man kann diese Operation am einfachsten eben an dem gezeigten Gnomon-Weltbild vornehmen.

Ich erschließe also aus jenen Worten des Aratos, die am Anfang dieser Untersuchungen nach Hipparchos zitiert wurden, daß schon Eudoxos jenes Gnomon-Weltbild besessen haben muß, das z.B. unsere *Figuren 12., 13a* und *13b* zeigen.

Es ist eine andere Frage, ob Eudoxos das von ihm festgestellte Verhältnis des längsten Tages zur kürzesten Nacht in Griechenland (5:3) auch in Breiten*grade* umgerechnet hat? – Ich habe oben auch schon zweimal die Frage gestellt (s. S. 169 und S. 173): Wozu wäre denn sonst Eudoxos bestrebt gewesen, das Verhältnis möglichst genau zu bestimmen: 12:7 oder 5:3? Mit dieser Frage wollte ich andeuten, daß ich – ungeachtet jener Zweifel der modernen Forschung, ob Eudoxos die Grad-Einteilung des Kreises überhaupt gekannt hat und ob er genügend trigonometrische Kenntnisse besaß, um aus solchen Verhältniszahlen geographische Breitengrade zu berechnen – an meiner Vermutung nach wie vor festhalten möchte.

Aber ich muß hier auch einen Gedankengang schildern, der meine eben wiederholte Vermutung zwar nicht ausschließt, aber auch nicht unbedingt erhärtet.

Es wurde in diesem Buch auch schon zweimal hervorgehoben, daß des Aratos-Zitat (oben in der «Einleitung»), nach dem der Sommer-

46. F. Lasserre, op. cit. Wortregister.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



wendekreis zweigeteilt wird, eigentlich vom Verhältnis des längsten Tages zur *kürzesten N a c h t* redet. Dagegen redet HIPPARCHOS in seinem Kommentar *nicht* vom Verhältnis des längsten Tages zur kürzesten Nacht – wie es sowohl nach seiner Quellenvorlage als auch nach dem natürlichen Stand der Dinge am einfachsten wäre, denn man vergleicht ja am einfachsten den längsten Tag mit der unmittelbar darauffolgenden Nacht. Statt dessen spricht HIPPARCHOS vom Verhältnis des längsten Tages zum kürzesten *T a g*. Wozu dieser merkwürdige Wechsel? – Mit dem Hinweis darauf, daß in der Antike die Gleichheit der kürzesten Nacht und des kürzesten Tages (an demselben Ort) *immer* postuliert wurde, ist eigentlich *noch nicht alles erklärt*. Trotz dieses Postulates scheint nämlich der Wechsel (also: «der kürzeste *T a g*» anstatt der «kürzesten *Nacht*») noch immer bloß eine Laune zu sein. Und doch wurde dieser Wechsel – wie mir scheint – *durch einen sehr ernsten Grund* hervorgerufen.

Man beachte vor allem, daß das «Verhältnis des längsten Tages zum kürzesten *(Tag)*» später sozusagen stereotyp war. Auch HYPSIKLES hat (s. oben S. 160 ) mit dieser letzteren Form des Verhältnisses die Breite von Alexandria charakterisiert. Und so sprach auch STRABON vom Verhältnis der beiden Tage (z.B. C 71).

Ich glaube, man bekommt eine Antwort auf die Frage, warum das wohl ursprünglichere Verhältnis («längster Tag zur kürzesten Nacht») in ein anderes («längster Tag zum kürzesten *Tag*») abgeändert wurde, wenn man zunächst die drei Abbildungen: *Figur 12.*, *13a* und *13b* sorgfältig ins Auge faßt.

Diese Zeichnungen zeigen alle drei je einen Teil der beiden Durchmesser, sowohl vom Sommerwende- wie auch vom Winterwendekreis, dicker ausgezogen; dünner blieben dagegen jene Teile derselben Durchmesser, die unter dem Horizont (unter der waagerechten Linie) liegen. Man könnte also nach diesen Skizzen leicht sowohl vom Verhältnis des längsten Tages zur kürzesten Nacht (der dicker ausgezogenen Segmente zu ihren dünnen Fortsetzungen beim Sommerwendekreis) wie auch vom Verhältnis des längsten und kürzesten Tages (der beiden dickeren Segmente der zwei Durchmesser an je einer Figur) zueinander sprechen.

Aber ob diese Skizzen auch zu jener Berechnung der Polhöhe geeignet sind, die oben in zwei Kapiteln *(Lösung in drei Schritten* und *Drei konkrete Fälle)* geschildert wurden? – *Keineswegs.* Dazu mußte das Gnomon-Weltbild erst umgestaltet werden. Und man beachte jetzt noch einmal, worin die Umgestaltung bestand.

Es wurde auf *Fig. 14a* vor allem der Durchmesser des Sommerwendekreises fortgelassen. Es entstand kein Schaden infolge dieser Fort-

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



lassung. Die Durchmesser *beider* Wendekreise werden ja – wie alle drei *Figuren (12., 13a* und *13b)* zeigen – durch den Horizont (durch die waagerechten Linien dieser Darstellungen) in demselben Verhältnis geschnitten. Nur entspricht dem *dünn* ausgezogenen Teil des Sommerwendekreises (der die «kürzeste Nacht» symbolisiert) das *dicker* ausgezogene Segment des Winterwendkreises (das Segment *UK* auf Figur *14a,* das symbolische Bild des «kürzesten Tages»). Nach dem Postulat ist die Dauer des kürzesten Tages dieselbe wie die Dauer der kürzesten Nacht (am selben geographischen Ort).

Die neue Darstellung *(Fig. 14a)* hat außerdem noch einen großen Vorteil. Es wurde durch sie jene *kompakte Skizze der Fig. 14b* vorbereitet, die als Grundlage des Berechnens des Bogens EQ (der Polhöhe) dient. N i c h t der Sommerwendekreis, sondern derjenige der Winterwende ermöglichte für Ptolemaios das Berechnen der Polhöhe auf Grund der Zeitdauer des längsten Tages.

Ich vermute also, daß das ursprüngliche Verhältnis des «längsten Tages zur kürzesten Nacht» (wie dies aus dem Eudoxos-Aratos-Zitat bei Hipparchos hervorgeht) durch die späteren – und unter diesen zweifellos auch schon durch Hypsikles und Hipparchos – deswegen in das «Verhältnis des längsten Tages zum kürzesten» verwandelt wurde, weil man – wie wir dies aus Ptolemaios ersehen[47] – die Polhöhe doch nur auf Grund der Zeitdauer des «kürzesten *Tages*» berechnet hat.

Es fragt sich also eher: Warum wird in unseren Quellen – wie ich sehe, *ohne Ausnahme immer* – die Zeitdauer des längsten Tages als Charakterisierung der geographischen Breite angegeben und nie diejenige des «kürzesten Tages» (in sich und alleine), wo in der Berechnung der Polhöhe doch die letztere benutzt wurde? Hätte nicht auch die Zeitdauer des kürzesten Tages leichter gemessen werden können als die des längsten Tages – besonders, wenn das Messen, wie man vermutet hat, (zumindestens später) mit einer Klepsydra oder mit einem ähnlichen Instrument vorgenommen wurde? – Ich kann auf diese Fragen nur mit Vermutungen antworten.

Es scheint nun, daß man ursprünglich – als man wahrscheinlich noch weniger Interesse für die geographischen Zusammenhänge hatte – viel mehr auf den längsten *Tag,* und nicht auf den kürzesten achtete.

---

47. Es sei hier nachträglich noch hinzugefügt: derjenige, der den Text aufmerksam kontrolliert, wird selbstverständlich bemerkt haben, daß Ptolemaios – im *Almagest* II 2 – in Wirklichkeit zuerst jenen Bogen berechnet, der bei uns auf *Fig. 15.* mit $\widehat{CA}$ bezeichnet wurde, und erst danach diesen aus $\widehat{NA} = 90^0$ subtrahiert. Ich habe, in einem früheren Kapitel, die beiden Schritte in umgekehrter Reihenfolge vollzogen, um das Berechnen noch einfacher zu gestalten.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Außerdem war der längste Tag wohl auch leichter zu identifizieren als der kürzeste. Der längste Tag ist auch derjenige *des kürzesten Mittagschattens im Jahr.* Und eben an diesem Tag kann man den Mittagschatten des Gnomons verhältnismäßig am sichersten messen. An dieser alten Tradition scheint man auch dann noch festgehalten zu haben, als man schon wußte, daß zu den geographischen Berechnungen nicht diese Angabe, sondern eigentlich eher die Zeitdauer des kürzesten Tages nötig ist.

HIPPARCHOS hat also – meiner Vermutung nach – dieselbe Berechnung der Polhöhe aus der Dauer des längsten Tages angewendet, die wir aus PTOLEMAIOS kennen. Diese Annahme, von der ich in der Rekonstruktion der Berechnungen ausgegangen bin, wird also auch durch den Wortgebrauch des HIPPARCHOS («Verhältnis des längsten Tages zum kürzesten») erhärtet. – Darf man nun vermuten, daß auch schon EUDOXOS sich derselben Berechnung bedient hatte?

Ich bin zwar der Meinung, daß EUDOXOS in der Tat die Mittel besaß, aus der Dauer des längsten Tages die Polhöhe wenigstens approximativ auch in Winkelgraden zu berechnen – abgesehen jetzt einmal von jenem Fehler in der Berechnung, die ihm von HIPPARCHOS auf Grund des ARATOS-Textes vorgeworfen wird –, aber ich muß zugeben, daß das Zitat in der «Einleitung» dieses Buches meine Vermutung *nicht unbedingt unterstützt.* Man kann auf Grund des eben behandelten Unterschiedes in der Ausdrucksweise bei ARATOS und HIPPARCHOS nur soviel schließen, daß H I P P A R C H O S schon davon wußte, daß die Berechnung der Polhöhe eigentlich auf Grund der Zeitdauer des «kürzesten T a g e s» erfolgt. D.h. dem HIPPARCHOS war jene *kompakte Skizze* (bei uns *Fig. 15.)* in der Tat schon geläufig, die auch später bei PTOLEMAIOS der Berechnung zugrunde gelegt wurde.

Aber auf Grund der zitierten ARATOS-Verse könnte man dieselbe Erkenntnis *nicht unbedingt* auch dem ARATOS oder dem EUDOXOS zuschreiben.

Es wurden also, was EUDOXOS betrifft, eigentlich nur zwei Dinge nachgewiesen :

1. Zweifellos hat er den Begriff κλῖμα in genau demselben Sinne gekannt und benutzt wie HIPPARCHOS und wie die gesamte spätere astronomisch-geographische Literatur.

2. Den *Gnomon* muß er natürlich gekannt haben. Man ersieht dies nicht bloß daraus, daß Existenz und wissenschaftlicher Gebrauch dieses Instrumentes sowohl für eine ziemlich lange Vergangenheit v o r EUDOXOS wie auch für die Zeit unmittelbar n a c h ihm (PYTHEAS) reichlich bezeugt sind. (Die Tatsache, daß EUDOXOS sein Instrument, die

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



παράχνη, wohl eben aus dem γνώμων entwickelt haben kann, braucht hier nicht berücksichtigt zu werden.) Aller Wahrscheinlichkeit nach hat er auch dasselbe Gnomon-Weltbild benutzt, das allen hier behandelten Berechnungen zugrunde lag. Dies ersieht man aus jenem Zweiteilen des Sommerwendekreises mit dem Horizont, das ARATOS erwähnt. (Man vergesse dabei nicht, daß wir dieses Gnomon-Weltbild unmittelbar erst aus VITRUVIUS kennen.)

Die Tatsache, daß ich *keinen Beleg* dafür habe, daß man dem EUDOXOS auch solche Gnomon-Berechnungen zuschreiben darf wie die im ersten Teil dieses Buches behandelten, kann auch bloßer Zufall sein. – Ebenso läßt sich die Vermutung, daß EUDOXOS aus der Zeitdauer des längsten Tages die Polhöhe *in Winkelgraden* zu berechnen imstande war, – soviel ich sehe – nach dem heutigen Stand unseres Wissens nur auf dem Wege einigermaßen wahrscheinlich machen, daß die Argumente, die man *gegen* diese Vermutung ins Feld führen könnte, überprüft werden. Eben dieser Überprüfung soll der dritte Teil dieser Untersuchungen gewidmet werden.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens

# III. WINKEL, BOGEN, SEHNENTAFELN

Unerläßlich nötig sowohl zu den Gnomon-Berechnungen wie auch zur Berechnung der Polhöhe eines gegebenen Ortes aus der Zeitdauer des längsten Tages daselbst waren die *Berechnungen mit Sehnen.* Sehnentafeln wurden – wie man glaubt – zum ersten Male eben durch HIPPARCHOS zusammengestellt. Darum hielt man ihn für den Schöpfer der Trigonometrie[1]. Da jedoch die beiden ersten Teile dieser Untersuchungen den Verdacht nahelegten, daß die Sehnentafeln bzw. die Berechnungen mit Sehnen bei den Griechen zur Zeit des HIPPARCHOS vielleicht schon eine ältere Tradition waren, versuchen die hier folgenden Kapitel, zumindest an einige Gesichtspunkte hinsichtlich des historischen Problems der Winkelmessung und der Sehnentafeln zu erinnern.

## *1. Die Winkel in EUKLIDS Geometrie*

Der Begriff des *Winkels* in der Planimetrie scheint eine Neuschöpfung der altionischen Wissenschaft etwa in der Zeit des THALES gewesen zu sein. Denn es ist gar nicht sicher, ob es diesen Begriff auch schon im vorgriechischen Ägypten und Babylon gab. Man hat versucht, diese interessante Begriffsbildung etwa folgendermaßen zu schildern[2]:

Wollte man in Ägypten eine «geneigte Fläche» beschreiben, so gab man dazu an, um wieviel *Handbreiten* die Böschung bei einer vertikalen Höhe von einer *Elle* zurückspringt. Statt des Winkels selbst maß man also in diesem Fall die beiden Katheten eines rechtwinkligen Dreiecks. Interessant ist dabei, daß die Maße der beiden Längen auch nicht in derselben Einheit angegeben werden: Das «Zurückspringen» – dies ist gewöhnlich die *kürzere Kathete* – wird in *Handbreiten* gemessen, während die *andere Kathete*, die «Höhe», als *eine Elle* (= 7 Handbreiten) genommen wird. – Eine ganz ähnliche Begriffsbildung sei auch für Babylon charakteristisch; auch dort hätte man noch die horizontalen und

---

1. Vgl. unter den Anmerkungen zur «Einleitung» 10., 11. und 12.

2. O. NEUGEBAUER, *Vorlesungen über Geschichte der antiken mathematischen Wissenschaften*, I.Bd. *Vorgriechische Mathematik*, Berlin 1934, S. 124.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



vertikalen Längen – also die für den fraglichen Winkel bezeichnenden Katheten des rechtwinkligen Dreiecks – in verschiedenen Maßeinheiten angegeben.

Man fragt sich nach einer derartigen Schilderung, ob es bei diesen Völkern überhaupt schon ein Wort gab, um den betreffenden Begriff, d.h. die griechische γωνία, zu bezeichnen. Denn «Böschung», «Höhe» und «Zurückspringen» scheinen ja in diesem Zusammenhang nur Hilfsbegriffe zu sein, die den fehlenden Begriff *Winkel* ersetzen.

Der griechische Begriff *«Winkel»* (γωνία) entstammt nun offenbar der Architektur. *Winkel* ist nämlich die innere *Ecke*, die zwei Mauern (oder Wände) miteinander bilden. In diesem Sinne benutzt auch HERODOT das Wort (I 51 oder VIII 122), wenn er von Weihgeschenken *«im Winkel»* (ἐπὶ τῆς γωνίας) der Vorhalle des Tempels schreibt. Daher ist auch der *rechte Winkel* (ὀρθὴ γωνία = *rectus angulus*) der ursprünglichen Wortbedeutung nach die *normale, gewöhnliche Ecke* zweier aufeinander stoßenden Wände.

Die Überlieferung der Griechen schrieb die ältesten und einfachsten Sätze über Winkel dem THALES zu. Er habe als erster solche grundlegenden Theoreme ausgesprochen wie z.B.: «Zwei gerade Linien bilden, wenn sie einander schneiden, *Scheitelwinkel*, die einander gleich sind»[3]. (Eben diesen Satz hat – meiner Rekonstruktion nach – der «Schüler» des THALES, ANAXIMANDROS, angewendet, als er das Spiegelbild des himmlischen Bogens zwischen den beiden Wendepunkten der Sonne halbierte, um die Schattenlänge des Gnomons zur Mittagszeit des Äquinoktiums zu bekommen.) Oder ein anderer einfacher Satz des THALES war: Die Winkel an der Grundlinie eines gleichschenkligen Dreiecks sind untereinander gleich;[4] sowie sein dritter interessanter Winkelsatz: Alle auf einem Halbkreis ruhenden Peripheriewinkel sind rechte Winkel[5]. (Wir haben schon gesehen, wie wichtig auch dieser Satz für die Gnomon-Berechnungen war. Es folgte aus ihm, daß der senkrecht stehende Gnomon und sein Schatten als solche Sehnen gelten dürfen, bei denen die Summe der dazugehörigen Bogen gerade einen Halbkreis ausmacht.)

Die eben erwähnten einfachen und grundlegenden Sätze verraten nicht nur das erwachte Interesse an dem neuentdeckten Begriff *«Winkel»*, sondern auch, daß man schon frühzeitig versuchte, die Winkel untereinander zu vergleichen und zu messen.

---

3. EUKLID, *Elem.* I 15. Vgl. PROCLUS, op. cit., 299 1-5.

4. EUKLID, I 5. Vgl. PROCLUS, op. cit., 250,20 -251,2.

5. DIOGENES LAERTIOS I 1, 24. Im allgemeinen über THALES siehe T. HEATH, op.cit. (1921) 130-137.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Man unterschied vor allem die drei Arten von Winkeln, wie die Euklidischen Definitionen besagen[6] :

1) «Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, einander gleiche Nebenwinkel bildet, dann ist ein jeder der beiden gleichen Winkel ein *rechter Winkel*.»

2) «Der *stumpfe Winkel* ist größer als der rechte Winkel.»

3) «Der *spitze Winkel* ist kleiner als der rechte Winkel.»

In EUKLIDS Geometrie werden die Winkel *nicht* in Graden und ihren Bruchteilen (also: Minuten und Sekunden) gemessen. Die Einheit des Winkelmaßes war – wie dies auch die drei eben zitierten Definitionen zeigen – der *rechte Winkel,* den wir als $90^0$ bezeichnen. An diesem rechten Winkel gemessen, erscheinen der *stumpfe* und der *spitze Winkel* als ein «größerer» bzw. als ein «kleinerer». Dieselbe Winkelmaß-Einheit erscheint auch in dem Euklidischen Satz, *Elem. I 13:* «Wenn eine gerade Linie, auf eine gerade Linie gestellt, Winkel bildet, dann muß sie entweder *zwei Rechte* oder solche bilden, die zusammen *zwei Rechten gleich* sind.» – Eben deswegen, weil man mit dem «rechten Winkel» als *Einheit* rechnet, kann es auch heißen, daß die Summe der inneren Winkel in jedem Dreieck *«zwei Rechten gleich»* ist[7]. Darum wird auch das Winkelmaß, das wir gewöhnlich als *«gestreckten Winkel»* oder als $180^0$ bezeichnen, nach dieser klassischen Art des Messens als *«zwei Rechte»* bezeichnet.

Man hat auch die *Bruchteile* des «rechten Winkels» als kleinere Maßeinheiten benutzt, wie dies aus einer PROKLOS-Stelle hervorgeht. – Es war nämlich eine alte pythagoreische Entdeckung[8], die PROKLOS als παράδοξον θεώρημα erwähnt, daß es nur *drei* regelmäßige Polygone gibt, die die Fläche um einen Punkt ausfüllen können; und zwar sind dies: das regelmäßige (gleichseitige) *Dreieck,* das *Viereck* (=Quadrat) und das *Sechseck.* Man würde diese Lehre heute etwa folgendermaßen behandeln :

Nur solche regelmäßigen Polygone können die Fläche um einen Punkt ausfüllen, bei denen *das Maß je eines Winkels – in Graden ausgedrückt – und mit einer ganzen Zahl* (6, 4 oder 3) *vervielfältigt, $360^0$ ausmacht.* Dies trifft in der Tat nur in den genannten drei Fällen zu. Denn ein innerer Winkel des regelmäßigen *Dreiecks* ist $60^0$, da die Summe der drei inneren Winkel jedes Dreiecks zwei Rechten ($180^0$) gleich ist und $\frac{180^0}{3} = 60^0$ ausmacht. Darum füllen die Fläche um einen

6. Die Definitionen 10, 11 und 12 im I. Buch der *Elemente.*
7. PROCLUS, op.cit. 379, 2 ff. Vgl. EUKLID, *Elem.* I 32.
8. Vgl. auch E. FRANK, *Plato und die sog. Pythagoreer,* Halle (Saale) 1923, 223.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Punkt *sechs regelmäßige Dreiecke aus:* $6 \times 60^0 = 360^0$. (In der Praxis bekommt man diese regelmäßigen Dreiecke um einen Punkt auf dem Wege, daß man um den betreffenden Punkt in den Kreis ein regelmäßiges Sechseck einschreibt und die Ecken dieses Polygons mit dem Zentrum des Kreises verbindet). – Ebenso kann man auch mit *vier Quadraten* die Fläche um einen Punkt ausfüllen, denn ein Winkel des Quadrats macht $90^0$ aus, und $4 \times 90^0 = 360^0$, während ein Winkel des regulären *Sechsecks* $120^0$ ist, und so füllen auch *drei solche Sechsecke* die Fläche um einen Punkt völlig aus: $3 \times 120^0 = 360^0$.

In diesem Sinne wird die Frage auch bei PROKLOS behandelt, doch er benutzt anstatt der Grade den *«rechten Winkel»* als Maßeinheit; aus dieser «Einheit» und aus ihren Bruchteilen baut er seine speziellen Winkelmaße auf; er sagt z.B. anstatt $60^0$ *«zwei Drittel eines rechten Winkels»*; und anstatt $120^0$ *«ein rechter Winkel + ein Drittel eines Rechten»*. – Um eine leichte Übersicht zu bieten, fasse ich hier der Reihe nach alle Winkelmaß-Bezeichnungen zusammen, die bei PROKLOS in diesem Zusammenhang genannt werden[9] :

1. Den Winkel von $30^0$ bezeichnet er als *«ein Drittel des rechten Winkels»* = τρίτον ὀρθῆς;
2. der Name des Winkels von $45^0$ heißt *«die Hälfte eines Rechten»* = ἥμισυ ὀρθῆς;
3. $60^0$ ist *«zwei Drittel eines Rechten»* = δίμοιρον ὀρθῆς;
4. $90^0$ selbstverständlich eine ὀρθή = *«ein Rechter»*;
5. $120^0$ (ein Winkel des regelmäßigen Sechsecks) wird als *«ein Rechter und ein Drittel»*, μία ὀρθὴ καὶ τρίτον genannt;
6. $180^0$ *«ein gestreckter Winkel»* beträgt – wie auch vorhin schon gesagt wurde – *«zwei Rechte»* = δύο ὀρθαὶ,
7. und schließlich der Name des Vollwinkels, $360^0$, heißt: *«vier Rechte»* = τέσσαρες ὀρθαὶ.

Die theoretische Geometrie begnügte sich mit diesen speziellen Winkelmaßen. Man konnte nämlich mit diesen so gut wie jedes Winkelmaß umschreiben. In einem Lemma zum allerletzten Satz der *Elemente* EUKLIDS (also im Lemma zum Satz *XIII 18*) heißt z.B. der Winkel von $72^0$: «um ein Fünftel des rechten Winkels *weniger* als ein rechter Winkel». In demselben Lemma wird der Winkel von $108^0$ als «um ein Fünftel des rechten Winkels *mehr* als ein rechter Winkel» bezeichnet, etc.

Es ist nun auffallend, daß man bei EUKLID keiner unmittelbaren Spur des Winkelmessens mit einem *Bogen*, also mit einem *Bruchteil des*

---

9. Man findet alle oben im Text genannten Winkelmaß-Bezeichnungen z.B. im EUKLID-Kommentar von PROKLOS (FRIEDLEIN-Ausgabe) auf den Seiten 304-305 und 383.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



*Kreisumfangs* begegnet. Dies muß – besonders angesichts der Chronologie – befremden. Man überlege sich nämlich folgendes :

Es wird gewöhnlich angenommen, daß EUKLID seine *Elemente* um 300 v.Chr. zusammengestellt hat. Einige Jahrzehnte vor ihm war jener PYTHEAS tätig, von dem wir schon wissen, daß er aus dem Verhältnis des Gnomons und seines Sommerwendschattens zu Massalia den dortigen Parallelkreis berechnet hatte. Er muß also nicht nur den Gnomon und seinen Schatten als aufeinander senkrechte Sehnen in einem Halbkreis angesehen haben, sondern er muß außerdem auch einen wichtigen *Bogen* des Meridiankreises in *Winkelgraden* berechnet haben. Wäre es nun in der Tat möglich, daß man von jenen wissenschaftlichen Kenntnissen des PYTHEAS, die für diese Berechnungen unerläßlich waren, gar nichts aus EUKLIDS systematischem Werk der Geometrie nachweisen könnte, wo EUKLID in unserer Chronologie doch ein späteres Zeitalter als PYTHEAS vertritt?

Nun kann man zwar die Kenntnis der $360^0$ aus EUKLIDS Werk wirklich nicht belegen. Aber dies darf eigentlich nicht wundernehmen, wenn man bedenkt, daß EUKLID in seinem gesamten Werk – besonders in der Arithmetik, aber zum Teil auch in der Geometrie – *das Nennen von konkreten Zahlen möglichst vermeidet.* (Dies hängt wohl mit seinem Streben nach Allgemeingültigkeit zusammen. Ausnahmen sind bei ihm beinahe nur die Polygone, die er doch nicht anders als mit der Anzahl ihrer Ecken – also *Drei-, Vier-, Fünf-, Zehn-, Fünfzehneck* u.a.m. – benennen konnte.)

Ansonsten scheint EUKLID das Messen des Winkels mit dem Kreisbogen zwischen den beiden Schenkeln – obwohl er keine Winkelgrade erwähnt – doch gekannt zu haben. Man denke z.B. an den hier schon einmal zitierten berühmten Satz *Elem. III 20: «Im Kreis ist der Zentriwinkel das Doppelte des auf demselben Bogen stehenden Peripheriewinkels.»* In diesem Fall *(Fig. 20.)* wird der Zentriwinkel ε offenbar mit dem *Kreisbogen* $\overset{\frown}{BC}$ und der Peripheriewinkel bei *A* mit der Hälfte desselben Bogens gemessen. Ein ähnliches gilt auch für den anderen Satz :

*III 26: «In gleichen Kreisen sind die Winkel, die auf gleichen Bogen stehen, untereinander gleich – und zwar sowohl die einzelnen Zentriwinkel wie auch die einzelnen Peripheriewinkel untereinander.»* – Auch in diesem Fall werden die Zentriwinkel mit jenen *Kreisbogen,* auf denen sie stehen, und die Peripheriewinkel mit den Hälften derselben Bogen gemessen.

Die grundlegenden quantitativen Zusammenhänge unter *«Winkeln und Bogen in einem Kreis»,* von denen PYTHEAS ausgehen mußte – als er seine Berechnungen für Massalia anstellte –, waren also auch schon in der Zeit v o r EUKLID bekannt: nur so konnten die eben erwähnten



ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Sätze in die *Elemente* aufgenommen werden.

Man kann außerdem, beinahe aufs Geratewohl, noch die folgenden drei Sätze aus demselben Buch der Euklidischen *Elemente* hervorheben :

*III 15: «Im Kreis ist der Durchmesser die größte Sehne, und von zwei anderen Sehnen ist immer die dem Durchmesser näherliegende die größere und die entferntere die kleinere.»*

*III 28: «In gleichen Kreisen unterspannen gleichlange Sehnen auf ihren entsprechenden beiden Seiten gleiche Bogen.»*

*III 30: «Man halbiere einen gegebenen Bogen des Kreises.»*

Auch diese drei Sätze waren zweifellos grundlegend wichtig für die Mathematiker, die zum ersten Male versuchten, mit *Sehnen* zu rechnen. Ja, man könnte noch mehrere solche Sätze aus demselben Buch zitieren. Ich glaube sogar, daß man sich nur die *fünf Sätze* aus dem III. Buch der *Elemente* vor Augen zu halten braucht, die hier eben hintereinander aufgezählt wurden, um sich unwillkürlich zu fragen: *War dieses ganze Buch bei* EUKLID *nicht eben die Vorbereitung zu einer Sehnentafel?* – Natürlich bleibt diese Frage nur ein Verdacht, aber es ist auf der anderen Seite eine unwiderlegbare Tatsache, daß man nie an das Zusammenstellen einer Sehnentafel hätte denken können *ohne* die Kenntnis all jener grundlegenden Tatsachen, die von EUKLID in diesem III. Buch zusammengestellt worden sind.

Man wird also diese kurze Betrachtung über das Winkelmessen in EUKLIDS Geometrie mit zwei Feststellungen schließen müssen, die nicht völlig im Einklang miteinander sind.

*Einerseits* kann man nämlich die Gradeinteilung des Kreises und das Messen der Kreisbogen in Winkelgraden aus EUKLIDS Werk *nicht* nachweisen. «Winkelgrade» erwähnt EUKLID nicht. (Aber ebensowenig spricht er von «befreundeten Zahlen», «Polygonalzahlen» und ähnlichen Dingen, obwohl diese letzteren Begriffe zu seiner Zeit vermutlich schon bekannt waren.)

*Andererseits* scheinen einige grundlegende Sätze in den *Elementen* das Interesse für die Zusammenhänge der *«Bogen und Sehnen im Kreis»* zu verraten. Diese letztere Beobachtung spricht dafür, daß jene Arbeit, die irgendwann später in der Zusammenstellung von Sehnentafeln kulminierte, unter den griechischen Mathematikern zur Zeit EUKLIDS zweifellos schon im Gange war. Ja, wir können diese Vermutung auch mit einer weiteren Tatsache der Überlieferung unterstützen.

Es wurde oben schon erwähnt, daß nach PROKLOS EUKLID die Konstruktion des Fünfzehnecks deswegen in die *Elemente* aufgenommen hat (IV 16), weil ursprünglich mit der Seite dieses Polygons die Entfernung

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



beider Pole voneinander – des Himmelspols und des Pols der Ekliptik – gemessen wurde. Ich versuchte vorhin in meiner Rekonstruktion, diese Erkenntnis dem OINOPIDES von Chios im 5. Jahrhundert v.Chr. zuzuschreiben. Nun ist dieser, meines Erachtens, der erste bekannte Fall dafür, daß man einen *Winkel* (einen Zentriwinkel des Kreises) mit einem *Bogen* und mit der dazugehörigen *Sehne* (einer Seite des regulären Fünfzehnecks) gemessen hat. Mit dieser Initiative begann wohl jene Arbeit, deren letzte Frucht für uns die *Sehnentafel* des PTOLEMAIOS darstellt.

Umso beunruhigender ist dann aber die Frage, wann eigentlich das Gradeinteilen des Kreises bei den Griechen eingeführt wurde.

## *2. Die 360 Grade in der Forschung*

Seit P. TANNERY sind sich die Historiker darüber einig, daß jene Gradeinteilung des Kreises, die bis heute üblich geblieben ist, bei den Griechen zum ersten Male bei HYPSIKLES auftaucht[10]. Ja, TANNERY hat eigentlich auch jene Vermutung inauguriert, die diese Einteilung – ebenso wie beinahe alles Wesentliche in der Arbeit des HYPSIKLES – auf orientalischen Ursprung zurückführt. Seitdem begegnet man derselben Erklärung in so gut wie allen einschlägigen Werken der Wissenschaftsgeschichte. Aber es wird sich doch lohnen, hier wenigstens mit zwei Zitaten zu illustrieren, welchen Akzent seit jener Zeit TANNERYS Vermutung bekommen hat. Man liest das eine Mal[11] :

«Für astronomische Rechnungen waren die gewöhnlichen Brüche zu unpraktisch; deshalb haben die Griechen die babylonischen Sexagesimalbrüche übernommen. Eine Teilung des Volltages (Tag + Nacht) in 360 Zeitgrade nach babylonischem Muster kommt schon bei HYPSIKLES (um 180 v.Chr.) vor. Im *Almagest* des PTOLEMAIOS (2. Jh. n.Chr.) wird der Kreis nach babylonischem Beispiel in 360 Grade geteilt, jeder Grad in 60 Minuten, jede Minute in 60 Sekunden, usw.»

Das andere Mal heißt es[12] :

«Der große Vorgänger des PTOLEMAIOS, HIPPARCHOS (um 150 v.Chr.), benutzte auch schon die sexagesimale Kreisteilung. Er kennt die babylonische Astronomie durch und durch. Er hat babylonische Finsternisbeobachtungen und Mondperioden überliefert. Wie PTOLEMAIOS

---

10. P. TANNERY, 1893, S. 40.
11. B.L.v.d. WAERDEN, 1956, S. 82-83.
12. Ebd. S. 84.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



hat auch HIPPARCHOS schon Sehnentafeln berechnet, die sexagesimal eingeteilt waren. Etc.etc.»

Nach den letzten Worten dieses Zitates müßte man sich beinahe schon fragen, ob wohl HIPPARCHOS und PTOLEMAIOS n u r das sexagesimale System von den Babyloniern gelernt haben oder ob sie nicht auch in der Berechnung der Sehnentafeln irgendwelchen «babylonischen Mustern» gefolgt sind.

Aber ich möchte zu derartigen Vermutungen einstweilen noch nicht Stellung nehmen. Es genügt mir, wenn ich einigermaßen illustrieren kann, wie *problematisch* diese «Entlehnungen der Griechen von ihren orientalischen Lehrmeistern» gerade *nach dem heutigen Stand der Wissenschaftsgeschichte* geworden sind. Denn man hat ja dieselbe historische Theorie vor einiger Zeit noch viel unbedenklicher akzeptieren können.

Vor einigen Jahrzehnten schrieb noch der verdienstvolle Philologe REHM in einem Artikel[13]: *«Für uns besonders wichtig (ist) das hohe Alter der Teilung (des Kreises) in 360°»;* und in demselben Satz verwies er sogleich auf WEIDNER, *Handbuch der babylonischen Astronomie* 129, wo ein *«auf ca. 900 v.Chr. datiertes Monument mit durchgeführter 360-Teilung der Ekliptik»* beschrieben wird. – Ja, haben die Babylonier den Kreis tatsächlich schon so früh – um 900 v.Chr. – 360-geteilt, so wird man von vornherein geneigt sein, das späte Erscheinen derselben Teilung bei den Griechen für eine Entlehnung zu halten.

Aber seitdem dieser Artikel in der *Realenzyklopädie der Classischen Altertumswissenschaft* veröffentlicht wurde, hat sich die Situation radikal verändert. Man behauptet, wir hätten inzwischen manches Neue über Babylon gelernt. Und so konnte i.J. 1966 der anerkannte Fachmann der babylonischen Wissenschaft über dasselbe Problem folgendes schreiben[14]:

«Soviel wir wissen, ist die babylonische theoretische, d.h. rechnende Astronomie um das vierte Jahrhundert v.Chr. entstanden. Seit dieser Zeit teilt man die Ekliptik in 360 Teile ein, von denen je 30 zu einem Tierkreiszeichen zusammengefaßt werden.»

Es wird also jene 360-Teilung des Kreises, die uns hier interessiert,

---

13. Im Artikel *Kykloi* in *RE* XI, 1922, Sp. 2327.

14. O. NEUGEBAUER in der Einführung des Werkes *HYPSIKLES, Die Aufgangszeiten der Gestirne,* herausg. von V. de FALCO u. M. KRAUSE, Göttingen 1966 (S. 5). – Weniger konkret war die Zeitbestimmung desselben Verfassers in seinem früheren Werk (*The Exact Sciences in Antiquity*[2], Providence, Rhode Island, S. 25): «The division of the circumference of the circle into 360 parts originated in Babylonian astronomy *of the last centuries B.C.* The sexagesimal number system as such is many centuries older and has nothing to do with astronomical concepts.»

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



selbst in der babylonischen Wissenschaft diesmal nicht auf 900 v.Chr., sondern plötzlich *um ein halbes Jahrtausend später* datiert.

Ohne daß ich zu dieser Datierungsfrage in der orientalischen Wissenschaft selbst irgendwie Stellung nehmen wollte, möchte ich in diesem Zusammenhang nur einige problematische Fragen – bloß vom Gesichtspunkt der «griechischen Entlehnung» aus – hervorheben.

Die eben zitierten Worte besagen, daß in Babylon um das vierte Jahrhundert v.Chr. «je *30* – von den insgesamt *360* Teilen der Ekliptik – zu einem Tierkreiszeichen zusammengefaßt wurden».– Diese Formulierung läßt selbst jene Frage offen, ob auch die *12* Tierkreiszeichen sich erst so spät in Babylon belegen lassen oder ob dies nur für die *360*-Teilung der Ekliptik gelten soll. Und wurden in der Tat *30* Teile «zu einem Zeichen *zusammengefaßt*»? Nicht eher umgekehrt? Denn es wäre ja schließlich möglich, daß die größere Einheit erst später in kleinere Teile zerlegt wurde. Wie man weiter unten bald sehen wird, scheinen manche Spuren in der griechischen Wissenschaft den Gedanken an eine solche Entwicklung nahezulegen.

Und ist die *360*-Teilung der Ekliptik in Babylon in der Tat erst *«um das vierte Jahrhundert v.Chr. entstanden»* – wie dies das vorige Zitat behauptet –? Wie soll man dann jene Worte von HERODOT verstehen, die oben in einem früheren Kapitel schon angeführt wurden? Der «Vater der Geschichte» schrieb ja schon *um die Mitte des fünften Jahrhunderts v.Chr.*, «die Griechen hätten den Polos und den Gnomon, sowie die *zwölf Teile des Tages* von den Babyloniern gelernt» (II 109). Kein Zweifel, daß die «zwölf Teile des Tages» – die hier zusammen mit dem Gnomon erwähnt werden – sich auf eine Einteilung der *Sonnenbahn* beziehen. (Man kann weder den Gnomon noch diese Einteilung des Tages von der *Sonnenbewegung* trennen.) Man wird sogar durch HERODOTS Worte sogleich auch daran erinnert, daß die Antike in der Tat sowohl den *Tag* (von Sonnenaufgang bis Sonnenuntergang) wie auch die darauffolgende *Nacht* immer zwölfgeteilt hat. Es wäre völlig unbegründet, die Worte des Historikers – zumal er doch eindeutig von den «zwölf Teilen des *Tages*» redet – anders auslegen zu wollen. Man hört also in den zitierten Worten (vermutlich!) von derselben *doppelten Zwölfteilung (Tag-und-Nacht), die auch aus späteren Quellen wohlbekannt ist – nach unserer Ausdrucksweise: von den insgesamt 24 Stunden des Tages.* HERODOTS «zwölf Teile des Tages» stellten also demnach nicht mehr einfach die «*12* Tierkreiszeichen», sondern eher schon ihre Verdoppelung dar. Ursprünglich hatte man nämlich den ganzen Kreis – die ganze Ekliptik – zwölfgeteilt, so bekam man die *12* Tierkreiszeichen; erst später wird man – aber noch v o r HERODOT – dieselbe Zwölf-Zahl

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



verdoppelt haben. Darum entsprechen in der griechischen Astronomie *einem* «Tierzeichen» *zwei Stunden* (= *30* Zeitgrade) und der *Hälfte des Zeichens* (= *15* Zeitgrade) eine Äquinoktialstunde. Dieser Einteilung sind wir vorhin bei PTOLEMAIOS und HIPPARCHOS, ja auch bei HYPSIKLES schon begegnet.

Was war es nun eigentlich, das die Griechen – im Sinne der HERODOT-Worte – von den Babyloniern gelernt hatten? Wieviel von der Himmelskunde darf man hinter HERODOTS Worten *«zwölf Teile des Tages»* vermuten? Und was haben später HYPSIKLES, HIPPARCHOS oder sogar PTOLEMAIOS – im Sinne des anderen vorhin angeführten modernen Zitates – aus der babylonischen Wissenschaft übernommen? Handelt es sich hier um *zwei* verschiedene Entlehnungen – um eine ältere noch v o r HERODOT und eine jüngere, um einige Jahrhunderte spätere, in hellenistischer Zeit, oder gab es auf diesem Spezialgebiet nur eine einzige solche Entlehnung? Und wie verhalten sich die beiden Übernahmen zueinander, wenn es zwei solche gab? Was haben die Griechen am Entlehnten geändert, oder haben sie es bloß unverändert weitergegeben?

Ich habe diese Fragen nicht deswegen formuliert, als ob ich hier neue Antworten darauf vorzuschlagen versuchen wollte. Ganz im Gegenteil. Ich wollte mit ihnen nur darauf hinweisen, wievieles unerklärt bleibt, auch wenn man bereit wäre, all das treuherzig zu akzeptieren, was in den letzten Jahrzehnten über die Entlehnungen der Griechen aus den älteren orientalischen Wissenschaften gesagt und geschrieben worden ist.

Um bei unserem konkreten Problem, der Gradeinteilung des Kreises, zu bleiben, so ist in diesem Fall die griechische Entlehnung aus einer älteren, orientalischen Tradition natürlich *von vornherein wahrscheinlich*. Es ließen sich dafür außer HERODOT noch andere Indizien anführen. Doch ist mit der bloßen Feststellung der Übernahme durch die Griechen – wie dies in der modernen Forschung häufig geschieht – eigentlich noch sehr wenig gesagt. Die Tatsache der Entlehnung selbst wird erst dann aufschlußreich, wenn sie auf Grund einer *besser fundierten Kenntnis* – sowohl der griechischen wie auch der orientalischen Verhältnisse – festgestellt wird. – Lasse ich also im folgenden die Frage der Entlehnungen aus fremden Quellen einstweilen außer acht, so will ich damit diese sehr wahrscheinliche Möglichkeit keineswegs in Abrede stellen. Überhaupt sollen die folgenden Hinweise nur den Weg für eine spätere, anspruchsvollere historische Forschung vorbereiten.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



## *3. Zodion als Bogenmaß*

Es ist wert, hier vor allem einen nicht sehr wesentlichen, aber doch interessanten Betrachtungsunterschied der alten und der heutigen Geometrie hervorzuheben, der nebenbei auch schon im Vorhergehenden berührt wurde.

Wir haben uns nämlich daran gewöhnt, sowohl den *Winkel* (γωνία) wie auch den *Bogen* zwischen seinen Schenkeln (περιφέρεια) mit demselben Maß zu messen. Wenn wir also von «$30^0$» sprechen, so verstehen wir darunter bald den Winkel, bald den Bogen. Dagegen versäumt die antike Terminologie gewöhnlich nicht, den Unterschied der beiden zu betonen: $30^0$ *als Winkel* heißt in der Geometrie *«ein Drittel des Rechten»* – wie auch vorhin schon darauf hingewiesen wurde –, während $30^0$ *als Bogen* in der Astronomie gewöhnlich als *«ein Zwölftel»* (δωδεκατημόριον) oder als ein *«Tierkreiszeichen»* (ζῴδιον, *signum*) bezeichnet wird. So begegnet man diesem letzteren Terminus schon bei dem ältesten griechischen Astronomen, dessen Werk erhalten geblieben ist, bei AUTOLYKOS von Pitane im 4. Jahrhundert v.Chr.[15] Selbstverständlich war dieser Ausdruck ebenso eine astronomische *Maßeinheit* wie in der Geometrie der *«rechte Winkel»*.

Natürlich sind die einzelnen Tierkreisbilder ihrer scheinbaren Ausdehnung nach untereinander sehr ungleich. Aber das griechische *Zodion* ist in dem hier behandelten Wortgebrauch nicht einfach das Sternbild, sondern – wie auch das synonyme δωδεκατημόριον zeigt – *ein Zwölftel der Peripherie der Ekliptik*. Das Zwölfteilen des Kreises ist eine der einfachsten geometrischen Konstruktionen: Der Radius des Kreises ist das Sechstel, und das Halbieren dieses Segmentes ergibt sowohl die Zwölfeck-Seite als Sehne wie auch den dazugehörigen Bogen von $30^0$ Zentriwinkel.

Nun begegnet man bei AUTOLYKOS sowohl einigen ganzzahligen Mehrfachen des *Zodions*, also den Mehrfachen unseres 30-Grades, wie auch dem *«halben Zodion»*, unserem 15-Grad. Eine kleinere Maßeinheit des Winkels als das *«halbe Zodion»* gebraucht AUTOLYKOS nicht. Es wäre darum leicht, von dieser Beobachtung aus den Schluß zu ziehen, daß man auf jener Entwicklungsstufe der griechischen Wissenschaft, die für uns die beiden Werke des AUTOLYKOS vertreten, auch noch gar nicht daran gedacht hätte, daß man das *Zodion* ($30^0$) auch in kleinere Teile als seine Hälften zerlegen könnte. Zu einiger Vorsicht mahnt uns jedoch

15. Anstatt die Belege im einzelnen aufzuzählen, verweise ich hier nur auf die schon erwähnte HULTSCH-Ausgabe von AUTOLYKOS (TEUBNER, 1885) im Index s.v. δωδεκατημόριον, δωδέκατον und ζῴδιον.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



die Tatsache, daß eben das *30*-Teilen des *Zodions* wohl ein sehr naheliegender Gedanke war.

Man kann ja die zwölf Tierkreis-Zeichen von den *12* Monaten des Jahres offenbar nicht trennen. Bei VITRUVIUS liest man:[16] «*Sol enim s i g n i spatium* – das ist das griechische *Zodion* – *quod est duodecuma pars mundi, m e n s e v e r t e n t e* (also in *30 Tagen!) transit: ita duodecim mensibus XII signorum intervalla pervagando cum redit ad signum unde coeperit, perficit spatium vertentis anni.*» Man braucht dieses Zitat nur noch mit jener Bemerkung zu ergänzen, daß der Monat auch zu HERODOTS Zeiten gewöhnlich *30* Tage zählte;[17] dementsprechend darf es als eine sehr alte Vermutung gelten, daß *die 360 Grade des Kreises ursprünglich wohl den Tagen des Jahres entsprachen*[18].

*In der Tat werden in der Fachliteratur der Antike kleinere Bruchteile des Zodions* verhältnismäßig häufig genannt. Nur beispielsweise hebe ich hier die folgenden *drei* Fälle hervor :

a ) POSEIDONIOS soll z.B. – als er die Länge eines größten Kreises der Erde berechnen wollte – von dem Gedanken ausgegangen sein, daß der Kreisbogen des Meridians zwischen Rhodos und Alexandria (nach der Kulmination des Canopus-Sternes an diesen beiden Örtern gemessen) *der 48. Teil eines vollen Kreises* sei. Unsere Quelle, KLEOMEDES, berichtet darüber:[19] «Er hat den ganzen Kreis des *Zodiakus* in *48* Teile geteilt, *indem er jedes Zwölftel (δωδεκατημόριον) von ihm v i e r g e t e i l t hat*» («ἕκαστον τῶν δωδεκατημορίων εἰς τέσσερα τέμνων»). In diesem Fall gilt also ein «Viertel-Zodion», *«der 48-ste Teil des Kreisumfangs»*, der nach unserer Rechnungsart einem Winkel von $7^0\,30'$ entspricht, sozusagen als Winkelmaß. – Wir werden später, in einem anderen Zusammenhang sehen, welche Rolle dieser einst angeblich «ständigen Maßeinheit der Wissenschaft» (also dem Maß: «*48*-ster Teil des Kreises» $=7^0\,30'$) in den neuesten historischen Spekulationen zufiel. Hier möchte ich vorerst nur den folgenden *chronologischen Zusammenhang* hervorheben.

Jener POSEIDONIOS, der einen wichtigen Bogen auf die erwähnte Weise mit einem «Viertel des *Zodions*» oder des *«Dodekatemorions»* maß – die beiden Termini sind ja synonym –, lebte von 135-51 v.Chr. Denkt man nicht nur an HIPPARCHOS, sondern auch an den noch älteren

---

16. VITRUVIUS, *De architectura* IX 1, 6.

17. HERODOT I 32.

18. Man liest bei T. HEATH (1921) II 214 (division of the circle into 360 parts): «...it was suggested as long as 1788 (by FORMALEONI) that the division was meant to correspond the number of days in the year».

19. CLEOMEDIS, op.cit. (ed. H. ZIEGLER, 1891), I 10.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



HYPSIKLES, so war in der griechischen Wissenschaft die *360*-Teilung des Kreises zur Zeit des POSEIDONIOS – auch nach jener Ansicht, die heute als *consensus* der Historiker gilt – schon mindestens seit einem Jahrhundert bekannt. Und da sich die Gelehrsamkeit des POSEIDONIOS auf einem anderen Niveau befand als die eines STRABON – POSEIDONIOS war einer der bedeutendsten Wissenschaftler seiner Zeit –, so könnte man erwarten, daß er auch die *Winkel* nach der damals zeitgemäßen Art und Weise, also in *Graden*, hätte messen sollen. Die Tatsache, daß POSEIDONIOS statt von einem $7^0 30'$ Bogen von einem *«Viertel eines Dodekatemorions»* sprach, darf jedoch nicht in dem Sinne ausgelegt werden, daß er die Grad-Einteilung (nach der Art des HYPSIKLES und HIPPARCHOS) nicht gekannt hätte. Die uns als «altertümlich» anmutende Art des Messens ist kein Beweis für die «Zurückgebliebenheit» des POSEIDONIOS, und noch weniger ist sie ein Beweis für die damalige Nichtexistenz der Winkelgrade.

b ) Mein zweites Beispiel für die Zerlegung des *Bogenmaßes Zodion* $(=30^0)$ in kleinere Bruchteile enstammt aus der ersten Hälfte des 3. Jahrhunderts, aus dem erhalten gebliebenen früheren Werk des ARISTARCHOS von Samos: *Über Größen und Entfernungen der Sonne und des Mondes*[20]. Die 6. «hypothesis» in diesem heißt nämlich[21], daß *«der Mond den fünfzehnten Teil eines Zodions unterspannt»*. Der «fünfzehnte Teil eines Zodions» entspricht genau unserem 2-Grad. – In diesem Zusammenhang interessiert uns natürlich nicht die Exaktheit bzw. die mangelnde Exaktheit dieses Messens, sondern nur die sprachliche Form der Behauptung, die verrät, wie weit ARISTARCHOS schon in seinem Jugendwerk Gebrauch von der Einteilung des Kreises gemacht hat. Vergleicht man dies damit, daß derselbe ARISTARCHOS in seinem späteren Werk – wie wir noch sehen werden – auch die Winkelgröße eines *halben Grades (30')* messen wollte, so fragt man sich unwillkürlich: Sind denn die *Bruchteile des Zodions* nicht bloß andere Ausdrucksformen für dieselben Winkelgrade, die bei HYPSIKLES, HIPPARCHOS und den späteren Astronomen als *«Teile der Peripherie»* (μοῖραι περιφερείας = *Grade*) bezeichnet werden?

c ) Und es sei hier zum Schluß noch ein geographisches Bogen-Messen in «Bruchteilen des Zodions» erwähnt, das das «Zwölf-Teilen» konsequent durchzuführen versucht. STRABON spricht einmal (C 135) von einer Gegend, wo es zur Zeit der Sommerwende die ganze Nacht hell ist und wo der Sommerwendekreis um *sieben Zwölftel – 7/12 – eines*

20. *Aristarchus Samius Astronomus, III B.C.*, ed. S.T.L. HEATH, Oxford 1913.

21. In der Übersetzung von HEATH: *Hypothesis* 6: «That the moon subtends *one fifteenth part of a sign*» = «τὴν σελήνην ὑποτείνειν πεντεκαιδέκατον μέρος ζωδίου».

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



*Zodions* über dem Horizont ist. Dieses Maß entspricht unseren $17^0\,30'$, da $\frac{7 \times 30^0}{12} = 17{,}5^0$ ist. Ein *«Zwölftel des Zodions»* ist also offenbar $2^0\,30'$. Wie man sieht, begann also diese Art des Messens mit dem Zwölfteilen des Vollkreises – so bekam man das *Dodekatemorion* oder *Zodion* –, und dann wurde diese Einheit wieder durch zwölf in weitere, noch kleinere Unterteile zerlegt. In der Tat erwähnt einmal auch SEXTUS EMPIRICUS im 2. Jahrhundert n.Chr., daß manche in der Astronomie *jedes Zodion wieder in zwölf Teile zerlegen*[22]. *Dies käme also dem Zerlegen eines Kreises nicht in 360 Grade, sondern in 144 ähnliche Teile gleich. – Interessant ist diese Art des Messens – von der Kreisteilung abgesehen – auch deswegen, weil sie neben dem allgemein bekannten dezimalen* und *sexagesimalen* System auf die Spuren eines *duodezimalen Systems* hinzuweisen scheint. Wie sonst Zehner- und Sechziger-, so bilden in diesem *Zwölfer-Einheiten* die Grundlage des Rechnens. Das Vorkommen dieses Systems – anstatt unserer Grade – verrät jene ursprüngliche Fülle von Möglichkeiten, den Kreis zu teilen, die beim Bogen-Messen von den Alten angewendet wurde und die den Forschern auch sonst schon aufgefallen war.

Übrigens schließt selbst die Tatsache, daß gelegentlich auch andere Arten des Bogen-Messens gebraucht wurden, keineswegs die Möglichkeit aus, daß zu derselben Zeit auch die uns geläufigen Winkelgrade bekannt und gebräuchlich waren. HIPPARCHOS selber liefert uns dafür den schlagendsten Beweis; er hat nämlich die Bogen nicht nur in den auch für ihn schon wohlbekannten und üblichen Graden, sondern manchmal auch in *Ellen* (πήχεις) und in *Fingern* (δάκτυλοι) gemessen; ein πήχυς war dabei $2^0$, und *24 Finger* (δάκτυλοι) machten einen πήχυς aus[23]. (Also *1 Finger* $= 5'$.)

Kompliziert war zu jener Zeit, als die *360*-Teilung des Kreises wohl schon seit langem bekannt war und in der wissenschaftlichen Praxis auch gebraucht wurde, sie aber noch *nicht zur festen Grundlage des Rechnens geworden war, welche beinahe mechanisch angewendet wurde,* vermutlich nicht so sehr das Messen der kleineren Winkelmaße, als

---

22. SEXTUS EMPIRICUS, adv. math. V. § 9.

23. Es seien hier dafür die Worte von REHM (Artikel *Kykloi* in: *RE* XI, 1922, Sp. 2328) angeführt: «Wie wenig das uns Gewohnte auch das Selbstverständliche ist, zeigt uns noch der Brauch HIPPARCHS (z.B. in ARAT. I 9, p. 90, 10 M., bei STRAB. 135 C, bei PTOLEM. *Synt.* VII 1, p. 4, 16. 6, 11. IX 7, p. 267, 14 H, dazu MANITIUS Übers. 407), der neben der 360-Teilung noch eine auf der Teilung des größten Kreises beruhende, dann aber als Einheitsmaß auch für Stücke kleinerer Kreise angewandte Messung nach πήχεις zu $2^0$ und δάκτυλοι, deren 24 auf den πήχυς gehen, anwendet (s. TANNERY, *Rec. archéol.* VII, 1886, 34).»

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



vielmehr das Umschreiben jener Winkelgrößen, die sich nicht in sog. runden Zahlen angeben lassen. Denn überlegen wir uns nur, wie man zu dieser Zeit z.B. jenen Winkel hätte angeben können, der in unserer HIPPARCHOS-Stelle (zitiert in der «Einleitung» dieses Buches) einfach als $41^0$ bezeichnet wird. – Vielleicht etwa folgendermaßen: «um zwei Ellen ($=2$ πήχεις $=2\times 2^0$) weniger als die Hälfte eines Quadranten ($=45^0$)».

Wir haben in der Tat eine ARISTARCHOS-Stelle, die das Winkelmaß von $87^0$ auf diese umständliche Art bezeichnet. Die 4. «hypothesis» in seinem Werk besagt nämlich[24] :

«Wenn der Mond uns halbiert erscheint, dann ist seine Entfernung von der Sonne *um ein Dreißigstel eines Quadranten weniger als ein Quadrant.*»

*ARISTARCHOS ging also bei diesem Messen vom Vierteilen* des Kreises aus, so bekam er einen *Quadranten* (τεταρτημόριον), der selbstverständlich unser $90^0$ ist. Er hätte den *Quadranten* natürlich auch als *«drei Zodia»* bezeichnen können, oder er hätte auch nach der in der Planimetrie sonst üblichen Betrachtungsart von einem *«rechten Winkel»* sprechen können. Und um danach den 87-Grad zu bekommen, subtrahierte er vom Quadranten nicht *«ein Zehntel des Zodions»* ($=3^0$), sondern *«ein Dreißigstel des Quadranten»* ($=3^0$).

Besonders aufschlußreich finde ich diese Art Umschreibung des Winkelmaßes durch ARISTARCHOS aus dem folgenden Grunde :

Es wurde vorhin schon erwähnt, daß ARISTARCHOS in seinem erhalten gebliebenen Werk den Winkel von $2^0$ Größe als den *«fünfzehnten Teil eines Zodions»* bezeichnet. Wie ARCHIMEDES berichtet[25], hat ARISTARCHOS in einem anderen nicht mehr vorhandenen Werk den scheinbaren Durchmesser der Sonne als einen 720-sten Teil des Zodiakus messen wollen. Wir kennen also demnach die folgenden Winkelmaß-Bezeichnungen aus den Werken des ARISTARCHOS :

| | | |
|---|---|---|
| $2^0$ | ..... | «ein fünfzehnter Teil des Zodions» |
| $3^0$ | ..... | «ein Dreißigstel des Quadranten» |
| $87^0$ | ..... | «um ein Dreißigstel des Quadranten weniger als ein Quadrant» |
| $90^0$ | ..... | «ein Quadrant» |

---

24. T.L. HEATH, *Aristarchus* (Oxford 1913) 352, *Hypothesis 4:* «When the moon appears to us halved, its distance from the sun is then *less than a quadrant* (ἔλασσον τεταρτημορίου) *by one thirtieth of a quadrant* (τῷ τεταρτημορίου τριακοστῷ).»

25. T.L. HEATH, *Archimedes*, 1912, 223 (Sand-reckoner): «I make this assumption because ARISTARCHUS discovered that the sun appeared to be about 1/720-th part of the circle of the zodiac etc.»

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



$\frac{1^0}{2}$ (= 30′) ... «ein 720-ster Teil des Zodiakus».

Es kann nach diesen Belegen – und besonders nach dem allerletzten – kaum mehr ein Zweifel darüber bestehen, daß ARISTARCHOS die *360*-Teilung des Kreises, also unsere *Winkelgrade* eigentlich gekannt hat. Ja, dieses Messen in Winkelgraden muß in seiner Praxis auch ziemlich häufig gewesen sein. Die sprachliche Form – wie er seine Rechnungsergebnisse formuliert – verrät nur, daß das Rechnen in Graden in seiner Zeit (oder nur in seiner *Umgebung?*) wohl noch nicht so *stereotyp* geworden war, wie wir dies aus dem Werk des PTOLEMAIOS – oder auch aus dem des HIPPARCHOS – kennen, in denen nämlich die Grade von $1^0$ bis $180^0$ einfach additiv gezählt werden.

Noch mehr erhärtet wird die Vermutung, daß man in der griechischen Astronomie die Gradeinteilung des Kreises schon am Anfang des 3. Jahrhunderts v.Chr. benutzt hat, durch die folgende Überlegung :

ARISTARCHOS von Samos – dessen Sprachgebrauch im Zusammenhang mit den Gradbezeichnungen eben illustriert wurde – war um 280 v.Chr. tätig, denn in diesem Jahr hat er nach PTOLEMAIOS (*Almag.* III 1) die Sommerwende beobachtet. Beinahe zu derselben Zeit – nämlich zwischen 295 und 280 v.Chr. – arbeiteten in Alexandria die beiden Astronomen TIMOCHARIS und ARISTYLLOS, die die Deklinationen einiger Sterne *in Winkelgraden* aufgezeichnet haben[26]. So ist ihre Liste im Werk des PTOLEMAIOS (*Almag.* VII 3) erhalten geblieben[27] :

«Um an einigen besonders deutlichen Beispielen die geschilderte Bewegung noch besser zu veranschaulichen, werden wir für jede der näherbezeichneten Halbkugeln die Abstände der Sterne in Breite vom Äquator, gemessen auf dem durch dessen Pole gezogenen größten Kreis, zusammenstellen, wie sie erstens zur Zeit der Astronomen aus der Schule des TIMOCHARIS (und ARISTYLLOS[28]), zweitens zur Zeit des HIPPARCHOS und drittens in derselben Hinsicht von uns gewonnen worden sind.»

Danach kommt – zumindest in der Übersetzung des K. MANITIUS – eine Tabelle in drei Kolumnen, wie nämlich die Deklinationen von je

---

26. D.R. DICKS, *JHS* 86, 1966, p. 28 n. 15: «There is, however, one piece of evidence which might seem at first sight suggest that the use of degrees was known in the third century B.C. in Alexandria; in *Almag.* VII 3 PTOLEMY lists the declinations of a number of stars as observed by himself, by HIPPARCHUS und by TIMOCHARIS and ARISTYLLOS, two Alexandrian astronomers who were active between 295 and 280 B. C. and in each case PTOLEMY gives the data in degrees north or south of the celestial equator.»

27. Die Übersetzung der Stelle nach K. MANITIUS (1913) II 18.

28. Der Name des ARISTYLLOS wurde an dieser Stelle eigentlich nur durch den Übersetzer K. MANITIUS – aber zweifellos mit Recht – hinzugefügt.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



neun Fixsternen von beiden Halbkugeln *in Winkelgraden* beobachtet wurden; in der ersten Kolumne stehen immer die Angaben des TIMOCHARIS (oder diejenigen des ARISTYLLOS); in der zweiten die ähnlichen des HIPPARCHOS über dieselben Sterne; und in der dritten die eigenen Beobachtungen des PTOLEMAIOS. – Besonders erleichtert wird der Vergleich der je drei Angaben durch die Tabelle des modernen Übersetzers. – Die Textausgabe von J.L. HEIBERG (1903, II 19 ff.) bietet jedoch an dieser Stelle gar keine Tabelle, nur den fortlaufenden Text selber. Überblick und Vergleich scheinen also anhand des Originals längst nicht so leicht gewesen zu sein wie anhand der modernen Übersetzung.

Der Text des PTOLEMAIOS scheint nun zunächst ein tadelloser Beleg dafür zu sein, daß schon TIMOCHARIS und ARISTYLLOS ebenso in Winkelgraden gerechnet hatten wie mehr als hundert Jahre nach ihnen HIPPARCHOS oder noch später PTOLEMAIOS selber. Man hat jedoch die Glaubwürdigkeit dieses Beleges angezweifelt. Ein zwingendes Argument wurde zwar für den Zweifel *nicht* beigebracht, aber es wird sich doch lohnen, jenen Gedankengang ins Auge zu fassen, mit dem man den Beleg beseitigen wollte. Es wurde nämlich folgendes gesagt[29] :

«Vermutlich war es PTOLEMAIOS selber, der die Beobachtungen des TIMOCHARIS und ARISTYLLOS stillschweigend in Winkelgrad-Zahlen umgewandelt hatte, um dadurch den Vergleich mit seinen eigenen Ergebnissen und mit denjenigen des HIPPARCHOS noch leichter und klarer zu gestalten.»

Dieser Argumentation stelle ich die folgende Überlegung entgegen: Selbst wenn wir annehmen, daß die Angaben der beiden älteren Astronomen, TIMOCHARIS und ARISTYLLOS, ursprünglich n i c h t in Winkelgraden überliefert waren und daß diese erst durch PTOLEMAIOS in Winkelgrad-Zahlen umgewandelt wurden, so ließen sich dieselben Angaben auch dann offenbar ohne jede Schwierigkeit in Winkelgrade umrechnen. Eben deswegen konnte PTOLEMAIOS diese – nach der modernen Theorie – sogleich stillschweigend umwandeln. In der Tat unterscheiden sich, wie vorhin gezeigt wurde, die sonstigen Winkelmaß-Angaben – in einer *Polygon-Seite* (Fünfzehneck), in *Zodia* oder in ihren *Bruchteilen,* in *Ellen* und *Fingern* oder auch in *Zwölfteln* der Zodia – von den stereotypen Winkelgraden einzig und allein dadurch, daß die letzteren *einfacher, additiv gezählt werden können.* – Man muß sich eben deswegen fragen, ob es denn in der Tat einen ernst zu nehmenden Grund gibt, der uns vermuten lassen könnte, TIMOCHARIS und ARISTYL-

29. D.R. DICKS (a.a.O.): «... it was probably PTOLEMY who tacitly converted the observations of TIMOCHARIS und ARISTYLLOS into degree figures in order to make clearer the comparison with his own and HIPPARCHUS' results.»

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



LOS hätten noch gar nicht in Winkelgraden rechnen können und erst PTOLEMAIOS habe ihre Angaben in Winkelgrade umrechnen können. – Ich erblicke in der Textüberlieferung des PTOLEMAIOS keinen solchen Grund. Meiner Ansicht nach mußte man nur deswegen zu dieser unbegründeten und erzwungenen Vermutung Zuflucht nehmen, weil man krampfhaft an dem irrtümlichen Schluß festhalten wollte, daß Winkelgrade erst durch HYPSIKLES in die griechische Astronomie eingeführt worden seien. Aus demselben Grund wollte man die 360-Teilung des Kreises auch dem ERATOSTHENES absprechen. (Zu diesem letzteren vergleiche man weiter unten die *Anm. 33.*)

*
* *

Die wichtigsten Ergebnisse der bisherigen Betrachtungen über Winkel und Bogen in der griechischen Wissenschaft lassen sich nun etwa folgendermaßen zusammenfassen :

Das Messen der Bogen war in der Astronomie – abgesehen von jenen Fällen, wo diese (vermutlich nach dem Vorbild einer ursprünglich alltäglichen Praxis) mit *Ellen* (πήχεις) und *Fingern* (δάκτυλοι) gemessen wurden – mit den *Sehnen im Kreis* bzw. mit den Seiten von *regulären Polygonen* verbunden. Der älteste bekannte Fall für ein solches Messen gehört nach der Überlieferung auf alle Fälle noch in voreuklidische Zeiten. Man hat einen Kolurkreis *fünfzehngeteilt,* um mit dem fünfzehnten Teil des Kreisumfangs (also mit dem Bogen von $24^0$) die Entfernung beider Pole voneinander zu messen. Dieses Messen versuchte ich, dem OINOPIDES von Chios im 5. Jahrhundert v.Chr. zuzuschreiben.

Auch später wurde in der Astronomie der Bogen gewöhnlich mit dem Bruchteil eines größten Kreises (der Ekliptik, des Äquators oder eines Meridians) gemessen. Solche Bruchteile eines größten Kreises waren im Vorhergehenden sowohl die *Zodia* wie auch die *Grade.* Das Messen einer Winkelgröße mit der Seite eines regulären Polygons ging so weit, daß ARCHIMEDES den scheinbaren Durchmesser der Sonne sogar mit der Seite eines *Tausendecks* verglichen hat. Wie man in der ARCHIMEDES-Übersetzung von HEATH liest[30] :

*«... the diameter of the sun is greater than the side of a chiliagon or figure with 1000 equal sides, inscribed in a great circle of the universe.»*

Besonders beachtenswert ist von den vielerlei Möglichkeiten, den Kreis – zwecks eines solchen Messens – zu teilen, jene *Gradeinteilung* ($360^0$), die seit dem Altertum bis zum heutigen Tag in Gebrauch geblie-

30. *ARCHIMEDES* S. 224.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



ben ist. Auch früher wollte schon die moderne Forschung – ohne Rücksicht auf solche Belege wie z.B. DIOGENES LAERTIOS (I 24), wonach einige schon dem THALES die Behauptung zuschrieben, die Größe der Sonne und des Mondes sei der *720*-ste Teil (jenes Kreises, den sie beschreiben) – die allgemeine Gradeinteilung nicht höher als das Zeitalter des EUDOXOS datieren[31]. REHM betonte z.B.[32], daß der wichtigste Schritt vorwärts in der Zeit zwischen EUDOXOS und HIPPARCHOS darin bestanden habe, daß das Rechnen seine feste Grundlage in der Teilung des Kreises in $360^0$ erhalten hat. Man kann an dieser Auffassung eigentlich auch heute nicht viel ändern.

Es handelt sich auch jetzt um dieselbe Epoche zwischen EUDOXOS und HIPPARCHOS. Wir können zwar jene Behauptung entschieden ablehnen, wonach uns erst HYPSIKLES und HIPPARCHOS im 2. Jahrhundert v.Chr. die ältesten Belege für die Gradeinteilungen des Kreises zur Verfügung stellten. Zweifellos haben schon am Anfang des 3. Jahrhunderts die Astronomen TIMOCHARIS und ARISTYLLOS und ebenso auch ARISTARCHOS die Bogen in solch kleinen Einheiten gemessen, die den Winkelgraden (μοῖραι) entsprechen. Höchstens verrät der Sprachgebrauch des ARISTARCHOS – so wie er die Bogenmaße umschreibt – soviel, daß *für ihn* das Rechnen in Bogengraden noch nicht so selbstverständlich, noch nicht eine sozusagen mechanische Operation war wie für HYPSIKLES und HIPPARCHOS. (Merkwürdigerweise kann man den beiden Zeitgenossen des ARISTARCHOS – dem TIMOCHARIS und dem ARISTYLLOS – nicht einmal soviel absprechen.) Auch die Tatsache, daß sich nach unseren Kenntnissen gar kein sozusagen *stereotyper Gebrauch* des Rechnens mit Bogen für ARISTARCHOS nachweisen läßt, schließt natürlich nicht aus, daß er mit den Bogen wohl schon ähnliche Operationen auszuführen imstande war wie die späteren Astronomen der vorptolemäischen Zeit.

Es ergibt sich außerdem, wie mir scheint, auch noch ein anderer wichtiger Schluß aus den vorangehenden Betrachtungen. Man darf nämlich – meiner Ansicht nach – aus der Tatsache, daß sich aus dem fragmentarisch bekannten Werk irgendeines antiken Verfassers nur der Gebrauch einer anderen Art des Messens von Bogen nachweisen läßt, auf keinen Fall schließen, der Betreffende habe die Gradeinteilung des Kreises ($360^0$) noch nicht gekannt. Es sei dafür das folgende Beispiel erwähnt :

---

31. Es sei hier übrigens erwähnt, daß P. TANNERY (*Mém.sci.* II, 505 ff.) eine verstümmelte Inschrift übersetzte, die HILLER v. GÄRTRINGEN in *Inscr. Gr.insul. mar.Aeg.* I. nr. 913 als in Rhodos (Keskinto) ausgegrabenes Denkmal des 2. Jh. v.Chr. veröffentlicht hatte: «le cercle est de 360 degrés et de 720 points de cercle etc.».

32. Artikel *Kykloi,* a.a.O. (Sp. 2326).

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Aus einer Stelle bei STRABON (C 113-114) geht hervor, daß ERATOSTHENES in einer seiner geographischen Berechnungen den Äquator in *sechzig* Teile geteilt hat. Man hat daraus den folgenden Schluß ziehen wollen[33]: Die Tatsache, daß ERATOSTHENES für geographische Ortsbestimmungen die Hexekontadenteilung zu Grunde gelegt hat, spreche nicht eben für die Annahme, daß er die *360*-Teilung gekannt hat.

Irreführend finde ich an diesem Gedanken auch schon den Ausdruck «Ortsbestimmung». Handelte es sich nämlich in der Tat um eine *Ortsbestimmung* – im modernen Sinne des Wortes –, bei der ERATOSTHENES sich anstatt mit Graden mit *Hexekontaden,* also mit der Bogenmaß-Einheit vor $6^0$, begnügt hätte, so wäre dies wirklich eine ziemlich grobe Berechnung seinerseits gewesen. Da er jedoch – im Sinne der betreffenden STRABON-Stelle – bloß größere irdische Entfernungen untereinander vergleichen wollte, braucht man an dieser seiner Einteilung eines größten irdischen Kreises (des Äquators) nicht Anstoß zu nehmen. – Außerdem sind seine «Sechzigstel» ebensowenig ein Anzeichen für seine Unkenntnis der Grade, wie man aus dem «Viertel eines Zodions» *($7^0 30'$)* bei POSEIDONIOS nicht auf die Unkenntnis der Grade schließen kann, oder wie bei ARISTARCHOS das «Dreißigstel eines Quadranten» *($3^0$)* gar nichts dagegeh besagt, daß wohl in demselben Jahrzehnt andere Astronomen, wie TIMOCHARIS und ARISTYLLOS, schon in Graden gerechnet haben.

Zusammenfassend möchte ich dieses Kapitel mit dem folgenden Gedanken schließen: Auch wenn wir zur Zeit *keinen* schlagenden Beweis dafür haben, daß die *360*-Teilung des Kreises in der griechischen Wissenschaft auch schon in der Zeit v o r EUDOXOS bekannt war, so wird man diese Möglichkeit zumindest für EUDOXOS offenhalten müssen. Auf alle Fälle würde ich das Argument, EUDOXOS habe *nicht* wissen können, daß ein *Zodion* genau $30^0$ ist – wie dies über ihn in den letzten Jahrzehnten gelegentlich behauptet wurde –, für voreilig halten.

Und nun wollen wir das andere Problem ins Auge fassen, nämlich die Möglichkeit bzw. Unmöglichkeit, daß EUDOXOS genügend «trigonometrische Kenntnisse» besaß, um Breitengrade zu berechnen.

---

33. REHM, ebd., Sp. 2327. – Man vgl. übrigens daselbst den mit einigem Zweifel von REHM selbst so formulierten Satz: «Die Sternpositionen im ARATUS LATINUS (*Comm. in Ar. rell.,* p. 183., 186., 189. M)... würden zu dem Schluß zwingen, *daß schon ERATOSTHENES die 360-Teilung gekannt hat,* wenn es sicher wäre etc.»

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



## *4. Das Problem der Sehnentafeln*

«Zum bequemen Handgebrauch wollen wir zunächst in Tabellenform die Größenbeträge zusammenstellen, welche auf die Sehnen entfallen, wenn wir den Kreisumfang in *360* Abschnitte (oder Grade) zerlegen. Und zwar wollen wir die Sehnen in Ansatz bringen, welche die von $\frac{1}{2}^0$ zu $\frac{1}{2}^0$ anwachsenden Bogen unterspannen, d.h. wir wollen feststellen, wieviel Teile (partes) des Durchmessers auf diese Sehnen entfallen, wenn derselbe in *120* Teile (*120*$^p$) geteilt ist; denn diese Teilung wird sich in den Zahlen bei Ausführung der Rechnungen selbst praktisch erweisen...»

Mit diesen Worten beginnt – in der Übersetzung von K. MANITIUS – das berühmte 10. Kapitel im I. Buch des großen Werkes von PTOLEMAIOS *(Almagest),* die Einleitung zu den Sehnentafeln. Das nächste Kapitel wird sodann dem Leser die Tafeln selbst vorstellen.

Wie kam nun PTOLEMAIOS auf die Idee, eine solche Tabelle zusammenzustellen? Hatte er Vorgänger, die schon ähnliches früher versucht hatten, oder war er Bahnbrecher auf diesem Gebiet? Oder hat er die Arbeit seiner Vorbilder nur vervollkommnet und in welchem Maße? – Er selber sagt kein Wort über diese Fragen, und besäßen wir nur sein Werk, ohne den antiken Kommentar, so könnten wir vielleicht geneigt sein, das Verdienst der Sehnentafeln einzig und allein dem PTOLEMAIOS zuzuschreiben. Es ist noch ein Glück, daß der Kommentator, der Alexandriner THEON am Ende des 4. Jahrhunderts n.Chr., mit einem kurzen Hinweis unsere historische Perspektive erweitert. Bevor ich jedoch jene Worte des THEON anführe, die für die Wissenschaftsgeschichte so wichtig geworden sind, muß ich hier zumindest in deutscher Übersetzung jenen Satz des PTOLEMAIOS zitieren, den auch THEON wörtlich in seinen Kommentar übernommen hat und den er gerade mit seiner Bemerkung ergänzen wollte. PTOLEMAIOS setzt nämlich die vorhin unterbrochenen Worte folgendermaßen fort :

«Vorher werden wir jedoch mit Hilfe von möglichst wenigen Lehrsätzen, die sich immer wiederholen, zeigen, wie wir nach einer praktischen und schnell durchführbaren Methode das Berechnen der Sehnengrößen in Angriff nehmen können [34].»

Diesem Satz hat nun THEON die folgende Bemerkung hinzugefügt[35] :

---

34. Das Ende dieses Satzes habe ich selber übersetzt. Philologen werden wohl sogleich verstehen, warum ich in diesem Fall der MANITIUS-Übersetzung nicht gefolgt bin.

35. Ich übersetze den Text nach A. ROME, *Commentaires de Pappus et de Théon d'Alexandrie sur l'Almageste,* Città del Vaticano 1936, p. 451: Δέδεικται μὲν οὖν καὶ Ἱππάρχῳ πραγματεία τῶν ἐν κύκλῳ εὐθειῶν ἐν ιβ βιβλίοις, ἔτι τε καὶ Μενελάῳ ἐν ς·



ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



«Es wurde auch bei HIPPARCHOS in einer Abhandlung gezeigt, über die Sehnen im Kreis, in zwölf Büchern, und bei MENELAOS in sechs (Büchern)».

Was nun den wesentlichen Inhalt dieser Mitteilung betrifft, so scheint er klar und eindeutig genug zu sein, und von ernst zu nehmenden Wissenschaftlern wurde er auch nie angezweifelt. THEON erwähnt hier ein Werk des HIPPARCHOS in *12* Büchern über die Sehnen («Geraden im Kreis») und ein anderes von MENELAOS in *6* Büchern. – Aber die sprachliche Form dieser Bemerkung ist doch nicht so glatt und ausgeglichen, wie man es sich wünschte. Das eine Mal steht ein Wort («πραγματεία», in meinem Text mit «*Abhandlung*» übersetzt) im Nominativ, wo man lieber einen Dativ hätte. Das andere Mal gefällt wieder der Dativ der beiden Namen nicht: HIPPARCHOS und MENELAOS. Aber solange der grundlegende Sinn verständlich ist, muß man diese kleineren «Schönheitsfehler» – gar nicht so selten bei antiken Kommentatoren – in Kauf nehmen. – Aber es waren doch wohl gerade die sprachlichen Unebenheiten des Textes, die auch jene Kontroverse hervorgerufen haben, über die ich – obwohl sie für uns nur eine untergeordnete Bedeutung hat – nach dem letzten, maßgeblichen Herausgeber kurz im folgenden berichte :

Zum Wort «πραγματεία» bemerkte A. ROME[36]: Da es keinen Artikel hat, könnte der Ausdruck nur soviel heißen, daß HIPPARCHOS eine Untersuchung über die Sehnen geschrieben oder genauer, daß er seine Theorien darüber entwickelt habe. A. ROME betont, daß THEON den genauen Titel des Werkes von HIPPARCHOS n i c h t angibt. Man hat nämlich versucht, THEONS Worte mit zwei Stellen des Alexandriners HERON (*Metrica,* ed. H. SCHÖNE, Leipzig 1903, S. 58, 19-20 und S. 62, 17-22) zu verbinden. Aber ROME lehnt diesen Versuch ab. Er habe nämlich keinen Zweifel, daß die beiden Arbeiten (die eine des HIPPARCHOS und die andere des MENELAOS), die THEON erwähnt, die Trigonometrie behandelt hatten, während die Arbeit, die HERON benutzt hat, auf ein anderes Blatt gehöre. Darum glaubt also ROME n i c h t, daß HERON

---

Allerdings habe ich in der Übersetzung πραγματεία statt im Nominativ in den Dativ gesetzt. Aber auch A. ROME selber schrieb ja: «Si l'on prend πραγματείᾳ au datif (éventualité qui nous est suggérée par Mgr. MERCATI), δέδεικται correspond à δείξομεν... et THEON dit qu'HIPPARQUE et MENELAS ont prétendu exposer la trigonométrie de la façon la plus simple possible, en un traité des cordes.»

36. Ebd.: «Sans article, l'expression ne peut signifier qu'une chose: HIPPARQUE a fait une étude (ou même, plus littéralement, a exposé des théories) sur les cordes. THEON ne cite pas le titre exact de cet ouvrage. On a cru pouvoir rapprocher ce passage-ci de deux phrases de HERON d'Alexandrie... On doit renoncer à l'idée que HERON nous avait conservé deux courts fragments de la trigonométrie d'HIPPARQUE etc.»

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



zwei kurze Fragmente aus der Trigonometrie des HIPPARCHOS aufbewahrt habe, etc. etc. – Interessant ist für uns die letztere Behauptung deswegen, weil auch schon in diesem Buch (oben II.8. «*Die bisherigen Vermutungen*») jener Versuch von HEATH erwähnt wurde, der eben auf Grund der HERON-Stelle auf die Sehnentafel des HIPPARCHOS schließen wollte.

Nun will ich in diesem Zusammenhang zu der angedeuteten Kontroverse nicht Stellung nehmen. Ich habe diese Frage hier nur deswegen skizziert, weil ich illustrieren wollte, wie es um die antiken Quellen selbst steht und was diese über den Ursprung der Sehnentafeln besagen. – Die einzige Quelle ist also – wie man sieht – die Stelle bei THEON. Selbst der Gedanke, die Worte dieses Kommentators mit zwei kurzen HERON-Stellen zu verbinden, ist nur ein moderner Versuch, der von einem Teil der Forscher abgelehnt wird. Die Ansicht, an die ich schon mehrmals erinnert habe, wonach HIPPARCHOS sozusagen«Schöpfer der Trigonometrie» gewesen wäre[37], geht also letzten Endes auf die zitierten Worte des THEON zurück.

Damit konnte man sich natürlich nicht begnügen. Akzeptiert man überhaupt den sehr wortkargen Bericht des THEON – wie das die meisten Forscher bisher getan haben –, so erheben sich sogleich weitere Fragen. Die Fragen, die man sich diesbezüglich gestellt hat, ließen sich in zwei Gruppen einteilen. Man fragte sich nämlich einerseits: Wie verhalten sich wohl die Tafeln des PTOLEMAIOS, die wir in der Tat besitzen, zu denjenigen des HIPPARCHOS, die wir auf Grund der Worte des THEON nur vermuten können? Hat PTOLEMAIOS die Tafeln des HIPPARCHOS einfach nur übernommen, oder hat er diese vielleicht auch vervollkommnet? – Noch mehr Interesse hat man der anderen Gruppe von Fragen entgegengebracht: Wie mögen die Vorlagen des HIPPARCHOS gewesen sein? Hat denn nicht auch HIPPARCHOS schon irgendwelche Vorgänger in der Zusammenstellung der Sehnentafeln gehabt?

Es sei hier vor allem – nach einer so repräsentativen Mathematikgeschichte wie dem Werk von C.B. BOYER[38] – mit einigen Gedanken illustriert, wie man diese Fragen heutzutage behandelt.

Über etwa zweieinhalb Jahrhunderte – in der Zeit zwischen HIPPOKRATES[38a] und ERATOSTHENES – hätten die griechischen Mathematiker die Verhältnisse der Geraden und Kreise untersucht und hätten von

---

37. Es sei hier zunächst auf die Anmerkungen 10, 11 und 12 zur «Einleitung» dieses Buches hingewiesen.

38. CARL B. BOYER, *A History of Mathematics*, New York, London, Sydney 1968, S. 179-180.

38a. Gemeint ist HIPPOKRATES von Chios, der Erfinder der Möndchenquadratur im 5. Jahrhundert, der etwa um 430 nach Athen kam und dort Mathematikunterricht erteilte.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



diesen Untersuchungen in der Lösung von manchen astronomischen Problemen auch Gebrauch gemacht. Aber es sei daraus doch keine systematische Trigonometrie geworden, bis HIPPARCHOS von Nikaia im 2. Jahrhundert v.Chr. die erste Sehnentafel zusammenstellte und dadurch zum «Vater der Trigonometrie» wurde. Zwar habe auch ARISTARCHOS schon gewußt, daß in einem gegebenen Kreis das Verhältnis des Bogens und der Sehne, während der Winkel von $180^0$ bis $0^0$ abnimmt, sich stetig vermindert und dem Wert *1* zustrebt. Aber die zusammengehörigen Bogen- und Sehnenwerte habe doch als erster HIPPARCHOS für astronomische Zwecke in eine systematische Tafel gefaßt. Es wäre allerdings möglich, daß ihm (HIPPARCHOS) auf diesem Gebiet der große Mathematiker, APOLLONIOS von Perge, vorangegangen ist. Und es könnte auch sein, daß das Verdienst des HIPPARCHOS bloß darin bestand, daß er eine bessere Sehnentafel als seine Vorgänger zusammengestellt hat...

Wie man sieht, wurden alle diese Behauptungen, natürlich, *nur hypothetisch* formuliert. Einigermaßen überrascht fühlt man sich nur durch den Gedanken, daß vielleicht das Werk des APOLLONIOS die Sehnentafel des HIPPARCHOS vorbereitet haben könnte. Woher stammt denn diese Vermutung, da nichts dergleichen in der antiken Quelle steht? – Wie auch der Verfasser des Buches (C.B. BOYER) in der Anmerkung darauf hinweist, so war es P. TANNERY, der mit diesem Gedanken die Forschung bereichert hat. Es wird sich in der Tat lohnen, zumindest einige von TANNERYS Erörterungen über die Frühgeschichte der griechischen Sehnentafeln hier näher ins Auge zu fassen.

Der Franzose P. TANNERY, dessen Verdienste um die Geschichte der exakten Wissenschaften in der Antike – trotz aller seiner zeitbedingten Schranken – auch heute nicht hoch genug bewertet werden können, hat i.J. 1893 seine *Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne* (Paris) veröffentlicht. Ein von unserem Gesichtspunkt aus grundlegender Gedanke dieses Buches war: «Die Trigonometrie – TANNERY dachte dabei vor allem an die Sehnentafeln des PTOLEMAIOS, die uns hier beschäftigen – ist n i c h t die Schöpfung des HIPPARCHOS, und sie kann auch keinem einzelnen zugeschrieben werden»[39]. Zu dieser Ansicht wurde TANNERY durch zwei Ideen geführt. *Erstens* war er den mathematischen Fähigkeiten des HIPPARCHOS gegenüber – obwohl er ihn als

39. S. 366 des oben zitierten Buches: «L'invention de la trigonométrie, elle ne peut être due à HIPPARQUE et n'est pas l'oeuvre d'un seul.»

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Astronomen hochgeschätzt hat – immer mißtrauisch[40]. (Es bleibe dahingestellt, ob mit Recht.) Und *zweitens* suchte er eifrig nach wirklich großen Mathematikern, denen er zumindest einen Anteil an dem angezweifelten «Verdienst des HIPPARCHOS» lieber eingeräumt hätte. Und es war ihm auch leicht, solche zu finden: ARCHIMEDES und APOLLONIOS.

Es fragte sich nur, wie man zeigen könnte, daß diese beiden überhaupt etwas mit den Sehnentafeln zu tun haben, wo doch die Quellen selber gar nichts davon wissen. Aber es war für TANNERY, der über die antike Wissenschaft erstaunlich reiche Kenntnisse besaß, ein Kinderspiel, seine Vermutung – *auch ohne einen einzigen Beleg* – zumindest «wahrscheinlich zu machen». Im folgenden skizziere ich möglichst genau seinen Gedankengang.

Wir wissen aus dem heute nur fragmentarischen Werk des ARCHIMEDES über die *«Kreismessung»*, wie er *«das Verhältnis des Kreisumfangs zum Durchmesser»* bestimmen wollte[41] :

$$\text{«kleiner als } 3\frac{1}{7}\text{, aber größer als } 3\frac{10}{71}\text{ ».}$$

Dezimal umgerechnet, bedeuten diese beiden Brüche für den Wert, den wir gewöhnlich als $\pi$ bezeichnen :

$$3{,}1408\ldots < \pi < 3{,}1428\ldots$$

(Die beiden kritischen Ziffern habe ich hervorgehoben.)

Außerdem wissen wir durch den Kommentar des EUTOKIOS, daß der jüngere Zeitgenosse des ARCHIMEDES, APOLLONIOS, eine noch bessere Approximation für denselben Wert geliefert hat – obwohl diese uns, leider, nicht überliefert wurde. Aber auch soviel genügte schon TANNERY, um sich weiter zu fragen: Und welche Approximation – diejenige des ARCHIMEDES oder die andere des APOLLONIOS (die wir eigentlich *nicht kennen*) – hätte wohl denjenigen befriedigt, der die Sehnentafel bei PTOLEMAIOS einst zusammengestellt hat? Die selbstgestellte Frage hat er dann folgendermaßen beantwortet :

---

40. Ebd. S. 52: «HIPPARQUE était loin d'avoir, comme géomètre, la valeur qu'il faut incontestablement reconnaître à l'inventeur de la projection stéréographique.» – S. 60: «HIPPARQUE ne paraissait point avoir possédé les aptitudes mathématiques indispensables pour une découverte de cet ordre («l'invention de la trigonométrie») Etc.etc.»

41. Vgl. T.L. HEATH, *Archimedes*, 1912, S. 98.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Nehmen wir an, daß sich jemand in der Annäherung des Kreisumfangs mit jenem in den Kreis einbeschriebenen Polygon begnügt, das *180* untereinander gleiche Seiten hat. Der Kreisumfang wird also approximativ dem Umfang dieses einbeschriebenen Vielecks gleichgesetzt. Das heißt, man berechnet irgendwie die Länge jener *Sehne*, die den Bogen von $2^0$ (Zentriwinkel) unterspannt, und läßt diese Sehne auch als *«Länge des dazugehörigen Bogens»* gelten, Bei $2^0$ «fielen» also Sehne und Bogen schon «zusammen». Man bekäme auf diese Weise den *180*-sten Teil des vollen Kreisumfangs. Multiplizierte man dagegen den Sehnen-Wert zum Bogen von $2^0$ mit *180*, so erhielte man den Umfang des Kreises.

Nun registriert die Sehnentafel des PTOLEMAIOS – für einen Kreis, dessen Durchmesser $2r = 120$ ist – zu dem Bogen von $2^0$ den sexagesimal berechneten Wert: $2^p 5' 40''$. (Dies macht nach der heute üblichen Rechenart $\frac{754}{360}$ aus). Der Umfang des Kreises ($r = 60$) ist also :

$$2r\pi = \frac{754 \times 180}{360} = 377.$$

Und daraus $\pi = \frac{377}{120}$ – da im vorliegenden Fall $2r = 120$ ist – bzw. $\pi = 3{,}14\underline{1}6...$

Die hervorgehobene Ziffer zeigt, daß diese Approximation in der Tat besser ist als die des ARCHIMEDES. War nicht gerade diese die des APOLLONIOS? – fragte sich TANNERY.

Der hier skizzierte geistreiche Gedankengang bildete die *einzige* Grundlage für die folgende «historische» Rekonstruktion: *1.* ARCHIMEDES könnte die älteste Sehnentafel zusammengestellt haben – obwohl auch TANNERY selber diese Vermutung nur mit einigem Bedenken zu formulieren wagte. *2.* Mit größerer Überzeugung sprach er von der vorbereitenden Rolle das APOLLONIOS. Schließlich wollte er die glücklich rekonstruierte «bessere Approximation» dem APOLLONIOS zuschreiben. *3.* HIPPARCHOS habe nur die ihm schon vorliegenden Tafeln vervollkommnet[42].

---

42. TANNERY, op.cit., S. 68: «HIPPARQUE, trouvant ainsi le terrain préparé, calcula des tables plus exactes que toutes celles qui avaient été essayées avant lui, et auxquelles il donna la forme qui devint plus tard classique, par suite tant de la supériorité de ces tables que de l'importance des applications qu'il en avait faites.» – Beachtenswert finde ich auch die unmittelbare Fortsetzung dieser Worte: «Toutefois l'adoption générale du système ne fut sans doute pas immédiate, et tandis qu'il les employait à Rhodes, les astronomes d'Alexandrie pouvaient se servir de tables beaucoup moins satisfaisantes et conçues suivant d'autres principes.»

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Es ist wohl nicht nötig, diese Konstruktion hier auch eingehender zu kritisieren. Soviel ersieht man aus dem geistreichen Gedankengang von TANNERY allerdings, daß sich auf Grund der Sehnentafel bei PTOLEMAIOS in der Tat eine bessere antike Approximation für π gewinnen ließe, als es die des ARCHIMEDES war. Aber man kann die Vermutung selbst, daß gerade diese Approximation von APOLLONIOS stammte – was ein wichtiger Ausgangspunkt der «historischen» Konstruktion von TANNERY war –, nicht näher begründen. Und noch weniger könnte man jenen kühnen Verdacht erhärten, daß die antiken Approximationen des π-Wertes überhaupt auch *historisch* einen Zusammenhang mit den bei PTOLEMAIOS vorliegenden Sehnentafeln hatten.

Viel Anklang hat TANNERY mit seiner Theorie über die Vorgeschichte der Sehnentafeln eigentlich nicht gefunden, nur hie und da tauchen seitdem seine diesbezüglichen Gedanken in der Fachliteratur auf. Der bloß andeutende Hinweis auf APOLLONIOS bei C.B. BOYER wurde oben schon erwähnt. Weiter ging i.J. 1928 J. TROPFKE, der in einem Aufsatz, selbst über TANNERY hinausgehend, nachweisen wollte, daß eigentlich ARCHIMEDES der Begründer der griechischen Trigonometrie gewesen sei[43]. Doch diese Arbeit berücksichtigt vorwiegend solche Werke des ARCHIMEDES, die uns nur durch arabische Quellen bekannt sind. Die neuere Forschung scheint sich auch dieser Vermutung gegenüber eher skeptisch zu verhalten. So schrieb man zuletzt[44]: «Alles, was man... über die Rolle des ARCHIMEDES bei der Entstehung der griechischen Sehnenrechnung sagen kann, ist, daß er einerseits mit den ihm zu Gebote stehenden Methoden nicht nur die Ptolemäischen Sehnentafeln zu berechnen, sondern sogar zu verbessern vermocht hätte, andrerseits, abgesehen von seinen Versuchen, die Distanzen zwischen den Planeten zu ermitteln, kaum ein Motiv hatte, eine Sehnentafel zu erstellen.»

Es sei am Ende dieses Kapitels auch noch kurz erwähnt, wie die Fachliteratur auf TANNERYS Mißtrauen gegenüber den mathematischen Fähigkeiten des HIPPARCHOS reagiert hat. Stellenweise begegnet man zwar auch heute demselben Mißtrauen, aber interessanter finde ich die folgende Reaktion :

Im Jahre 1893 hatte TANNERY jenes Buch veröffentlicht, aus dem ich vorhin zitiert habe. Im nächsten Jahr kam der Textband des MANITIUS *(HIPPARCHUS)* heraus, in dem der Herausgeber – ohne den Namen «TANNERY» auszuschreiben – doch auf dessen Ansicht antwortet. Im fol-

---

43. *Archimedes und die Trigonometrie, Archiv f. Gesch. d.Math., d. Naturwiss. u.Technik,* 10, 1928, S. 432-63.

44. I. SCHNEIDER, *Archimedes,* Darmstadt 1979, S. 150 f.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



genden Zitat unterstreiche ich die Worte, die meiner Ansicht nach an TANNERY adressiert waren[45] :

«Durch Berechnung einer Sehnentafel wurde HIPPARCH der Schöpfer der Trigonometrie. Abgesehen von der wiederholten Versicherung des PTOLEMÄUS, daß er zu den Resultaten seiner Rechnungen auf dieselbe Weise wie sein Vorgänger HIPPARCH gekommen sei, *dürfen wir letzterem* (also dem HIPPARCHOS) *auch die arithmetische und algebraische Gewandtheit zutrauen, welche zur Bewältigung einer solchen Aufgabe vorauszusetzen ist. Dafür spricht das Zeugnis des PLUTARCH (De Stoic. repugn.* 29, 5), *welcher ihm kombinatorische Rechnungen zuschreibt, und die Angabe arabischer Quellen, daß er als Schriftsteller über quadratische Gleichungen aufgetreten sei (CANTOR, Gesch.d.Math.* I. p. 313). Etc.»

## *5. Zwei neuere Versuche*

Überblickt man, wie das historische Problem der Sehnentafeln in der Fachliteratur – vor und nach TANNERY – bisher gewöhnlich behandelt wurde, so sieht man sogleich, daß die meisten einschlägigen Arbeiten gewisse gemeinsamen Züge aufweisen.

Kaum einer von den wirklich zuständigen Forschern hat z.B. daran gedacht, daß sich PTOLEMAIOS selber irgendwelche besonderen Verdienste um die Sehnentafeln erworben hätte. Man hat sich auf den Bericht des THEON zumindest insofern verlassen, als man annahm, daß schon lange v o r PTOLEMAIOS Sehnentafeln durch HIPPARCHOS (und auch durch MENELAOS) zusammengestellt worden waren. Es fragte sich nur, ob jene nicht bekannten älteren Tafeln wirklich *genauso* waren wie die, die wir aus PTOLEMAIOS kennen. Es gab manche, die dachten, PTOLEMAIOS habe die Tafeln des HIPPARCHOS ohne Veränderung übernommen; andere dachten, daß er das System des HIPPARCHOS – in irgendwelchen weniger bedeutenden Einzelheiten – vielleicht doch weitergebaut hätte. Aber im großen und ganzen einigte man sich in etwa darauf, daß die Tafeln des HIPPARCHOS im wesentlichen derselben Art gewesen sein müßten wie die des PTOLEMAIOS.

Man hätte sich natürlich gern irgendein genaueres Bild von den Tafeln des HIPPARCHOS verschafft, um diese dann mit denen des PTOLEMAIOS vergleichen zu können. In dieser Absicht hat z.B. HEATH zwei HERON-Stellen herangezogen, die seiner Ansicht nach Hinweise auf die HIPPARCHOS-Tafeln enthalten[46]; aber dieser sein Versuch wurde durch A.

45. S. 285.

46. Vgl. oben S. 176.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



ROME abgelehnt[47].

Soweit ich sehe, hat man bisher merkwürdigerweise nicht daran gedacht – und dieses Negativum ist auch ein gemeinsamer Zug der früheren Versuche –, daß Schlüsse auf die einstigen Tafeln des HIPPARCHOS auch auf dem Wege möglich sind, der in diesem Buch mehrmals eingeschlagen wurde, indem man nämlich einige durch HIPPARCHOS mitgeteilte Rechenergebnisse unter Benutzung der Sehnentafeln des PTOLEMAIOS kontrolliert. Daraus kann man dann nebenbei auch Schlüsse auf die von HIPPARCHOS vermutlich benutzten Sehnentafeln ziehen. – Anstatt diese einfache und naheliegende Möglichkeit auszunutzen, hat z.B. MANITIUS in seiner Textausgabe des Kommentars von HIPPARCHOS gezeigt[48], wie man aus den in der antiken Vorlage mitgeteilten Daten (in dem einen Fall: Gnomon-Verhältnis 4:3 und in dem anderen: längster Tag von 15 Stunden), unter Anwendung *unserer Winkelfunktionen* (sinus, cosinus, tangens), in der Tat die von HIPPARCHOS angedeuteten Ergebnisse gewinnen kann. (Ja, um unsere Winkelfunktionen anwenden zu können, mußte man sich hier auch solcher Formeln bedienen, die mit den in diesen Fällen einst benutzten antiken Methoden offenbar nur sehr weitläufig verwandt sind.) Zweifellos fördert auch diese Art moderne Erklärung das Verständnis des HIPPARCHOS, aber sie ist völlig ungeeignet, um daraus auch Schlüsse auf die Tafeln des HIPPARCHOS zu ziehen.

Seit dem Erscheinen des Buches von TANNERY (1893) war man sich auch darüber mehr oder weniger einig, daß die Geschichte der Sehnentafeln eigentlich doch nicht mit HIPPARCHOS beginnt. Unabhängig davon, wie die Tafeln des HIPPARCHOS waren, muß er auf diesem Gebiet Vorläufer gehabt haben, auch wenn wir nichts Bestimmtes über diese letzteren wissen.

Und unvergessen blieb die Initiative von TANNERY auch noch von einem anderen Gesichtspunkt aus, der bisher nicht erwähnt wurde und der hier überhaupt nur nebenbei in Betracht kommt. Er versuchte nämlich, den Zusammenhang zwischen den Sehnentafeln der Griechen einerseits und dem ältesten mathematischen Werk der Inder, dem Sûrya-Siddhânta, andererseits nachzuweisen[49]. In den Jahrzehnten nach TANNERY, in denen gerade die orientalischen Verbindungen der griechischen Wissenschaft in den Vordergrund des Interesses gerückt wurden, konnte

---

47. Vgl. oben S. 210.

48. MANITIUS, 1894, 291 f.

49. Op.cit., S. 65: «...cet ouvrage, le plus ancien traité mathématique des Indous, porte des traces si marquées d'emprunts faits aux Grecs, que l'on est induit à soupçonner que la trigonométrie dont il y est fait usage n'a pas une autre origine.»

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



dieser Versuch natürlich nicht vergessen werden. Und doch ließ sich TANNERYS Versuch mit dem allgemeinen Trend der Geschichtswissenschaft nicht leicht vereinigen. Denn in den letzten 60 bis 70 Jahren hat man eher nach den *älteren* orientalischen Vorbildern der griechischen Wissenschaft geforscht. TANNERY wollte dagegen umgekehrt die indischen Tafeln auf griechischen Ursprung zurückführen. Wie könnte man diesen Gedanken mit dem neueren Trend in Einklang bringen?

Es sei hier vor allem an jene beiden Zitate erinnert (s. oben S. 195f.), die schon beinahe die Frage aufkommen ließen, ob nicht auch die Sehnentafeln der Griechen orientalische Vorbilder hätten? – Aber dieser Eindruck ist doch irreführend. Denn man ist ja in der historischen Frage der Sehnentafeln erstaunlicherweise immer noch in den Fußstapfen von TANNERY geblieben – so sehr man auch die Unabhängigkeit von ihm zu betonen versuchte. Man führt nämlich immer noch gewisse orientalische Tafeln auf griechischen Ursprung zurück. Ich denke an die beiden Arbeiten: O. NEUGEBAUER, *On some Aspects of Early Greek Astronomy,* in: *Proceedings of the American Philosophical Society,* 116 no. June 1972, S. 243-251; und G.J. TOOMER, *The Chord Table of Hipparch, Centaurus* 18, 1973, S. 6-28.

Es fällt mir nicht leicht, über diese beiden Arbeiten zu berichten. Einerseits will ich nämlich zu dem historischen Problem der indischen Tafeln, von dem beide Verfasser ausgegangen sind, *nicht* Stellung nehmen. Diese Frage gehört nicht in den Rahmen der gegenwärtigen Untersuchung. Auf der anderen Seite kann ich die Behauptungen, die in beiden Werken die griechische Wissenschaft unmittelbar betreffen, beim besten Willen *nicht akzeptieren.* Überhaupt halte ich die ganze Auseinandersetzung für zwecklos, ja für unmöglich. Darum hätte ich auch am liebsten beide Werke unerwähnt gelassen. Da ich jedoch der Ansicht bin, daß man zumindest die «Methode» beider Werke nicht unbemerkt lassen darf, werde ich einige Gedanken daraus – bloß um Gattung und Charakter dieser Schriften zu illustrieren – möglichst in der Form einer einfachen Zusammenfassung des Inhalts wiedergeben.

Vorausschicken muß ich noch, daß beide Arbeiten auf das engste zusammengehören. TOOMER hätte seinen Aufsatz ohne die vorangehende Arbeit von NEUGEBAUER nicht schreiben können. Seine Studie ist eine Art Fortsetzung, Ergänzung oder auch Vertiefung der anderen Abhandlung. Dasselbe gilt auch für die «Methode» beider Werke. NEUGEBAUERS «Methode» kommt in dem Aufsatz von TOOMER zu voller Entfaltung. Eben darum ist es möglich, beide Aufsätze zusammen zu besprechen.

Es wird nun von beiden Verfassern der Gedanke, daß die Tafeln des HIPPARCHOS dieselben oder auch nur ähnlicher Art gewesen seien wie die

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



des PTOLEMAIOS, einfach für eine «irrtümliche Annahme» erklärt, ohne daß dafür eine nähere Begründung auch nur versucht würde. Es wird, anstelle einer Begründung, mit erstaunlicher Selbstsicherheit als «Tatsache» hingestellt, daß die Tafeln des HIPPARCHOS «viel primitiver» gewesen sein müssen. Aber wie kam nur NEUGEBAUER, der als erster diese Vermutung ausgesprochen hatte, auf diese Idee?

Er fand indische *Sinus-Tafeln,* für die man die einzelnen Grundwerte zunächst je nach $3\frac{3}{4}$ Graden berechnete und bei denen die dazwischenliegenden mittleren Werte «linear interpoliert» wurden. Diese wollte er auf irgendwelche HIPPARCHOS-Tafeln zurückführen, die – wie er glaubt – je nach $7\frac{1}{2}^{0}$ Sehnengrößen zusammengestellt waren. – Hört man zum ersten Male von diesem überraschenden Versuch, so fragt man sich zunächst erstaunt: Wieso? Gab es in der Tat solche griechischen Sehnentafeln? Woher weiß man überhaupt, daß HIPPARCHOS oder irgend jemand von den Griechen wirklich jemals versucht hat, seine Tafeln eben aus solchen Einheiten aufzubauen? Gibt es dafür irgendwelche ernst zu nehmende *Belege*? – Und so könnte man noch eine ganze Liste von ähnlich einfachen Fragen aufzählen, die sich ein jeder nach diesem sonderbaren Einfall stellen müßte. Aber völlig umsonst. Dieser Verfasser kümmert sich wenig um Belege.

Anstelle von Belegen wird dem Leser versichert, daß in der geographischen Literatur der Griechen die 48-fache Teilung des Kreises vorkommt und daß diese in der Tat zu $7^{0}30'$ Einheiten führt[50]. Aber selbst für diese Tatsache – die in sich *einfach gar nichts über die angeblich nach demselben Prinzip eingeteilten Sehnentafeln des HIPPARCHOS besagt* – werden keine Textstellen genannt; es werden nur flüchtig und im allgemeinen drei antike Namen erwähnt, als handelte es sich um etwas Alltägliches und Gewöhnliches. Und auch damit ist es noch nicht genug! Man beachte nur, was daraus in der zeitlich nächsten Arbeit geworden ist.

Auf den einzigen und im gegebenen Zusammenhang zweifellos auch *irreführenden Pseudo-Beleg* der älteren Arbeit aus dem Jahr 1972 (also auf die 48-fache Teilung des Kreises) nimmt die spätere Arbeit von TOOMER zweimal Bezug. Auf S. 6 erwähnt er zunächst nur in bescheiden zurückhaltender Form, sein Vorgänger habe Belege in griechischen Texten («evidence in Greek texts») dafür genannt, daß die 48-fache

50. NEUGEBAUER, a.a.O., S. 250: «Finally we find in the geographical literature e.i. in the fragments from ERATOSTHENES, in POSIDONIUS, and in GEMINUS a *48*-division of the circle, resulting in parts of *7°30'*.»

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Teilung des Kreises *existierte*[51]. Aber das zweite Mal wird bei ihm auf S. 15 dieselbe Kreisteilung plötzlich schon als die für die griechische Wissenschaft bezeichnende *Standard-Form* hingestellt[52]. Ja, der Pseudo-Beleg avanciert auch diesmal noch. Er wird auch noch für etwas anderes zum «Beweis».

Nachdem nämlich TOOMER im Sinne der Richtlinien seines Vorgängers die Grundwerte der angeblichen HIPPARCHOS-Tafeln in insgesamt *24* Zeilen frei zusammengestellt hatte und nachdem er sogar glaubte, mit Berechnungen gezeigt zu haben, von welchem Grundwert HIPPARCHOS bei der Aufstellung der Tafeln ausgegangen sei (nämlich $R = 3438'$), fühlte er plötzlich noch eine Lücke in der eigenen Konstruktion. Er schrieb selber, daß er noch nicht bewiesen habe, daß HIPPARCHOS unter den Grundwerten seiner Tafeln auch «lineare Interpolationen» angewendet habe. Aber keine Angst! Auch das ließe sich noch zeigen. Es gäbe dafür zwei überrumpelnde «Beweise», und zwar: *1.* die indischen Sinus-Tafeln selber, die – wie man wieder zu hören bekommt – «zweifellos» (!) auf die Tafeln des HIPPARCHOS zurückgingen; und *2.* der vorige Pseudo-Beleg, die «gewöhnliche» Kreisteilung der Griechen nach $7^0\,30'$ Maßeinheiten[53]. – Diese Argumentation bedarf wohl keines weiteren Kommentars.

Aber ich will den Gedankenreichtum dieser beiden kuriosen Leistungen der Wissenschaftsgeschichte nicht voll erschöpfen. Es genüge, wenn ich hier nur noch zwei Punkte illustriere: a ) Worin geht die spätere Arbeit über die frühere Initiative noch weiter hinaus? und b ) Wie behandeln beide Verfasser die wirklich vorhandenen antiken Vorlagen?

a ) Kurz kann ich die erste Frage beleuchten. TOOMER hat nämlich – nachdem er eingesehen hatte, daß er vor allem die vermutliche Sehnentafel des HIPPARCHOS rekonstruieren mußte – noch eine überraschende Entdeckung gemacht, die selbst über die seines Vorgängers weit hinausgeht. Sie besteht darin, daß nicht nur die Struktur der indischen Sinus-Tafeln, sondern auch einer ihrer grundlegenden Para-

---

51. TOOMER, a.a.O., S. 6: «(NEUGEBAUER) mentioned evidence in Greek texts for the *existence* of a *48*-division of the circle into units of $7\frac{1^0}{2}$.»

52. Ebd. S. 15: «... evidence pointing to the use of $7\frac{1^0}{2}$ as a *standard subdivision of the circle* in Greek texts.»

53. Ebd.: «Thus our calculations have proven that HIPPARCHUS used a chord table with the base $R = 3438'$, but they have not proven that he used linear interpolation. That is proven by the structure and use of the Indian sine table (which is surely derived from the Hipparchian chord table), together with the evidence pointing to the use of $7\,½^0$ as a standard subdivision of the circle in the Greek texts.»

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



meter, der Radius jenes Kreises, von dem man dabei ausgegangen war *(R = 3438′)*, von HIPPARCHOS stammen soll[54]. Man frage nicht, wieso HIPPARCHOS gerade für diese Zahl eine Vorliebe gehabt haben soll. Dem modernen Historiker eröffnete sich diese Einsicht als mögliche Erklärung für *eine* rätselhafte Stelle bei PTOLEMAIOS[55]. Allerdings fand er nachträglich – was aber bloß im Appendix erwähnt wird – auch noch eine *zweite* Stelle in der griechischen Literatur, die die Kenntnis derselben rätselhaften Zahl *(R = 3438′)* verraten soll[56]. Und wenn jemand einwenden wollte, daß PTOLEMAIOS beim Aufbau seiner Tafeln gar nicht von einem Kreis mit *Radius = 3438′* ausgegangen sei, der Radius seines Kreises einfach $60^{p}$ betrage, so hat TOOMER auch darauf seine Antwort bereit, und zwar sei das nur eine nachträgliche Vereinfachung des PTOLEMAIOS[57]. Soviel zum Punkt a ).

b ) Es wurde im vorigen Kapitel schon erwähnt, daß nach der antiken Überlieferung auch zwei ältere Schriftsteller vor PTOLEMAIOS Werke über Sehnentafeln verfaßt hatten: HIPPARCHOS 12 Bücher, und MENELAOS 6 Bücher. – Wie beurteilt nun NEUGEBAUER diese antike Überlieferung? – Er schrieb dazu[58] :

«Es ist offenbar Unsinn, daß PLINIUS dem HIPPARCHOS ein Werk in 12 Büchern über die Sehnen zuschreibt. Die gesamte antike Trigonometrie, die ebene und sphärische, mit Beweisen, Tafeln und Anwendungen beansprucht nur zwei Bücher von den insgesamt 13 des *Almagest*. Ich weiß nicht, woher der Irrtum des PLINIUS kommen mag. Aber es ist ohnehin nicht der Mühe wert, diese Stelle des PLINIUS mit Emendationen retten zu wollen. Es ist nur wichtig, daß wir uns durch PLINIUS nicht zu

---

54. Ebd. S. 6: «Not only the structure of Indian sine tables, but also a basic parameter which is commonly found in them, namely a radius for the basic circle of *3438′* is derived from HIPPARCHUS' chord table.»

55. Ebd. S. 7: «The notion that HIPPARCHUS might have used such a base circle for his table chord suggested itself to me as a possible explanation for the strange numbers... stated by PTOLEMY (*Almagest* IV 11) to have been found by HIPPARCHUS... etc.»

56. Ebd. S. 23: «Besides *Almagest* IV 11 I know of one another trace in surviving Greek literature of the use of the chord table with *R = 3438′*. This is PTOLEMY *Geography* I 20.»

57. Vgl. ebd. S. 19.

58. NEUGEBAUER, a.a.O., S. 249: «It is obviously nonsense that PLINY ascribes to HIPPARCHUS a work on chords in 12 books. The total of ancient trigonometry, plane and spherical, with proofs, tables and applications requires only two of the 13 books of the whole *Almagest*. How PLINY's error originated, I do not know; at any rate it is not worth the effort to rescue this passage in PLINY by emendations. It is important however, not to be misled by PLINY into the assumption of a very developed stage of trigonometric tables in the time of HIPPARCHUS, comparable, say, to the table chords in the *Almagest* computed in steps of $1/2^{0}$. Etc.»

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



der Annahme verleiten lassen, daß hochentwickelte trigonometrische Tafeln zur Zeit des HIPPARCHOS existiert hätten, die man etwa mit den Tafeln des *Almagest* vergleichen könnte. Etc.etc.»

Es ist nicht nötig, daß ich zu diesem Gedankengang Stellung nehme. Mich interessierte nur – nachdem im englischen Original der Name «PLINIUS» nicht weniger als *viermal* hintereinander ausgeschrieben steht, an welchen PLINIUS NEUGEBAUER wohl dachte: an den Älteren (23-79 n.Chr.) oder an den Jüngeren (62-114 n.Chr.)? – Der Irrtum – oder seien wir nicht so streng: *das Verschreiben* – ist in beiden Fällen schlimm genug. Keiner der beiden römischen Schriftsteller, die den Namen «PLINIUS» führten und *lateinisch* verfaßte Werke hinterließen, hat dem HIPPARCHOS auch nur ein einziges Buch über Sehnen zuschreiben wollen. Bei NEUGEBAUER ist nämlich eigentlich THEON gemeint, der Vater der berühmten *Hypatia,* vom Ende des 4. Jahrhunderts, der *griechisch* seinen Kommentar zum *Almagest* verfaßt hatte. – Übrigens hat der Verfasser der späteren Arbeit, TOOMER, der auch diesen Gedanken von NEUGEBAUER nicht ungenutzt lassen wollte, den Fehler schon taktvoll und stillschweigend korrigiert. Er hat zumindest den Namen zurechtgestellt: «THEON von Alexandria». Aber darüber erst später.

Auch das hat mir nicht eingeleuchtet: *Warum* und von *welchen* «zwei Büchern des *Almagest*» redete eigentlich NEUGEBAUER im vorigen Zitat? – Wäre es nicht zweckmäßiger gewesen, bloß *«zwei Kapitel»* (*Almag.* I 10-11) zu sagen – wenn er schon die Kürze der Abhandlung über die Sehnen bei PTOLEMAIOS hervorheben wollte? Auf jeden Fall hat ihn TOOMER auch in diesem heiklen Punkt schon *stillschweigend* korrigiert und sprach lieber von *33 TEUBNER-Seiten*[59].

Doch es ist beachtenswert, wie TOOMER auch in diesem Punkt über NEUGEBAUER hinausging. Denn NEUGEBAUER wußte noch nicht, wie der Irrtum von den «12 HIPPARCHOS-Büchern über die Sehnen» entstanden war, und er hielt diese Frage auch nicht des Kopfzerbrechens wert. Dagegen fand TOOMER die folgende Theorie dafür[60] :

Es sei nicht wahrscheinlich, daß THEON die Bücher des HIPPARCHOS und MENELAOS über die Sehnen wirklich gesehen habe. Die Zahlen, die er für diese angibt, seien nur ein Mißverständnis. THEON habe nämlich seine Quelle (?) mißverstanden. Diese durch TOOMER für THEON frei

---

59. TOOMER, a.a.O., S. 19-20: «PTOLEMY... deals with the whole subject in a space represented by 33 pages in TEUBNER edition.»

60. Ebd.: «It is not likely that THEON actually saw the works of HIPPARCHUS and MENELAUS on chords. His statement that they were in 12 and 6 books respectively may be due to his misunderstanding a reference to the above mentioned arrangement in 12 sections in some earlier source.»

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



erfundene Quelle («reference» im englischen Text) habe nicht von 12 Büchern, sondern wohl nur von *12 Sektionen* einer Arbeit gesprochen, etc.etc.

Aber es sei damit endlich genug. Es tut mir leid, daß ich soviel Aufmerksamkeit auf zwei Aufsätze wenden mußte, über die ich *kein gutes Wort* sagen kann. Aber es war nötig, hier auf eine «Methode» aufmerksam zu machen, die heute in der Wissenschaftsgeschichte, *leider*, gar nicht so selten ist und die in Zukunft restlos beseitigt werden müßte.

## 6. *Einige Vorschläge*

Eine neue Behandlung des historischen Problems der Sehnentafeln kann im vorletzten Kapitel dieser Studien höchstens angeschnitten werden. Meiner Ansicht nach könnte nämlich eine nüchterne Untersuchung auch noch darüber hinausgehen, was ich im folgenden zusammenzustellen versuche. Denn ich möchte mit den nächsten Andeutungen und Vorschlägen doch nur darauf hinweisen, daß jene Untersuchungen, von denen in den beiden ersten Teilen dieses Buches einiges gezeigt wurde, auch in dieser Hinsicht unsere Perspektive zu erweitern vermögen.

Stellen wir vor allem fest, daß die bisherigen Untersuchungen wohl schon glaubhaft zu machen vermochten, daß HIPPARCHOS – zumindest im wesentlichen – dieselben Sehnentafeln benutzt haben muß, die uns im Werk des PTOLEMAIOS vorliegen. Sonst wäre es nämlich kaum denkbar, wieso wir die ptolemäischen Tafeln (und auch Rechenregeln, Formeln) für Berechnungen mit Angaben aus dem Werk des HIPPARCHOS anwenden konnten und wie es möglich war, daß wir dabei dieselben Ergebnisse erhielten, die bei HIPPARCHOS vorliegen. Dieselben Tafeln des PTOLEMAIOS ließen sich sogar auch für solche Berechnungen anwenden, deren bekannte Ergebnisse vermutlich – in manchen Fällen sogar *zweifellos* – aus Zeiten v o r HIPPARCHOS überliefert sind. Das überraschendste Beispiel für einen solchen Fall ist das des PYTHEAS aus Massalia – kaum ein paar Jahrzehnte nach EUDOXOS.

Dies alles darf uns nicht wundern, nicht nur deswegen, weil bei THEON von Alexandria überliefert ist, daß schon HIPPARCHOS Sehnentafeln besaß, sondern auch, weil – wie schon in der «Einleitung» hervorgehoben wurde – die Art und Weise, wie HIPPARCHOS seine zitierten Worte formuliert, den Verdacht nahelegt, er gehe auf die von ihm angedeuteten Berechnungen nur deswegen nicht näher ein, weil diese zu seiner Zeit schon als etwas Selbstverständliches und allgemein Bekanntes galten.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Bevor ich jedoch zu skizzieren versuche, wie man einiges über die Vorgeschichte der Sehnentafeln des HIPPARCHOS doch wohl klären könnte, muß ich hier noch eine Frage erwähnen, die bisher absichtlich vermieden wurde: Welche Art Genauigkeit nämlich die Tafeln des HIPPARCHOS erstrebt haben mögen?

Bei PTOLEMAIOS werden nicht nur die Grade, sondern auch die etwaigen *Minuten* und *Sekunden* der Bogen und Sehnen berücksichtigt. Hat auch die Tafel des HIPPARCHOS schon eine derartige Genauigkeit erstrebt?

Man kann diese Frage auf Grund der Textstellen, die in diesem Buch behandelt wurden, *nicht* mit Bestimmtheit beantworten. Denn wohl schreibt PTOLEMAIOS einmal (*Almag.* I 12) ein solches Messen der Entfernung beider Wendekreise voneinander (bzw. das Messen der Hälfte dieser Entfernung, der «Schiefe der Ekliptik») dem HIPPARCHOS zu, woraus man schließen dürfte, daß HIPPARCHOS zumindest auch die Minuten der Bogen hat berücksichtigen müssen. Aber eben in jenen Fällen, in denen wir seine Sehnen-Berechnungen rekonstruieren konnten, betonte HIPPARCHOS selber, daß die mitgeteilten Ergebnisse nur *Approximationen* seien. HIPPARCHOS sagt z.B., daß die geographische Breite des Hellespontes *«ungefähr 41⁰»* ist. PTOLEMAIOS bestimmt dieselbe Breite als *40⁰ 56′*. Es ist natürlich nicht ausgeschlossen, daß auch HIPPARCHOS dieselbe Genauigkeit hätte erreichen können, aber beweisen kann man dies kaum.

Ich vermute jedoch, daß wahrscheinlich auch schon HIPPARCHOS die Sehnenlängen *von Halbgrad zu Halbgrad* registrierte, wie wir dies bei PTOLEMAIOS sehen. Für diese Vermutung kann ich einstweilen nur die folgenden zwei Anhaltspunkte erwähnen :

Es wurde schon gezeigt, auf welchem Wege HIPPARCHOS die Entfernungen je eines Ortes vom Äquator aus Gnomon-Verhältnissen berechnet haben mag. Gnomon und Schatten gelten bei diesen Berechnungen als Sehnen in einem Halbkreis, mit dessen Durchmesser sie ein rechtwinkliges Dreieck bilden. Berücksichtigt man das Verhältnis dieses Durchmessers zu jenem anderen, für den die Sehnentafel von vornherein berechnet ist *(120*$^{p}$), so findet man leicht in den Tafeln jene Bogenwerte, die zu den gegebenen Sehnen gehören. Doch muß der eine dieser Bogenwerte am Ende noch *halbiert* werden, um das gesuchte κλῖμα zu bekommen, da der betreffende Bogen im geprüften Zusammenhang ein *Peripheriewinkel* ist und die Sehnentafel *Zentriwinkel* enthält. Das *Halbieren* des Bogens ist also zur Berechnung unbedingt nötig.

Ebenso unerläßlich ist das *Halbieren* des Bogens auch bei der anderen Art Berechnung der Polhöhe aus der Zeitdauer des längsten

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Tages. Denn in diesen anderen Berechnungen arbeitet man mit Sehnen, die die Doppelten der fraglichen Bogen unterspannen.

Eben dieses *Halbieren* der Bogenwerte scheint mir den Gedanken nahezulegen, daß wohl auch schon die Sehnentafel des HIPPARCHOS die Bogenwerte mindestens bis zur Genauigkeit der Halbgrade berücksichtigt haben mag. Aber auf alle Fälle wird man diese Vermutung später, im Lichte anderer Zeugnisse, noch genauer prüfen müssen.

*

* *

Und nun möchte ich kurz zeigen, wie man – meiner Ansicht nach – in die «Vorgeschichte» der Sehnentafeln doch einigermaßen vordringen könnte.

Ausgehen möchte ich dabei von jenen Worten des PTOLEMAIOS, die oben am Anfang des Kapitels 4. *(«Das Problem der Sehnentafeln»)* schon zitiert wurden. Der antike Verfasser begründet in diesem Teil seines Werkes (*Almag.* I 10) vor allem, *zu welchem Zweck* er seine Tafeln zusammenstellen wird. Es hieß in der deutschen Übersetzung: *«Zum bequemen Gebrauch wollen wir zunächst in Tabellenform die Größenbeträge zusammenstellen, die auf die Sehnen entfallen...»* Kein Zweifel, MANITIUS hat das Original darin, was er mit *«zum bequemen Gebrauch»* wiedergab, richtig verstanden. Und doch verraten in diesem Fall die griechischen Worte, denen die eben wiederholte deutsche Wendung entspricht, auch noch etwas anderes, worauf der Leser allein nach der modernen Variante wohl nicht kommen würde. PTOLEMAIOS sagt nämlich: πρὸς...τὴν ἐξ ἑτοίμου χρῆσιν, und dies heißt, noch genauer übersetzt als oben: *«zum Gebrauch aus dem f e r t i g V o r l i e g e n d e n»*. Die zu den einzelnen Bogen gehörigen Sehnen werden also im voraus zu dem Zweck berechnet, daß sie *fertig vorliegen,* wenn später in den astronomischen Berechnungen ein Fall vorkommt, in dem man die eine oder die andere von ihnen kennen muß; damit man diese in solchen Fällen nicht immer wieder von neuem zu berechnen braucht. Kurz und gut, ich erschließe aus den allerersten Worten des PTOLEMAIOS in seinem Kapitel *«Größenverhältnis zwischen Sehnen und Kreisbogen»* folgendes :

Sehnentafeln wurden bei den Griechen wohl erst *nach einer längeren Praxis* zusammengestellt. Ursprünglich hat man das Verhältnis der zusammengehörigen Sehnen und Bogen – wenn eine der beiden Größen bekannt war – vermutlich immer wieder von neuem berechnet. Erst als man nach einer längeren Praxis einsehen mußte, wie unbequem es ist, langwierige Berechnungen, die außerdem untereinander häufig ähnlich



ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



sind, immer wiederholen zu müssen, kam man auf den Gedanken des «Gebrauchs aus dem *fertig Vorliegenden*».

Untrennbar von derselben Vermutung sind auch noch folgende Konsequenzen: Man hat wohl die gleichen Berechnungen, die man später gewöhnlich unter Anwendung von Sehnentafeln ausführte, auch schon in einer Zeit anstellen können, in der noch gar keine Sehnentafeln vorhanden waren. Es genügten nämlich dazu auch jene Kenntnisse in sich, die erst später in einem Werk über Sehnentafeln systematisiert wurden. Die späteren Sehnentafeln haben zwar die Berechnungen wesentlich erleichtert, aber sie waren den älteren rechnerischen Operationen gegenüber wohl nicht prinzipiell neu. Darum glaube ich auch nicht, daß die Schöpfung der Sehnentafeln in der Entfaltung der griechischen Mathematik etwas grundsätzlich Neues bedeutete. Wichtig war diese Tat eher nur vom Gesichtspunkt der antiken *angewandten Mathematik,* der *Astronomie,* aus. Ja, das bloße Vorhandensein solcher Tabellen lud beinahe schon zum unüberlegten und mechanischen Gebrauch ein. Darum mußte PTOLEMAIOS auch erklären, warum er nicht bloß die Tabellen selbst in sein Werk einfügt, sondern warum er auch kurz ihren theoretischen Aufbau schildert: «*damit wir nicht nur die Größen der Sehnen... zur Hand haben – ohne uns Rechenschaft zu geben, wie wir dazu kommen* (ἀνεπιστάτως) –, *sondern damit wir mit Hilfe ihrer Konstruktionen sofort den Beweis der Richtigkeit antreten können*» (*Almag.* I 10).

Nun braucht PTOLEMAIOS selber in der Tat nur zwei längere Kapitel dazu, um zuerst theoretisch zu erklären, wie man die einzelnen Sehnenwerte bekommt, und um dann in einem zweiten Kapitel dem Leser die Tabellen selbst vorzulegen. Aber selbstverständlich konnte dasselbe Thema auch ausführlicher in mehreren antiken «Büchern» behandelt werden. Ich selber habe beispielsweise schon gesagt, daß ich mir einen großen Teil des 3. Buches der Euklidischen *Elemente* – und auch einen Teil des 4. Buches – sehr gut als Vorbereitung zum Sehnentafel-Problem denken könnte.

Aber wer war denn eigentlich jener erste Astronom oder Mathematiker der Antike, der auf den Gedanken der Systematisierung der Sehnengrößen verfiel? – Aus der antiken Überlieferung weiß man gar nichts darüber. Es ist vollkommen unbegründet, wenn man unter Berufung auf THEON behauptet, HIPPARCHOS sei der erste gewesen. In Wirklichkeit sagt nämlich THEON gar nichts dergleichen. Er bemerkt nur schlicht die Tatsache, daß a u c h HIPPARCHOS und MENELAOS über die Theorie der Sehnen geschrieben haben. Ja, damit völlig klar sei, wie man die diesbezüglichen Worte des THEON zu verstehen hat, para-

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



phrasiere ich hier – wenigstens zum Teil – noch einmal jene Textstelle, die oben (S. 210 und Anm. 35) schon zitiert und behandelt wurde.

PTOLEMAIOS schrieb also in diesem Sinne[61]: «Wir werden zunächst *zeigen* (δείξομεν)» – wie man nämlich die einzelnen Sehnenwerte bekommt –, und unmittelbar daran schlossen sich die Worte des THEON an: «*Gezeigt wurde* (δέδεικται) auch bei HIPPARCHOS etc.» – Es ist also, wie man sieht, gar keine Rede davon, daß THEON hätte sagen wollen, gerade HIPPARCHOS sei der *erste* Verfasser von Sehnentafeln gewesen. Er erwähnt nur – und beinahe bloß beiläufig –, daß auch HIPPARCHOS und MENELAOS Abhandlungen über Sehnentafeln geschrieben haben, und zwar der eine in 12, der andere in 6 Büchern. – Ich denke mir nämlich den historischen Verlauf etwa folgendermaßen :

Nachdem irgend jemand einmal auf die Idee gekommen war, wie viel bequemer es ist, die einzelnen Sehnenwerte im voraus berechnet zu haben – besonders wenn dabei auch noch der Wert der größten Sehne im Kreis, des Durchmessers, ein für alle Male festgelegt ist –, als wenn man dieselben Kalkulationen in jedem konkreten Fall immer wieder von neuem beginnt, wurden die Sehnentafeln sozusagen zu einer *wissenschaftlich-literarischen Gattung.* Vermutlich versuchten sich mehrere in dieser Gattung, und es kann auch bloß ein Zufall sein, daß wir nur zwei Namen als Vertreter dieser Gattung (HIPPARCHOS und MENELAOS) und ein einziges erhalten gebliebenes Werk des *genus*, die Sehnentafeln des PTOLEMAIOS, kennen.

Ähnlich verhielt es sich auch mit einer anderen *wissenschaftlich-literarischen Gattung,* den sog. «Elementen». Diese andere Gattung entstand vermutlich noch in der ersten Hälfte des 5. Jahrhunderts, als man darauf kam, daß man viele mathematische Sätze beweisen kann und daß sich wohl alle auf letzte Prinzipien (ἀρχαὶ) – wie *Definitionen, Postulate* und *Axiome* – zurückführen lassen. Wahrscheinlich bald danach versuchten mehrere, diese Zielsetzung in sog. «Elementen» *(Stoicheia)* möglichst vollständig zu verwirklichen. Wir wissen in der Tat, daß schon im 5. Jahrhundert HIPPOKRATES von Chios «Elemente» zusammengestellt hat. Und ebenso schrieben – nach einem Bericht des PROKLOS[62] – im 4. Jahrhundert LEON und THEUDIOS ähnliche «Elemente». Aber nichts von diesen frühen Versuchen ist erhalten geblieben, nur das spätere Werk des EUKLID, der seine *Elemente* um 300 v.Chr. zusammengestellt hat.

Ähnlich war auch das Los der älteren Sehnentafeln von HIPPARCHOS

61. Man vergleiche zu dieser wiederholten Paraphrase auch den griechischen Text des THEON, oben in Anm. 35.

62. PROCLUS, *In Eucl.* (ed. FRIEDLEIN) S. 65-68.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



und MENELAOS; auch diese gingen verloren, nur das spätere Werk des PTOLEMAIOS ist für uns erhalten geblieben. – Der große Unterschied ist nur, daß für die Gattung «Elemente» durch PROKLOS bezeugt wird, HIPPOKRATES von Chios sei der erste gewesen, der solche verfaßt hat, während der älteste Vertreter der Gattung der Sehnentafeln *nicht* bekannt ist. (Im Sinne der THEON-Worte war HIPPARCHOS nur *einer der älteren* im Vergleich zu PTOLEMAIOS.)

Ja, mir scheint auch, daß es gar nicht völlig unbekannt sei, wie in der Antike eine solche wissenschaftlich-literarische Gattung von Verfasser zu Verfasser behandelt wurde. Die Späteren haben von ihren Vorgängern gewöhnlich das meiste übernommen. Die neue Leistung bestand in der Mehrzahl der Fälle entweder in Erweiterungen, Korrektionen oder in kompakter Formulierung. Aber die charakteristischen Grundzüge der ursprünglichen Gattung wurden in der Regel beibehalten. – Wir können auch sogleich ein Beispiel dafür nennen, wobei es sich zwar nicht um eine selbständige Gattung, sondern nur um einen gattungsmäßigen Abschnitt innerhalb eines wissenschaftlichen Werkes handelt.

Es wurde in dieser Arbeit das Kapitel II 6 aus dem *Almagest* schon mehrmals zitiert: *«Charakteristik der Parallelkreise»*. Auch darauf habe ich schon hingewiesen, daß bedeutende Teile dieses Kapitels einen ähnlichen Teil aus dem verlorenen Werk des HIPPARCHOS wiederholen. Aber auch HIPPARCHOS wird in diesem Teil manches von ERATOSTHENES oder sogar von PYTHEAS aus Massalia übernommen haben. Ich brauche hier nicht zu wiederholen, daß auch in diesem Fall die wichtigsten Motive der Gattung («Charakteristik der Parallelkreise») – *längster Tag, Gnomon-Verhältnisse, Entfernung vom Äquator, geographischer Ort,* über den der betreffende Parallelkreis hinwegführt, etc. – von Verfasser zu Verfasser immer wieder dieselben sind.

War nun die Konstruktion der Sehnentafeln in der Tat eine *Gattung* der antiken wissenschaftlichen Literatur – wie ich vermute –, so ist es wahrscheinlich, daß auch PTOLEMAIOS den Regeln der Gattung gefolgt ist. Und geht man von dieser Arbeitshypothese aus, so darf man hoffen, daß das sorgfältige Prüfen der bei PTOLEMAIOS vorliegenden Konstruktion wohl auch einige historische Schlüsse über die Sehnentafeln ermöglicht. Versuchen wir, wenigstens einige Schritte in dieser Richtung zu gehen.

### *7. Der Aufbau der Tafeln*

Überblickt man jene 33 Seiten, die in der HEIBERG-Ausgabe des PTO-

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



LEMAIOS dem Problem der Sehnentafeln gewidmet sind (Pars I., S. 31-63), so sieht man, daß sich die beiden Teile (Kapitel 10 und 11) fast vollkommen im Gleichgewicht befinden. Die ersten 17 Seiten (31-47) behandeln die Theorie: *«Verhältnis zwischen Bogen und Sehnen»*, und nur *eine* Seite weniger füllen die danach folgenden Tafeln aus (S. 48-63). In der Übersetzung von MANITIUS verteilen sich die Seitenzahlen desselben Teiles ungleichmäßiger: S. 24-40, 12 + 4 gedruckte Seiten.

Es wird uns hier nur der Aufbau des ersten, theoretischen Teils (*Almag.* I Kap. 10) kurz beschäftigen.

Die Ausgabe von HEIBERG gliedert den griechischen Text dieses Teils eigentlich *nicht*. Das heißt, selbstverständlich hat auch dieser ausgezeichnete Herausgeber immer wieder neue Absätze begonnen, wo im Text je eine offenbar enger zusammengehörige Gedankeneinheit vorlag. (Vermutlich folgen die Absätze im HEIBERG-Text einfach den Handschriften.) Aber darüber hinausgehend, hat HEIBERG selbständig *keine* weitere Gliederung eingeführt. Dies war auch nicht seine Aufgabe. Schließlich käme eine solche Gliederung des Textes, die ich meine, schon einer Interpretation nahe.

Dagegen findet man in der Übersetzung von MANITIUS eine in der Tat völlig richtige moderne Gliederung, die ich hier nur bis zu einem gewissen Grade vereinfachen möchte.

Es fiel nämlich MANITIUS vor allem auf, daß die theoretische Erörterung des PTOLEMAIOS – wie man eine vollständige Liste der Sehnenwerte Schritt für Schritt zusammenstellen soll – *in zwei große Einheiten zerfällt.*

Der griechische Text führt erst auf S. 36 (bei MANITIUS in der Übersetzung auf S. 28) den sog. *Satz des PTOLEMAIOS* ein; dieser heißt im Original übrigens: *«ein sehr nützliches kleines Lemma»* (λημμάτιον εὔχρηστον πάνυ). Von diesem Punkt an werden einzelne Sehnenwerte nach einem völlig anderen Prinzip gewonnen als bis dahin. MANITIUS wollte diesen Wechsel offenbar auch dadurch hervorheben, daß er in seiner Gliederung andere Bezeichnungen v o r und wieder andere n a c h dem Einführen des Ptolemäischen Lehrsatzes für die einzelnen Unterteile anwendete. Zuerst zählt die Übersetzung *sechs* mit arabischen Ziffern numerierte Einheiten auf. Es handelt sich in diesen darum, wie PTOLEMAIOS jene Sehnengrößen berechnet, die Seiten der folgenden fünf regulären Polygone sind: *Zehneck, Fünfeck, Sechseck, Quadrat* und *Dreieck*; an diese wird zum Schluß die Berechnung der Sehne des *Supplementbogens* angeschlossen. Diese Einheiten bekommen also von MANITIUS die Nummern 1 bis 6.

Dann wird der Ptolemäische Lehrsatz eingefügt, wonach MANITIUS

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



die noch übrigbleibenden weiteren *vier* Einheiten mit römischen Ziffern (I-IV) numeriert. Diese letzteren werden auch wir unverändert übernehmen. Aber anstatt der ersten 6 Einheiten des MANITIUS werden wir uns bloß mit 3 begnügen. Die ersten zwei Einheiten gehören nämlich so eng zusammen, daß sie hier in einen einzigen Punkt zusammengefaßt werden. Ebenso werden die darauffolgenden drei Einheiten bei mir *Punkt 2.*; nur die letzte, bei MANITIUS mit arabisch 6. bezeichnete Einheit wird hier von den vorangehenden als *Punkt 3.* getrennt. – Anstatt der vier römischen Ziffern des MANITIUS – nach dem Einführen des Ptolemäischen Lehrsatzes – numeriere ich dann laufend weiter. So wird bei mir der gesamte theoretische Teil des Sehnentafel-Kapitels (*Almag.* I 10) in *sieben Einheiten* zerlegt.

Es sei hier zunächst ein kurzer Überblick über diese sieben Einheiten geboten :

*1.* Nach der Einleitung schildert PTOLEMAIOS zunächst eine interessante Konstruktion, die zugleich die Seiten sowohl des in den Kreis eingeschriebenen *Zehnecks* wie auch die des *Fünfecks* zeigt. Diese Polygon-Seiten sind nämlich Sehnen, die Bogen von $36^0$ bzw. $72^0$ Zentriwinkeln unterspannen. Dann zeigt er auch, wie diese Polygon-Seiten zu berechnen sind, wenn der Radius des Kreises $60^p$ beträgt. Damit hat man die Sehnen zu den Bogen von $36^0$ und $72^0$.

*2.* Im nächsten Schritt werden die Seiten des in den Kreis eingeschriebenen *Sechsecks, Quadrats* und *Dreiecks* als Sehnen zu den Bogen von $60^0$, $90^0$ und $120^0$ Zentriwinkeln berechnet. Eben diese drei Fälle wurden oben, im ersten Teil des vorliegenden Buches (S. 72-73 , im Kapitel *7. «PTOLEMAIOS II 5»*), anläßlich des allgemeinen Problems der Sehnentafeln schon kurz besprochen.

*3.* Nachdem auf diese Weise die Sehnengrößen zu fünf verschiedenen Bogen ($36^0$, $72^0$, $60^0$, $90^0$ und $120^0$) berechnet wurden, werden wir daran erinnert, daß auch die Sehnen zu den *Supplementbogen* irgendwelcher bekannten Bogen (und Sehnen) sich leicht berechnen lassen. Denn wie Bogen und Supplementbogen sich gegenseitig zu $180^0$ ergänzen, so sind die Sehnen, die diese unterspannen, senkrecht aufeinander. Darum bilden in einem solchen Fall die beiden Sehnen und der Durchmesser des Kreises ($120^p$) ein rechtwinkliges Dreieck. Aus bekannter Hypotenuse (Durchmesser) und ebenfalls bekannter *einer* Kathete (Sehne) berechnet man – mit Hilfe des pythagoreischen Lehrsatzes – die andere Kathete (Sehne).

Damit sind wir am Ende der ersten Hälfte des theoretischen Teils über die Sehnen. Die zweite Hälfte wird mit dem berühmten *Ptolemäischen Lehrsatz* über das Viereck im Kreis eingeführt: *«das Produkt der*

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



*Diagonalen ist der Summe der beiden Produkte aus den gegenüberliegenden Seiten gleich».* Offenbar hat dieses Theorem seinen Namen daher, daß es bei PTOLEMAIOS eine so entscheidend wichtige Rolle spielt. Aber ob es wirklich erst von PTOLEMAIOS stammt oder ob es nicht viel älter ist, bleibe hier dahingestellt. Auf alle Fälle wird derselbe Lehrsatz in dem eben behandelten Kapitel auch zweimal zur Lösung je einer Aufgabe herangezogen.

Übrig sind von jenen insgesamt *sieben Einheiten,* in die ich die ganze Ptolemäische *«Theorie der Sehnen»* (also *Almag.* I 10) gliedern möchte, noch weitere vier.

*4.* (Diese Einheit bekam bei MANITIUS auf S. 29 die Nummer *I.* Vgl. HEIBERG, S. 38-39.) Wie berechnet man jene Sehne, die die *Differenz* zweier Bogen unterspannt, wenn sowohl die beiden Bogen wie auch die sie unterspannenden Sehnen bekannt sind? – Die Aufgabe wird mit dem Ptolemäischen Lehrsatz gelöst.

*5.* (Bei MANITIUS auf S. 30 Nr. *II.*; HEIBERG, S. 39-41.) Wie berechnet man jene Sehne, die die *Hälfte* eines Bogens unterspannt, wenn sowohl der ganze Bogen wie auch die ihn unterspannende Sehne gegeben ist? – Es wird nach der Lösung dieser Aufgabe – die natürlich das Berechnen von zahlreichen Sehnenwerten ermöglicht – noch angedeutet, daß die «kleinste Sehne», die man *praktisch* mit diesem Halbieren eines Bogens (zu dem man den Sehnenwert kennt) erreichen kann, diejenige ist, die den Bogen von $1\frac{1}{2}^0$ bzw. von $\frac{3}{4}^0$ unterspannt. Diese Tatsache wird im Hinblick auf den letzten Punkt der «Sehnentheorie» besonders wichtig.

*6.* (Bei MANITIUS: Nr. *III.* auf S. 31 f.; HEIBERG, S. 41 f.) Wie berechnet man jene Sehne, die die *Summe* zweier Bogen unterspannt, unter denen die Sehnen bekannt sind? – Auch diese Aufgabe wird mit Hilfe des Ptolemäischen Lehrsatzes gelöst.

*7.* (Bei MANITIUS: Nr. *IV.* auf S. 32 ff.; HEIBERG, S. 42 ff.) Vom historischen Gesichtspunkt aus wohl am allerinteressantesten ist dieser letzte Punkt der «Sehnentheorie». Ich kann seinen Inhalt hier nur kurz andeuten. – PTOLEMAIOS erinnert den Leser daran, daß die Trisektion des Winkels im *allgemeinen Fall* nicht möglich ist. Dann setzt er seine Erörterung folgendermaßen fort :

«Deshalb werden wir zuvörderst die Sehne zum Bogen von $1^0$ aus den Sehnen zu den Bogen von $1\frac{1}{2}^0$ und $\frac{3}{4}^0$ auf methodischem Wege ableiten unter Zugrundelegung eines Satzes, der zwar mit absoluter Genauigkeit die Größenbeträge *nicht* festzustellen vermag, aber bei so minimalen Größen doch wenigstens einen Wert liefern kann, der sich für die sinnliche Wahrnehmung von dem absolut genauen nur ganz

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



unwesentlich unterscheidet. Etc.» – Man wird sich also anstatt der Trisektion des Winkels mit einer Approximation begnügen müssen.

*
* *

Ich wiederhole: natürlich kann in diesem Zusammenhang das historische Problem der Sehnentafeln nicht eingehend untersucht werden. Es seien hier nur einige einleitende Gedanken skizziert.

Ein Überblick über die obigen *sieben Punkte* zeigt, daß man die meisten Sehnenwerte mit sólchen Methoden gewonnen hat, die in den letzten *vier Punkten* geschildert werden. Wohl spielt der Ptolemäische Lehrsatz nur in zweien von diesen Punkten (4. und 6.) eine Schlüsselrolle, d.h. wie berechnet man die Sehne zur *Differenz* und zur *Summe* von zwei Bogen, die zusammen mit ihren Sehnen bekannt sind; aber eine Tafel, die man *ohne* die Zuhilfenahme dieses «kleinen und sehr nützlichen Lemmas» (des Ptolemäischen Lehrsatzes) zusammenstellte, müßte notwendigerweise sehr lückenhaft bleiben. – Es wäre eben darum eine wichtige Aufgabe der künftigen historischen Forschung, festzustellen, *wann* und *wie* man zu diesem Lemma gekommen war.

Auffallend ist der Unterschied zwischen den beiden Hälften der «Sehnentheorie», d.h. also zwischen den *Punkten 1.-3.* auf der einen und den *Punkten 4.-7.* auf der anderen Seite. Die Schritte, die PTOLEMAIOS in den ersten drei Punkten erörtert, sind irgendwie *unmittelbarer* und wohl auch *älter* als jene anderen, die in der zweiten Hälfte der Sehnentheorie behandelt werden.

Es werden nämlich in den ersten drei Punkten solche Sehnen berechnet, die *Seiten von mehr oder weniger einfachen regelmäßigen Polygonen im Kreis* sind. Die ganze «Sehnentheorie» hat historisch wohl eben damit begonnen, daß man in den Kreis regelmäßige Polygone einbeschrieben hat. Daraus ergaben sich nämlich (vermutlich!) unmittelbar auch solche einfachen Beobachtungen, die bald zu den Grundfragen der «Sehnentheorie» geführt haben mögen. Nur beispielsweise zähle ich hier drei solche Beobachtungen auf.

a ) Zur Seite jedes in den Kreis einbeschriebenen regulären Polygons gehört ein Bogen, ein Bruchteil des Kreisumfangs.

b ) Die Seitenzahl des einbeschriebenen (regelmäßigen) Polygons bestimmt auch, wievielter Teil des ganzen Kreisumfangs der zur betreffenden Seite (Sehne) gehörige Bogen ist. Darum kann man den Bogen auch mit einer dazugehörigen Polygon-Seite (Sehne) messen oder umgekehrt. – So hat man in der Astronomie, vermutlich schon im 5.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Jahrhundert, die Entfernung beider Pole voneinander, also einen Bogen (von $24^0$ Zentriwinkel) mit der Seite des regelmäßigen Fünfzehnecks, d.h. mit einer Sehne gemessen (OINOPIDES von Chios).

c) Die Seite des Polygons (die Sehne) ist immer kürzer als der Bogen, den sie unterspannt. Will man diese Tatsache zum Ausdruck bringen – auch darüber hinausgehend, daß diese beiden in verschiedenen Maßeinheiten (der *Bogen* in «Graden» und die *Sehne* in *«Längeneinheiheiten» [partes]*) gemessen werden – so schreibt man dem größten Bogen (Halbkreis) eine größere Maßzahl ($180^0$) zu als der größten Sehne (Durchmesser); die letztere soll bloß $120^p$ (Längeneinheiten) haben.

Hat man nun einmal im voraus bestimmt, daß der Durchmesser des Kreises $120^p$ Längeneinheiten haben soll, so kann man ohne weiteres auch feststellen, wie lang jene Sehne wird, die den sechsten Teil des Kreisumfangs ($60^0$) unterspannt. Diesen sechsten Teil bekommt man mit der Seite des in den Kreis einbeschriebenen regulären Sechsecks, die der Radius des Kreises, die Hälfte des Durchmessers ($60^0$), ist. Man braucht also, um diese Sehnenlänge zum Bogen von $60^0$ zu bekommen, nicht einmal eine Konstruktion. – Beinahe ebenso leicht sind auch jene beiden anderen Berechnungen – die der Sehnen zu den Bogen von $90^0$ und $120^0$ –, die im ersten Teil dieser Untersuchungen (oben S. 73) schon vorweggenommen wurden.

Man könnte zur Ergänzung höchstens noch bemerken; daß sich, was die *«Kompliziertheit»* der Lösungen betrifft – wenn man die Berechnungen der Sehnen zu den Bogen $60^0$, $90^0$ und $120^0$ überhaupt *«kompliziert»* nennen darf –, ein *leises Ansteigen* beobachten läßt. Man hat in der Tat den Eindruck, als hätte dieser Verfasser zumindest diese drei Schritte sehr didaktisch stufenweise *aufsteigend* behandelt.

Die große Überraschung ist nur, daß die «Sehnentheorie» doch nicht mit diesen leichten und auch untereinander mit feinem didaktischen Takt geordneten Lösungen beginnt. Die genannten sehr einfachen Berechnungen werden erst als *Punkt 2. nachgeholt.*

Warum beginnt nun die «Sehnentheorie» mit einer Konstruktion, die *viel komplizierter* ist als die im *Punkt 2.* nachgeholten Fälle? – Wir werden eine Antwort auf diese Frage erst dann versuchen können, wenn wir zuvörderst die Konstruktion des *Punktes 1.* näher ins Auge gefaßt haben.

Die Konstruktion in *Punkt 1.* ergibt zunächst die Seiten des in den Kreis einbeschriebenen *Zehnecks* und *Fünfecks,* um danach diese Seiten als Sehnen zu den Bogen von $36^0$ und $72^0$ zu berechnen. – Auch diese Reihenfolge ist keineswegs von vornherein selbstverständlich. Schließlich konstruiert man ein *Zehneck* gewöhnlich auf dem Wege, daß man erst

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



ein *Fünfeck* in den Kreis einbeschreibt – wie diese Konstruktion bei EUKLID in *Elem. IV 11* gelehrt wird –, dann halbiert man eine Seite des Fünfecks und den dazugehörigen Bogen *(Elem. III 30),* um die Endpunkte von zwei Zehneck-Seiten an der Kreisperipherie zu bekommen. – Doch die Konstruktion in *Punkt 1.* bei PTOLEMAIOS geht n i c h t auf diesem Wege vor. Hier wird umgekehrt im ersten Schritt die Zehneck-Seite und im zweiten die Fünfeck-Seite gewonnen. – Wir müssen uns zumindest in großen Zügen auch die beiden Konstruktionen dieses Punktes vergegenwärtigen.

Ich illustriere die fragliche Ptolemäische Konstruktion an Hand der *Fig. 21.*[63] Man sieht darauf, daß der (waagerechte) Radius des Kreises halbiert und mit dem Endpunkt des anderen (senkrechten) Radius verbunden wurde. So bekam man die Strecke $x$; diese, am Durchmesser abgetragen, ergab: $x = \frac{r}{2} + t$. Auf diese Konstruktion kann man sogleich den altpythagoreischen Satz bei EUKLID, *Elem.* II 6, anwenden[64]:

*«Halbiert man eine Strecke* $\left(\frac{r}{2} = \frac{r}{2}\right)$ *und setzt man ihr irgendeine Strecke gerade an* (t), *so ist das Rechteck aus der ganzen Strecke mit Verlängerung und der Verlängerung* $[(r + t) \times t]$ *zusammen mit dem Quadrat über der Hälfte* $\left[\left(\frac{r}{2}\right)^2\right]$ *dem Quadrat über der aus der Hälfte und der Verlängerung zusammengesetzten Strecke* $\left[\left(\frac{r}{2} + t\right)^2\right]$ *gleich.»*

Das heißt also :

$$(r + t) \times t + \left(\frac{r}{2}\right)^2 = \left(\frac{r}{2} + t\right)^2$$

Blickt man auf die rechte Seite dieser Gleichung und auf *Fig. 21.*, so sieht man sogleich, daß es sich hier um das *Quadrat auf der Hypotenuse* eines rechtwinkligen Dreiecks handelt, da $\frac{r}{2} + t = x$ ist. Anstatt des Quadrats auf der Hypotenuse kann man nun, im Sinne des Pythagoreischen Lehrsatzes, die Quadrate der beiden Katheten schreiben. Darum wird die rechte Seite der vorigen Gleichung – während die linke unverändert bleibt :

---

63. Es wird auch an dieser Figur (21.) die Buchstabenbezeichnung des PTOLEMAIOS – allein um der größeren Übersichtlichkeit willen – vereinfacht.

64. Zum altpythagoreischen Ursprung dieses Satzes *(Elem. II 6)* vgl. A. SZABÓ, *Die Muse der Pythagoreer, Historia Mathematica* 1 (1974) S. 291-316.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



$$= r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2$$

Streicht man auf beiden Seiten der Gleichung $\left(\frac{r}{2}\right)^2$, so bleibt : $(r+t) \times t = r^2$, oder dasselbe in der Form einer Proportion : $(r+t) : r = r : t$. Man könnte diese eben erhaltene Proportion etwa folgendermaßen in Worte fassen :

«Der Radius des Kreises ist die *Mittlere Proportionale* zwischen zwei Strecken – nämlich auf der einen Seite einer längeren Strecke, die aus dem Radius selber *(r)* und *einem kleinen hinzugefügten Stück (t)* zusammengesetzt ist (also: $r+t$), und auf der anderen Seite eben diesem *kleinen hinzugefügten Stück (t).*»

Es fragt sich nur, was denn dieses «kleine hinzugefügte Stück» *(t)* sein könnte. Denn *willkürlich* wurde ja die Strecke $t$ nicht gewählt. – Eben auf diese zuletzt gestellte Frage antwortet bei EUKLID der Satz *Elem.* XIII 9, den ich nur sinngemäß folgendermaßen wiedergebe (vgl. dazu *Fig. 22.)* :

*«Addiert man zur Seite des in den Kreis einbeschriebenen Z e h n-e c k s (t) den Radius des Kreises, so bekommt man eine längere Strecke (t + r), und der Radius wird die M i t t l e r e P r o p o r t i o n a l e zwischen dieser längeren Strecke und der Zehneckseite.»*

Wie *Fig. 22.* zeigt, ist die längere Strecke $(t+r)$ in der Tat Schenkel eines größeren gleichschenkligen Dreiecks, während $r$ derjenige eines kleineren, aber dem vorigen ähnlichen gleichschenkligen Dreiecks ist. Eben darum ist das Verhältnis des Schenkels und der Grundlinie beider Dreiecke – also $(t+r) : r$ bzw. $r : t$ – dasselbe; anders gesagt: der Radius des Kreises ist die Mittlere Proportionale zwischen den beiden erwähnten Strecken.

Der Vergleich des zuletzt zitierten Euklidischen Satzes (*Elem.* XIII 9) mit der vorigen Ptolemäischen Konstruktion überzeugt sogleich: die vorige Konstruktion (bei PTOLEMAIOS) war nichts anderes als die Umkehrung des Satzes (bei EUKLID *Elem. XIII 9*). Man hat in der Kenntnis des Satzes *XIII 9* – und mit Hilfe des altpythagoreischen Lehrsatzes *Elem. II 6* – zu dem Radius des bekannten Kreises jene «kleine Strecke» *(t)* so konstruiert, daß der Radius die Mittlere Proportionale zwischen der zusammengesetzten Strecke $(t+r)$ und der «kleinen Strecke» *(t)* sei. Darum muß diese «kleine Strecke» *(t)* Seite des in den Kreis einbeschriebenen Z e h n e c k s sein.

Da man nun weiß, daß $r = 60^{\mathrm{p}}$ ist, kann – mit Hilfe des Pythagoreischen Lehrsatzes – $t$ (die «Zehneckseite» = Sehne zum Bogen von

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



$36^0$) berechnet werden. Denn nach *Fig. 21.* ist $x^2 = r^2 + \left(\frac{r}{2}\right)^2$. Man subtrahiert also aus dem berechneten Wert von $x$ den Wert von $\frac{r}{2}$, und so hat man den Sehnenwert zum Bogen von $36^0$.

Noch überraschender ist die andere Konstruktion (in *Almag.* I 10). PTOLEMAIOS verbindet nämlich *(Fig. 21.)* den Endpunkt der zusammengesetzten Strecke $\left(\frac{r}{2} + t\right)$ mit dem Endpunkt des (senkrechten) Radius und erklärt: Die so erhaltene Strecke *ö* ist die *Seite des in den Kreis einbeschriebenen Fünfecks.* Begründet wird diese unerwartete Behauptung folgendermaßen :

Im Sinne des Pythagoreischen Lehrsatzes ist, wie *Fig. 21.* zeigt,

$$\ddot{o}^2 = r^2 + t^2 \ .$$

Hinzufügen muß man nur noch, daß der Satz *Elem. XIII 10* besagt :

«Das Quadrat auf der Seite des in den Kreis einbeschriebenen *Fünfecks* ist der Summe der beiden Quadrate des in denselben Kreis einbeschriebenen *Sechsecks* und *Zehnecks* gleich.»

Der Radius des Kreises ist selbstverständlich Seite des in den Kreis einbeschriebenen *Sechsecks*, und die Strecke $t$ wurde eben als die Seite des *Zehnecks* gezeigt. Darum muß also *ö* in der Tat Seite des *Fünfecks* sein.

Es würde wohl allzu weit führen, wenn ich diesmal auch die geistreiche und schöne Beweisführung des Satzes *Elem. XIII 10* behandeln wollte. Statt dessen muß ich hier nur auf folgendes nachdrücklich aufmerksam machen.

Die Sehnentheorie des PTOLEMAIOS (also *Almag.* I 10), deren Aufbau vorhin gegliedert wurde, behandelt in *Punkt 1.* vor allem Konstruktion und Berechnung der *Zehneckseite* und unmittelbar danach Konstruktion und Berechnung der *Fünfeckseite.* Zur Begründung beider Konstruktionen braucht man je *einen* Satz aus EUKLIDS *Elementen: XIII 9* und *10.*

Aber wie merkwürdig: nicht nur bei PTOLEMAIOS stehen die beiden Konstruktionen dicht nebeneinander, bzw. folgt die zweite unmittelbar auf die erstere, sondern auch bei EUKLID die beiden Sätze, mit denen die Ptolemäischen Konstruktionen begründet werden. Man glaubt zunächst – wenn man sich diese Tatsache überlegt –, daß PTOLEMAIOS (oder derjenige, der als erster auf die Idee dieser doppelten Konstruktion gekommen war) *zufällig Glück hatte.* Er brauchte nicht viel zu suchen;

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



er konnte gleich beide für ihn notwendigen Sätze bei EUKLID nebeneinander finden. – Oder war es etwa so, daß diese beiden Sätze (*XIII 9* und *10*) bei EUKLID eben deswegen ihren Platz nebeneinander gefunden hatten, weil sie auch schon früher in der Astronomie (genauer: in der «Sehnentheorie») *zusammen,* d.h. hintereinander gebraucht worden waren? Hatte man diese beiden Sätze nicht als *voreuklidisches Gut* aus der Astronomie übernommen, die dann sozusagen in den *Elementen* kodifiziert wurden?

Man versuche, die zuletzt gestellten Fragen bloß als *Arbeitshypothese* gelten zu lassen, und man frage sich: Was folgt denn daraus? Angenommen, daß jene doppelte Konstruktion des PTOLEMAIOS, die oben im *Punkt 1.* geschildert wurde, in der Tat *voreuklidisch* ist, ließe sich diese Annahme dann auch irgendwie weiter erhärten? Könnte man den vermutlichen voreuklidischen Ursprung nicht auch noch mehr präzisieren? – Fassen wir vor allem die beiden Euklidischen Sätze, *Elem. XIII 9* und *10* ins Auge :

Diese sind eigentlich unabhängig voneinander, d.h. beide können auch in sich bestehen. Satz *XIII 10* baut n i c h t auf dem vorangehenden Satz *XIII 9* auf. Man könnte eben deswegen auch ihre Reihenfolge ohne weiteres *vertauschen.* – Aber hat es nicht doch irgendeinen Grund, daß der Satz *XIII 9* vorausgeschickt und erst nach ihm der Satz *XIII 10* aufgestellt wurde? Man prüfe nur die beiden zuletzt behandelten Konstruktionen des PTOLEMAIOS. Könnte man etwa auch diese – die Konstruktion des *Zehnecks* und die andere des *Fünfecks* – je nach Belieben vertauschen? – Keineswegs.

Die Konstruktion der *Zehneckseite* mußte im obigen *Punkt 1.* selbstverständlich vorausgeschickt werden. Erst nachdem man gezeigt hatte, daß die *«kleine Strecke, t»* der *Fig. 21.* in der Tat die Zehneckseite ist, konnte man behaupten, daß auf der anderen Seite, eben darum, die Strecke *ö* die Fünfeckseite sein muß. – Die Reihenfolge der beiden Ptolemäischen Konstruktionen ist *notwendig*; man könnte diese *nicht* vertauschen. Eben diese, vom Gesichtspunkt der Konstruktionen aus wohlüberlegte Reihenfolge scheint auch in den Euklidischen Sätzen beibehalten worden zu sein. Mit Satz *XIII 9* begründet man zuerst, daß die fragliche Strecke *t* die Zehneckseite ist, und erst dann begründet man mit dem nächsten Satz *(XIII 10)* die Fünfeckseite.

Es sieht demnach so aus, als hätte eben jene Konstruktion, die wir aus PTOLEMAIOS kennen, die Reihenfolge der beiden Sätze bei EUKLID *(XIII 9-10)* im voraus bestimmt; mit anderen Worten: die Ptolemäische Konstruktion muß *älter* sein als die Kodifikation beider Sätze in den *Elementen.*

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Natürlich wäre bloß die Reihenfolge der beiden Euklidischen Sätze (XIII 9-10) in sich noch kein besonders starkes Argument für den voreuklidischen Ursprung der besagten Doppelkonstruktion bei PTOLEMAIOS. Doch können wir über dieses Argument noch weiter hinausgehen. Man überlege sich nämlich folgendes :

Sowohl die eben behandelte Doppelkonstruktion des PTOLEMAIOS in *Punkt 1.* wie auch die beiden Euklidischen Theoreme *(Elem. XIII 9-10)* setzen die gründliche Kenntnis der Konstruktion des *regelmäßigen Fünfecks (Elem. IV 11)* voraus. Es ist einfach ausgeschlossen, daß die Verhältnisse der Seiten des *Fünfecks, Zehnecks* und *Sechsecks* untereinander – deren Kenntnis sowohl die Ptolemäische Konstruktion als auch die Euklidischen Theoreme *(XIII 9-10)* verraten – in einer Zeit bekannt gewesen wären, in der man das regelmäßige Fünfeck noch gar nicht hätte konstruieren können. – Nun spielte jedoch das regelmäßige Fünfeck nicht nur in der altpythagoreischen Geometrie, sondern offenbar auch in der *alten Astronomie* eine sehr bedeutende Rolle. Es sei hier nur an folgendes erinnert :

Es wurde in diesem Buch schon mehrmals erwähnt, daß in der alten Astronomie die Entfernung beider Pole voneinander (die «Schiefe der Ekliptik») mit der Seite des regulären *Fünfzehnecks* gemessen wurde. Ich habe versucht, dieses auch in der Überlieferung der Alten als *voreuklidisch* bezeugte Messen dem OINOPIDES von Chios im 5. Jahrhundert v.Chr. zuzuschreiben. Aber man vergesse nicht, wie EUKLID das Fünfzehneck konstruiert *(Elem. IV 16):* Er verbindet die Konstruktion des *Fünfecks* mit der des gleichseitigen *Dreiecks;* die letztere wird selbstverständlich aus der Konstruktion des *Sechsecks* abgeleitet. – Und man muß auch bedenken, was die Konstruktion des *Fünfecks* alles voraussetzt.

Bei EUKLID baut das Einschreiben des Fünfecks in den Kreis *(IV 11)* auf dem vorangehenden Satz *(IV 10)* auf: Konstruktion eines gleichschenkligen Dreiecks mit den Winkeln: $36^0 - 72^0 - 72^0$. Doch diese letztere ist ohne die sog. *stetige Teilung* (unter seinem späteren Namen: «goldener Schnitt»), *Elem. II 11,* gar nicht möglich; und die stetige Teilung ist ihrerseits wieder nichts anderes als ein Spezialfall der sog. *«hyperbolischen Flächenanlegung» (Elem. II 6),* einer Erfindung der «Muse der Pythagoreer» – wie sich PROKLOS ausdrückte[65].

Der stetigen Teilung *(II 11)* bzw. der «hyperbolischen Flächenanlegung» *(II 6)* sind wir in den obigen Gnomon-Untersuchungen schon einmal begegnet. Mit Hilfe dieses Theorems wurde nämlich jener Satz bewiesen, wonach der Gnomonschatten immer die Mittlere Proportio-

65. Vgl. A. SZABÓ, *Die Muse der Pythagoreer,* a.a.O.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



nale zwischen dem ganzen symbolischen «Sonnenstrahl» und dem Abschnitt dieses «Sonnenstrahls» außerhalb des Meridiankreises ist (vgl. *Elem. III 36).*

War überhaupt das ganze Buch II. der Euklidischen *Elemente* nicht gerade eine *Grundlegung zur ältesten Astronomie der Griechen*? – Man lese nur die Worte, mit denen dieses Buch vom Scholiasten eingeleitet wird[66] :

«Nützlich ist dieses Buch zu vielerlei, sowohl zur Stereometrie wie auch zur Planimetrie, und man löst mit ihm manche Aufgaben; *auch zur Astronomie trägt es nicht wenig bei* (εἴς τε μὲν ἀστρονομίαν οὐκ ὀλίγα συμβάλλεται).»

Man dürfte also – meiner Ansicht nach – die oben skizzierten drei ersten Punkte der «Sehnentheorie» bei PTOLEMAIOS (*Almag.* I 10) durchaus für *pythagoreisch* halten.

*
* *

Mit der Annahme des *pythagoreischen Ursprungs* bzw. mit der entscheidend wichtigen Rolle des *Fünfecks* in der Sehnentheorie erklärt sich – meiner Ansicht nach – auch die auffallende Reihenfolge der beiden *Punkte 1. und 2.* bei PTOLEMAIOS. Wohl sind Konstruktion und Berechnung der Seiten des regelmäßigen *Sechsecks, Quadrats* und *Dreiecks* im Kreis die allereinfachsten Schritte in der ganzen Lehre über die Sehnen. Aber historisch hat die Sehnentheorie – allem Anschein nach – doch nicht mit diesen Fällen begonnen. Der entscheidend wichtige Schritt erfolgte erst dann, als die Pythagoreer die *Mittlere Proportionale* (1), die *stetige Teilung* (2), die Konstruktion des *Fünfecks* (3), *Zehnecks* (4) und die Verhältnisse zwischen den Seiten des *Zehnecks, Fünfecks* und *Sechsecks* in demselben Kreis (5) entdeckt hatten. Erst mit diesen epochemachenden Entdeckungen hat sich der Weg zum Aufbau der Sehnentheorie geöffnet. Darum wurde es wohl zu einer Gewohnheit, eben mit diesen Fällen (Zehneck + Fünfeck) die neue Lehre über die Sehnen einzuleiten. Diese Einleitung war – wie ich vermute – eine Regel der Gattung. Die einfacheren Fälle (Sechseck, Quadrat und Dreieck) wurden dann im zweiten Schritt nachgeholt.

*
* *

Was dagegen die vier letzteren Punkte (4-7) bei PTOLEMAIOS, *Almag. I*

66. J.L. HEIBERG, *Euclides, Elementa,* vol.V., p. 221. (1888).

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



*10* betrifft, so wird man diese wohl danach datieren, wie es gelingt, den Ursprung des sog. Ptolemäischen Lehrsatzes genauer zu bestimmen. Diese Frage soll also hier – im großen und ganzen – offen bleiben. Aber *einen* Anhaltspunkt möchte ich hier auch noch in Bezug auf die historische Untersuchung dieser letzteren Punkte erwähnen.

Es wurde oben schon hervorgehoben, daß PTOLEMAIOS den letzten Schritt seiner Konstruktion *(Punkt 7.)* mit folgender Feststellung einleitet: Da die *Dreiteilung des Winkels* (im allgemeinen Fall) nicht möglich ist, wird man sich mit einer Approximation begnügen müssen. Halten wir für einen Augenblick bei der «Dreiteilung des Winkels» inne.

Die drei berühmten, mit Zirkel und Lineal *unlösbaren Aufgaben* der antiken Mathematik sind: die *Quadrierung des Kreises,* die *Verdoppelung des Würfels* und die *Dreiteilung des Winkels*. Und aus welcher Zeit stammen wohl diese Aufgaben? – Die beiden ersten natürlich aus dem 5. Jahrhundert v.Chr. ARISTOPHANES erwähnt schon in einer seiner Komödien (i.J. 414, in den *Vögeln*) die *Quadratur des Kreises*[67]; und schon HIPPOKRATES von Chios – derselbe HIPPOKRATES, der sich um 430 v.Chr. in Athen aufhielt – erklärte, daß man das Problem der *Würfelverdoppelung* lösen würde, wenn man zwischen einer Größe und ihrem Doppelten zwei Mittlere Proportionalen einfügen könnte[68].

Und aus welcher Zeit stammt wohl die dritte unlösbare Aufgabe, die *Dreiteilung des Winkels*? – Es scheint, daß auch diese zum ersten Male im 5. Jahrhundert gestellt wurde. Auf alle Fälle hat der berühmte Sophist HIPPIAS von Elis, ein älterer Zeitgenosse des SOKRATES, mit seiner Quadratrix eben die *Dreiteilung des Winkels* – allerdings unter *Nichtbeachtung* der klassischen Beschränkung auf Zirkel und Lineal – gelöst[69].

Ich möchte zu dieser allgemein bekannten Tatsache nur noch die Frage hinzufügen: Wie kamen wohl die Mathematiker auf die Idee, daß man den Winkel (oder den Bogen) – nicht nur in einigen leichten, speziellen Fällen, sondern im allgemeinen – *dreiteilen* müßte? Was mag denn überhaupt der Anlaß gewesen sein, der sie zur Entdeckung dieser unlösbaren Aufgabe führte? – Offenbar genügte dazu nicht irgendeine abstrakte Beschäftigung mit Winkeln und Bogen. Eine solche abstrakte Beschäftigung mit einem Problem stellt sich gewöhnlich *später* ein. Ursprünglich wollte man mit der Dreiteilung des Winkels wohl eine

---

67. *Aves* 1005. Das Jahr der Aufführung: 414 v.Chr.

68. EUTOCIUS, in *Archimed. de sphaera et cylindro: Archimed. Op. III,* p. 88. HEIBERG. Vgl. O. BECKER, *Das mathematische Denken der Antike,* Göttingen 1957, S. 75.

69. PROCLUS, *In Eucl.* (FRIEDLEIN). Lipsiae 1873. 272, 7; 356, 11. Vgl. A.A. BJÖRNBO s.v. HIPPIAS, in *RE* VIII, 1913, Sp. 1706 ff.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



konkret-wichtige und interessante Aufgabe lösen. – Aber so sehr ich mir auch den Kopf zerbreche, fällt mir nichts anderes ein als das, wozu auch der Astronom PTOLEMAIOS die Dreiteilung des Winkels hätte gebrauchen können. Auf diesem Wege hätte er für alle Sehnen *exakte Werte* bekommen. – Erstrebte nicht auch schon HIPPIAS von Elis mit der Dreiteilung des Winkels etwas Ähnliches? – Schließlich war er ja u.a. auch *Astronom.*

*

* *

Ich bilde mir natürlich nicht ein, daß mit den Vorschlägen in diesem letzten Kapitel das historische Problem der Sehnentafeln gelöst wäre. *Wer* und *wann* er zum ersten Male Sehnentafeln zusammengestellt hat, wissen wir auch jetzt noch *nicht.* Ich wollte mit den kurzen Andeutungen in den letzten zwei Kapiteln nur zweierlei zeigen: *Erstens,* daß jene Arbeit, die schließlich in der Zusammenstellung von Sehnentafeln kulminierte, sehr früh, aller Wahrscheinlichkeit nach noch im 5. Jahrhundert v.Chr. begann. Ja, ein wesentlicher Teil dieser Arbeit war damals wohl auch schon vollendet. Und *zweitens* wollte ich zeigen, daß Berechnungen von Sehnen und Bogen wohl auch schon in einer Zeit möglich waren, in der die nötigen Kenntnisse zwar vorhanden, aber noch keine systematischen Tafeln zusammengestellt waren.

## *Schlußwort*

Schlägt man nun, nach den hier zusammengestellten Untersuchungen, jene HIPPARCHOS-Stelle wieder auf, die ich in der «Einleitung» dieses Buches zitiert habe, so sieht man den antiken Text jetzt, hoffentlich, in einer anderen Beleuchtung, als er auf den ersten Blick erschienen ist. Ich möchte zum Schluß nur einige Punkte jenes besseren, historischen Verständnisses hervorheben, das in diesem Buch erstrebt wurde.

1. Das Werk des HIPPARCHOS, aus dem ich das Zitat entnahm, gehört nicht nur einer antiken wissenschaftlich-literarischen Gattung an, sondern es steht außerdem in einer Reihe der von uns nicht näher bekannten *«ARATOS-Kommentare».* Denn HIPPARCHOS selber schrieb ja[70]:

«Einen Kommentar zu des ARATOS Himmelserscheinungen haben

70. MANITIUS, 1894, S. 5.



ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



schon manche andere verfaßt; am sorgfältigsten von allen aber hat nach meinem Urteil unser Zeitgenosse, der Mathematiker ATTALOS, diese Aufgabe gelöst.»

Fragt man sich nun, worin sich eigentlich HIPPARCHOS – der eigenen Ansicht nach – sowohl von den übrigen Kommentaren wie auch von ARATOS-EUDOXOS unterscheidet, so glaube ich einen wesentlichen Punkt hervorheben zu müssen. Man hat nämlich den Eindruck, daß HIPPARCHOS zwar von korrigierten *Angaben*, von besser beobachteten *Tatsachen* ausgehen, aber kaum jemals eine bessere wissenschaftliche Methode anwenden oder Berechnungen anderer Art als seine Vorgänger anstellen wollte. Er wußte sich also in einer ununterbrochenen Linie jener Männer, die seit dem scharf kritisierten EUDOXOS (ARATOS) wohl manche – wie er glaubte – wesentlich bessere Beobachtungen und Feststellungen erzielt hatten, die aber *keine* grundsätzliche Wandlung den Vorfahren gegenüber vollzogen hatten. Dies ist besonders deswegen wichtig, weil wir auf diese Weise – *zumindest in jenen Fragen, die uns hier unmittelbar beschäftigten* – mit einer einheitlichen wissenschaftlichen Tradition von EUDOXOS über HIPPARCHOS bis PTOLEMAIOS rechnen können.

2. Das Zitat, von dem ich ausgegangen war, beschäftigte sich mit einer einzigen Frage: mit der geographischen Breite (τὸ ἔγκλιμα τοῦ κόσμου). Daher auch der zusammenfassende Titel dieser Untersuchungen: ΕΓΚΛΙΜΑ. Diese «Breite» wurde durch HIPPARCHOS auf Grund von zwei verschiedenen Angaben – Gnomon-Schatten und Zeitdauer des längsten Tages – berechnet. Zweifellos hat HIPPARCHOS beide Berechnungen mit denselben Mitteln und auf dieselbe Weise wie viel später PTOLEMAIOS vollzogen. Ja, es lassen sich ähnliche Berechnungen auch für eine längere Zeitspanne noch v o r HIPPARCHOS, auf alle Fälle bis auf PYTHEAS von Massalia zurück, als sehr wahrscheinlich annehmen.

3. Merkwürdigerweise charakterisiert jedoch ARATOS (EUDOXOS) die geographische Breite (τὸ ἔγκλιμα) bloß mit dem Verhältnis des längsten Tages zur kürzesten Nacht.

4. Ich habe *keinen* Beleg dafür gefunden, daß auch EUDOXOS schon Gnomon-Berechnungen zu geographischen Zwecken angestellt hat, obwohl es als wahrscheinlich gelten kann, daß er vom sog. Gnomon-Weltbild ausgegangen ist.

5. Es ließ sich auch *nicht* nachweisen, ob EUDOXOS aus dem Verhältnis des längsten Tages zur kürzesten Nacht das ἔγκλιμα in der Tat auch in *Breitengraden* errechnet hat, wie dies HIPPARCHOS nach ihm zweifellos getan hat. Aber ich glaube, man wird diese Möglichkeit – nach den hier gezeigten Untersuchungen – *prinzipiell nicht mehr leugnen können.*

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens

# ANTIKE QUELLEN IN MODERNEN AUSGABEN

## (in diesem Band benutzt)


ARCHIMEDES

(1) *Archimedis Opera omnia* iterum ed. J.L. HEIBERG, vol. I-III. Lipsiae 1910-1915.

(2) *The Works of Archimedes with the Method of Archimedes,* ed. T.L. HEATH, 1912 (Dover Publication).

ARISTARCHOS

*Aristarchus of Samos,* ed. T.L. HEATH, Oxford 1913.

ARISTOPHANES

*Aristophanis Comoediae,* rec. F.W. HALL - W.M. GELDART, Oxonii 1906.

ARISTOTELES

*Aristoteles, De caelo,* Introduzione, testo critico, traduzione e note di O. LONGO, Firenze 1961.

AUTOLYKOS

*Autolyci, De sphaera quae movetur. De ortibus et occasibus* etc., ed. F. HULTSCH, Lipsiae 1885.

DIOGENES LAERTIOS

(1) *Diogenis Laertii, De clarorum philosophorum vitis, dogmatibus et apophthegmatis libri decem,* ed. A. WESTERMANN - J.B. BOISSONADE, Parisiis 1878.

(2) M. GIGANTE: *Diogene Laerzio, Vite dei filosofi,* Editori Laterza 1976.

DOXOGRAPHIE

H. DIELS, *Doxographi Graeci,* Berolini 1879.

EUDOXOS

*Die Fragmente des Eudoxos von Knidos*, herausg., übers. u. kommentiert von F. LASSERRE, Berlin 1966.

EUKLID (EUCLIDES)

(1) *Euclidis Elementa,* vol. I-V. ed. J.L. HEIBERG, Lipsiae 1883-85.

(2) C. THAER, *Die Elemente von Euklid,* I-V. Leipzig 1933-37.

(3) *The Thirteen Books of Euclid's Elements,* translated from the text of HEIBERG, with introduction and commentary by T.L. HEATH, I-II-III (Dover Publication, 1956).

(4) *Gli Elementi di Euclide* a cura di A. FRAJESE - L. MACCIONI, Torino 1970.


ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



EUTOCIUS

in: J.L. HEIBERG, *Archimedis Opera omnia cum commentariis Eutocii,* vol. III. 1-319, Lipsiae 1915.

HERODOT

*Herodoti Historiarum libri novem,* ed. H.R. DIETSCH - H. KALLENBERG, Lipsiae 1906.

HERON

*Heronis Metrica,* ed. H. SCHÖNE, Leipzig 1903.

HESIODOS

*Hesiodi Carminum reliquiae,* ed. G.F. SCHOEMANN, Berlin 1869.

HIPPARCHOS

*Hipparchi in Arati et Eudoxi Phaenomena commentariorum libri tres,* rec., germanica interpretatione et commentariis instruxit G. MANITIUS, Lipsiae 1894.

HYPSIKLES

(1) K. MANITIUS, *Des Hypsikles Schrift Anaphorikos,* Dresden 1888.

(2) *Hypsikles, Die Aufgangszeiten der Gestirne,* herausg. u. übers. von F. DE FALCO u. M. KRAUSE, mit einer Einführung von O. NEUGEBAUER, Abhandlungen der Akad. d. Wiss. in Göttingen. Phil.-Hist. Kl., Göttingen 1966.

KLEOMEDES

*Cleomedis De motu circulari corporum caelestium,* ed. H. ZIEGLER, Lipsiae 1891.

PAPPOS

*Pappi, Collectio mathematica,* ed. F. HULTSCH, Berlin 1876-78.

PLINIUS

*C. Plinii Secundi Naturalis historiae libri XXXVII,* L. IAN - C. MAYHOFF, vol. I-V, Lipsiae 1870-1897.

PLUTARCHOS

*Plutarchi Chaeronensis quae supersunt omnia,* I-XII., ed. J.G. HUTTEN, Tübingen 1791.

POLYBIOS

*Polybii Historiae,* vol. I-V., ed. L. DINDORF - TH. BUTTNER-WOBST, Lipsiae 1904.

PTOLEMAIOS

(1) *Claudii Ptolemaei, Syntaxis mathematica* I-II., ed. J.L. HEIBERG, Lipsiae 1898-1903.

(2) *Des Claudius Ptolemäus Handbuch der Astronomie.* Aus dem griechischen übersetzt und mit erklärenden Anmerkungen versehen von K. MANITIUS, I-II, Leipzig 1912-13.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



PROKLOS

(1) *Proclus Diadochus, In Euclidis Elementorum librum primum Commentaria*, ed. G. FRIEDLEIN, Lipsiae 1873.

(2) *Proklus Diadochus, Kommentar,* übers. von P.L. SCHÖNBERGER, herausg. von M. STECK, Halle (Saale) 1945.

STRABON

*Strabon, Geographica,* vol. I-III. ed. A. MEINEKE (editio stereotypa), Lipsiae 1909.

THEON ALEXANDRINUS

(1) N. HALMA, *Commentaire sur la composition mathématique de Ptolemée et sur le livre III de l'Almageste,* traduite en français, I-III, Paris 1821-1823.

(2) A. ROME, *Commentaires de Pappus et de Theon d'Alexandrie sur l'Almageste,* Città del Vaticano 1936.

THEON SMYRNAEUS

*Theonis Smyrnaei, Expositio rerum mathematicarum ad legendum Platonem,* rec. E. HILLER, Lipsiae 1878.

VITRUVIUS

J. SOUBIRAN, *Vitruve, De l'architecture,* Paris 1969.

VORSOKRATIKER

H. DIELS - W. KRANZ, *Fragmente der Vorsokratiker* I-III, Berlin 1956[8].

## VERFASSER UND WERKE
(benutzt, zitiert oder erwähnt)

ARDAILLON E.

Artikel «Horologium» in: CH. DAREMBERG - E. SAGLIO, *Dictionnaire des Antiquités Grecques et Romaines,* tom. III.

BECKER O.

*Das mathematische Denken der Antike,* Göttingen 1957.

BERGER H.

*Geschichte der wissenschaftlichen Erdkunde der Griechen,* Berlin 1887-1893, Leipzig 1903[2].

BJÖRNBO, A.A.

*Studien über Menelaos' Sphärik,* in: «Abhandlungen zur Gesch. d. math. Wiss.» 14, 1902.

– Artikel «Hippias» in: *Realenzyklopädie der Classischen Altertumswiss. (RE),* VIII/1913.

BOYER, C.B.

*History of Mathematics,* New York, London, Sydney 1968.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



CANTOR M.
*Vorlesungen über Geschichte der Mathematik,* 1907³.
COHEN, M.R. - DRABKIN I.E.
*A Source Book in Greek Science, Cambridge/Mass.* 1958.
DELAMBRE, J.B.J.
*Histoire de l'astronomie ancienne,* 1817.
DICKS, D.R.
*The Geographical Fragments of Hipparchus,* 1960.
– Artikel in: *Journal of Hellenic Studies* (JHS) 86, 1966.
– *Early Greek Astronomy to Aristotle,* 1970.
DIELS H.
*Antike Technik,* 1924³.
DUDEN
*Der große Duden,* Band 1. Rechtschreibung, 16. Aufl., Mannheim 1967.
FRITZ, K.v.
Artikel «Oinopides» in: *RE* 34. Halbband, 1937.
FULLARD H. - DARBY, H.C.
*The University Atlas,* London 1958⁸.
GISINGER F.
Artikel «Pytheas von Massalia» in: *RE* 47. *Halbband,* 1963.
GRENFELL, B.P. - HUNT, A.S.
*The Hibeh Papyri* I, London 1906.
HEATH T.
*A History of Greek Mathematics,* I-II. Oxford 1921.
HEIBERG, J.L.
*Literaturgeschichtliche Studien über Euklid,* Leipzig, 1882.
HILLER VON GÄRTRINGEN
*Inscr. Graecae insul. Aegaei,* 1895 ff.
HONIGMANN E.
*Die sieben Klimata,* 1929.
HOYLE F.
*L'astronomia. Il cammino della scienza,* Sansoni Editore, 1962.
JOURDAIN, PH. E.B.
«The nature of mathematics», in: NEWMAN, J.R. *The World of Mathematics,* vol. I., New York 1956.
LORIA G.
*Histoire des Sciences Mathématiques dans l'Antiquité Hellénique,* Paris 1929.
MAAS E.
*Aratea. Philologische Untersuchungen* XII, Berlin 1892.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



MAULA, E.
*Studies in Eudoxus' Homocentric Spheres,* «Comm. Humanarum Litterarum» 50, Helsinki 1974, 124 S.
- *The Spider in the Sphere. Eudoxus' Arachne,* in «Philosophia» Athens 5-6 (1975-76), 225-258.
- *From Time to Place: the Paradigm Case,* in: «Organon» 15, 93-120.

NEUGEBAUER O.
*Vorlesungen über Geschichte der antiken math. Wiss.,* I. Bd., Berlin 1934.
- *The Exact Sciences in Antiquity,* 2nd edition, Providence, Rhode Island 1957.
- *On some Aspects of Early Greek Astronomy,* in: «Proceedings of the American Philosophical Society» 116 no./3 June 1972.

NILSSON, M.P.
*Die Entstehung und die religiöse Bedeutung des griechischen Kalenders,* $1962^2$.

REHM A.
Artikel «Horologium» in: *RE* VIII 1913.
- Artikel «Kykloi» in: *RE* V 1922.

SCHNEIDER I.
*Archimedes,* Darmstadt 1979.

SZABÓ A.
*Anfänge der griechischen Mathematik,* München-Wien 1969, 494 S. (= *Ἀπαρχαὶ τῶν ἑλληνικῶν Μαθηματικῶν,* Ἀθῆναι, ἔκδ. Τεχν. Ἐπιμελητηρίου Ἑλλάδος 1973, 502 S.).
- *Die Muse der Pythagoreer,* in: «Historia Mathematica» I, 1974.

TANNERY P.
*Recherches sur l'histoire de l'astronomie ancienne,* Paris 1893.
- *Mémoires Scientifiques II,* ed. J.L. HEIBERG - H.G. ZEUTHEN

TOOMER, G.J.
*The Chord Table of Hipparchus and the Early History of Greek Trigonometry,* in: «Centaurus», 18, 1973.

TROPFKE J.
*Archimedes und die Trigonometrie,* in: «Archiv f. Gesch. d. Math. d. Naturwiss.u.Technik» 10, 1928.

WAERDEN, B.L.V.D.
*Erwachende Wissenschaft,* Basel-Stuttgart 1956.
- *Anfänge der Astronomie,* Groningen o.J.

WEIDNER, E.F.
*Handbuch der babylonischen Astronomie,* Leipzig 1915.
- Artikel in «Amer.Journ.Sém.Lang.& Lit.» 40, 1924.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΚΑΔΗΜΙΑ
ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens

# INDICES

## *Antike Personen- und Ortsnamen*


Ägypten 33, 65, 79 et passim
Aëtios 19, 113, 121
Äthiopien 91, 105, 129, 167, 178
Alexander der Große 174
Alexandria 18-20, 46f., 64-67 et passim
Anaximandros 8, 17, 33ff., 40ff., 56 et passim, 118-122, 178f.
Anaximenes 17, 45, 118ff.
Antigonos Gonatas 18, 21
Antiochos Soter 18, 105
Antoninus 69
Apollonios von Perge 18-21, 212-215
Aratos 6, 18, 21f., 25f., 89, 99 et passim, 182-187 et passim
Aratus latinus (Comm. in Ar. rell.) 208
Archimedes 18, 20, 28, 175, 203, 206, 213ff., 240
Aristophanes 69, 240
Aristarchos 18, 28, 42, 68, 88, 110, 118, 129f., 201ff., 207f., 212
Aristoteles 17, 42, 64f., 106, 117, 119, 121, 171-174
Aristyllos 204-208
Arkesilaos 18, 173f.
Athen 6, 17, 24, 46f., 64, 81, 116
Attalos 18, 29, 156, 242
Augustus 19, 39, 41, 45
Autolykos von Pitane 6, 18, 171-175, 199

Babylon, -ier 33-35, 43, 63, 90, 123, 166, 189, 195-197
Borneo 35
Borysthenes 102, 112
Byzantion 99, 106-112

Caesar, s. Julius
Campus Martius 39
Candragupta 18, 105
Canopus 65f., 200

Deimachos 18, 104f.
Derkyllides 19, 119
Dikaiarchos 106
Diogenes Laërtios 19, 34f., 39f., 99ff., 119, 173f., 190, 207
Dionysios 39

Epikuros 21
Eratosthenes 9, 18, 69f., 64ff et passim, 105, 118, 130 et passim
Eudemos 17, 119, 121
Eudoxos 6, 8, 12, 15, 17, 21f., 26, 29 et passim, 170ff., 182-187 et passim
Euklid 9, 18, 20, 28, 53, 60 et passim, 118, 124-129, 189-195, 227, 234-239
Eumaios 38
Eusebios 20, 34f., 40, 44
Eutokios 20, 213, 240

Facundus Novus 40f.

Geminus 19, 165, 168, 219

Hadrianus 19, 34
Hellespont 23, 26, 97, 110, 112, 224
Herodotos 17, 33ff., 118, 178, 190, 197, 200
Heron 19, 176, 210f., 216


ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Hesiodos 17, 42
Hibeh 162
Hipparchos von Nikaia 6-9, 12, 18, 21-28, 79ff, 98ff, 118 et passim, 131 et passim, 210-216, et passim
Hippias von Elis 11, 17, 240f.
Hippokrates von Chios 17, 211. 227f., 240
Hypatia 20, 222
Hypsikles 18, 139, 158-164, 167ff., 183ff., 198, 201, 206f.

Julius Caesar 19, 45

Kilikien 91, 167
Kleomedes 19, 65-68, 103, 200
Kyrene 163
Kyzikos 173

Laistrygonen 165
Leon 227
Lucretius 21

Massalia 10, 99, 106f., 110-114 et passim
Megasthenes 18, 104f.
Menelaos 19, 177, 210, 216, 222, 226-228
Meroë 91, 100, 102, 105f., 112

Neapel 98

Oinopides von Chios 9, 17, 118-125, 178-187, 195, 206, 233, 238
Ortygie 38

Pherekydes von Syros 39
Philippos 18, 29f.
Philon 18, 105f., 118, 129, 167, 178
Phönizien 112
Placentia/Piacenza 46
Platon 8, 17, 22, 119, 191
Plinius 19, 39f., 44f., 62, 81 et passim, 118, 221f.
Plutarchos 39, 62, 216
Polybios 39
Pontus 107, 111f.
Poseidonios 19, 65f., 200f., 208, 219
Proklos 9, 20, 53, 61, 120, 124f., 129, 181, 190-194, 227f., 238f.
Ptolemaios (Herrscher) 18, 105
Ptolemaios Klaudios 7-12, 18-20, 26f., 30, 51, 69ff., 98ff., 118 et passim, 132 et passim, 209-216, 228-242
Pythagoras 17, 39, 73, 80, 84, 121, 171, 239
Pytheas 10, 17, 77, 106ff., 118, 123ff., 129ff., 164-169, 178-187, 193, 223, 228, 242

Rhodos 47, 64ff., 71-75, 83 et passim
Rom 46ff., 64, 98, 116, 199 et passim

Seleukos Nikator 18, 104
Sextus Empiricus 19, 202
Skymnos (Pseudo-) 19, 170
Smyrna 101, 112
Sokrates 17
Sparta 35, 45
Strabon 10, 19, 31, 89ff, 97 et passim, 118 et passim, 131f.
Suda 20, 34, 40-44, 62f.
Sûrya-Siddhânta 217
Syene 66-71, 79, 87, 103f., 130
Syrakus 39
Syrie 38f.

Tarent 47, 64
Thales 17, 38, 61, 72, 119f., 180, 189f., 207
Theben 39
Thendias 227
Theodosios 18f., 174f.
Theon Alexandrinus 20, 86f., 209ff., 216, 222f., 226ff.
Theon Smyrnaeus 20, 119, 121f.
Theophrastos 17, 62, 78
Tiberius 19, 119

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



Timocharis (und Aristyllos) 18, 204-208

Vitruvius 8, 11, 19, 24, 45ff., 99, 118, 119, 121-124, 129-132, 136, 140, 168, 172, 187, 200

Zypern 65

*Moderne Autoren*

Ardaillon E. 33

Becker O. 240
Berger H. 89
Björnbo, A.A. 177, 240
Boyer, C.B. 211f., 215

Cantor M. 216
Cohen, M.R. 103, 113, 119, 165, 168

Delambre, J.B.J. 28
Dicks, D.R. 42f., 88, 114, 159, 169f., 204f.
Diels H. 19, 34, 42, 45, 62, 121
Drabkin, I.E. 103, 113, 119, 165, 168
Duden 23

Falco F. 158f., 196
Fritz, K.v. 17, 120f.
Frank E. 191

Georges, K.E. 50
Gigante M. 19
Gisinger F. 106, 114
Grenfell, B.P. 162

Heath. T.L. 28, 42, 87, 110, 159, 176, 190, 200-203, 206, 211ff., 216
Heiberg, J.L. 11, 18, 26, 140, 145, 175, 205, 228, 231, 239f.
Honigmann E. 170
Hoyle F. 34f.
Hultsch F. 87, 171-175, 199
Hunt, A.S. 162
Hutten, J.G. 39

Jourdain, Ph.E.B. 28

Krause M. 158f., 196

Lasserre F. 30, 170, 172, 183
Longo O. 65
Loria G. 19

Maas E. 30
Manitius K. 11, 21-27, 29, 41f., 89f., 99, 113, 136, 140, 142, 144f., 153, 158, 202ff., 208f., 215, 217, 225, 229, 231, 241
Maula E. 5, 12, 15
Mercati, Mgr. 210

Neugebauer O. 25, 42, 158, 162, 166, 177, 189, 196, 218-222
Newman, J.R. 28
Nilsson, M.P. 42

Rehm A. 33f., 115f., 158, 196, 202, 207f.
Rome A. 209f., 217

Schneider I. 215
Schönberger, P.L. 53, 61, 124, 181
Schöne H. 210
Soubiran J. 45, 60, 81
Szabó Á. 5-13, 69, 84, 87, 89, 110f., 122, 129, 181, 234, 238

Tannery P. 159, 164, 175f., 195, 202, 207, 212-218
Toomer, G.J. 177, 218ff.
Tropfke J. 215, 222

Waerden, B.L.v.d. 42, 63, 123, 159, 174, 195
Weidner, E.F. 42, 196

Ziegler H. 65, 67, 103, 200

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



## *Wortindex*


ἀμαθὴς 105
ἀμφίσκιοι 104
*Ἀναφορικὸς* 158f.
ἀνθυφαίρειν 85
ἀνταιρεῖν 91
ἀράχνη 12, 15

γεωμετρίας ὑποτύπωσις 63
γνώμων 8-10, 22, 26-28 et passim
γωνία 190, 199

δάκτυλος 202, 206
δίμοιρον ὀρθῆς 192
διπλάσιον διάστημα 84
δύο ὀρθαὶ 192
δωδεκατημόριον (δωδέκατον) 199-202

ἔγκλιμα 6, 15, 23, 135, 242
ἐκλειπτικὴ 9f., 58-64, 70-75
ἔξαρμα πόλου 8f., 24
ἐπίτριτον διάστημα 84
ἑτερόσκιοι 104

ζώδιον (ζωδιακός) 58, 159, 169, 199-208

ἡλιοτρόπιον 38ff.
ἡμιόλιον διάστημα 84
ἥμισυ ὀρθῆς 192
ἡμισφαίριον 88, 129

θερινὸς τροπικὸς (κύκλος) 25, 137

ἰδιώματα 92
ἰσημερινὸς κύκλος 24, 56, 77, 179

κάθετοι 72-74, 80, 82, 117, 128, 145, 180f., 189f., 230, 234
κλῖμα (κλίσις) 6-9, 23f., 89-91, 123, 135, 160, 166, 170-173, 182, 186, 224
κόλουρος 58, 124, 141, 206
κύκλος (κύκλοι τροπικοί, ἰσημερινοί) 11, 179

λόξωσις 9, 58, 181

μοῖρα 24f., 159, 201, 207

οἰκουμένη 164
ὀρθὴ (πρὸς ὀρθὰς) 48f., 192
ὁρίζων 11f., 24-26, 50f., 56

παράδοξον θεώρημα 191
περίσκιοι 104
περιφέρεια 199, 201
πῆχυς 202-206
πραγματεία 209f.

σκάφη 68, 88, 129
συμφωνεῖται 22, 27
*Σφαιρικὰ* 19, 174f., 177

τέσσαρες ὀρθαὶ 192
τεταρτημόριον 203
τρίτον ὀρθῆς 192
τροπαὶ ἡλίου 38, 61
τροπικοὶ κύκλοι 78, 179

ὑποτείνουσα 72-74, 80-84, 109, 128, 145, 180f., 230, 234

*Φαινόμενα* 6, 18-21, 174

χρόνοι καὶ ὧραι (χρόνος ἀόριστος) 35, 42, 158

ὧραι ἰσημεριναὶ (καιρικαί) 25
ὡρολόγιον 8, 33, 39, 68f., 115, 118, 121, 132

Äquator 23f., 44, 46, 56, 58 et passim
aequilatatio 50
Äquinoktium 42, 44, 48, 51f.

declinatio caeli 46f., 86, 132, 172


ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens



geographische Breite/Länge 23f.. 26-29 et passim

linea in planitia 48-50, 54

Meridian 51f., 57, 112, 123, 126f., 130f. et passim

norma (ad normam) 48f.

Odyssee 38f., 165

Polarstern 24
Polhöhe 23-26, 69f., et passim

Quadrant 94, 202, 208

signum 56, 199f.
Schiefe der Ekliptik 9, 58-64, 70-75
sexta hora 46
solis aequinoctialis radius 54-56
solstitium (Sommer-, Winter-Solstitium) 42f., 70, 75f. et passim

Trigonometrie, trigonometrisch 27f., 32, 88, 117, 170, 174, 177, 179, 183, 189, 208, 210-217, 221

umbra aequinoctialis 46, 48f., 51

Wechselwegnahme 84f., 114, 126

Zenitpunkt (Zenit) 36, 65, 92f., 105

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens

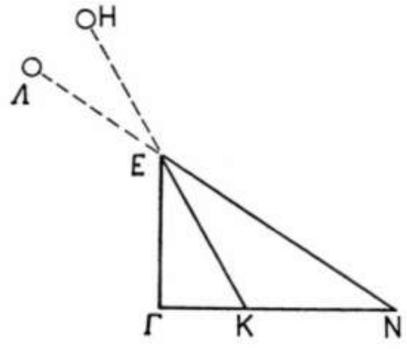



Fig. 1.

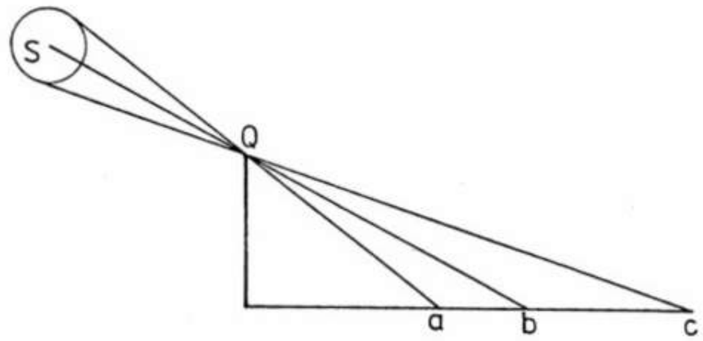



Fig. 2.

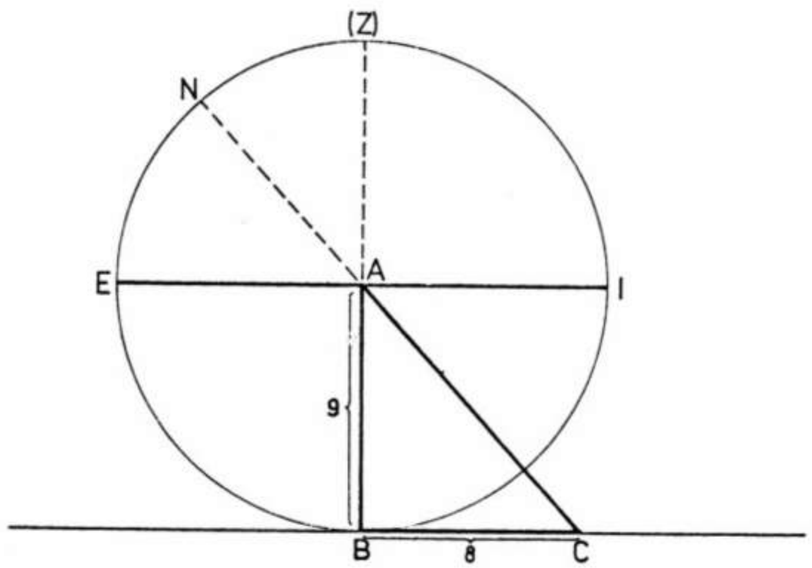



Fig. 3.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΚΑΔΗΜΙΑ
ΑΘΗΝΩΝ

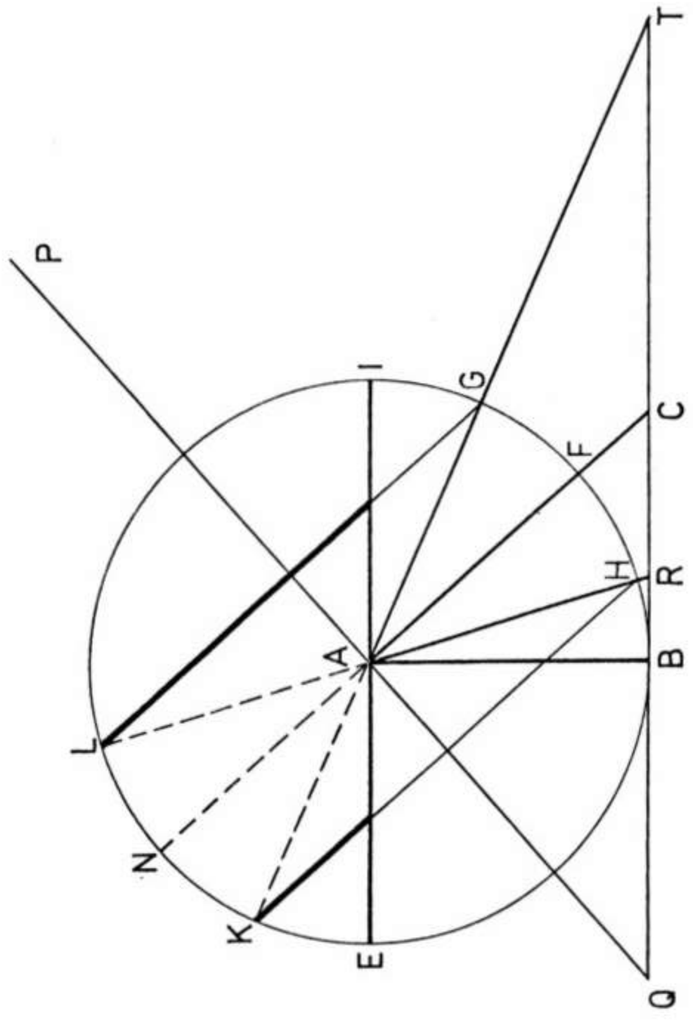
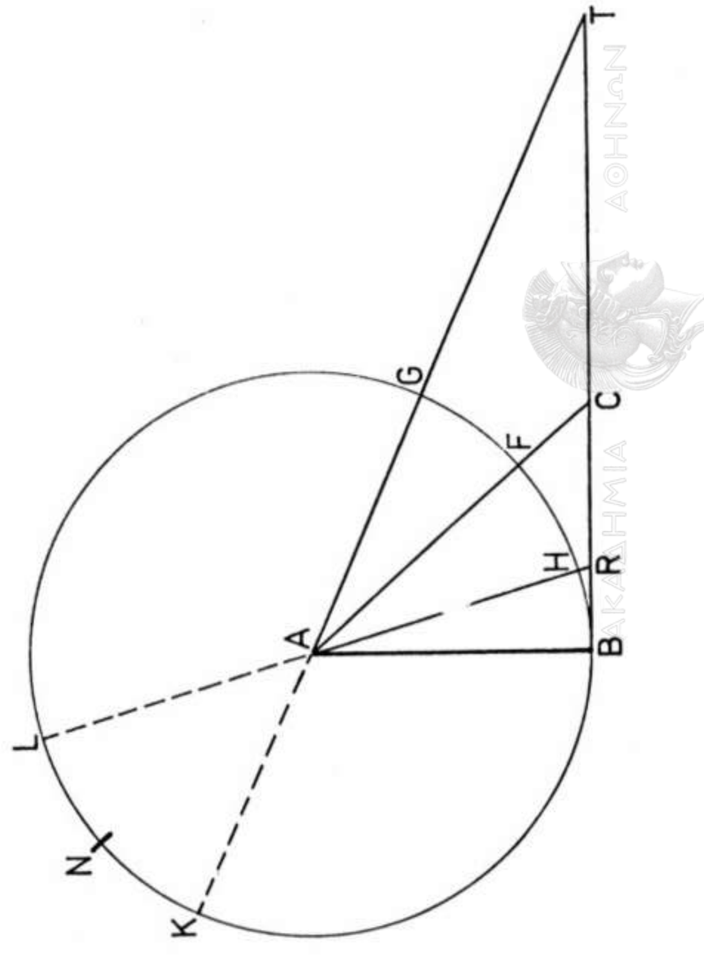



Fig. 4.




ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens

ΑΚΑΔΗΜΙΑ
ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens

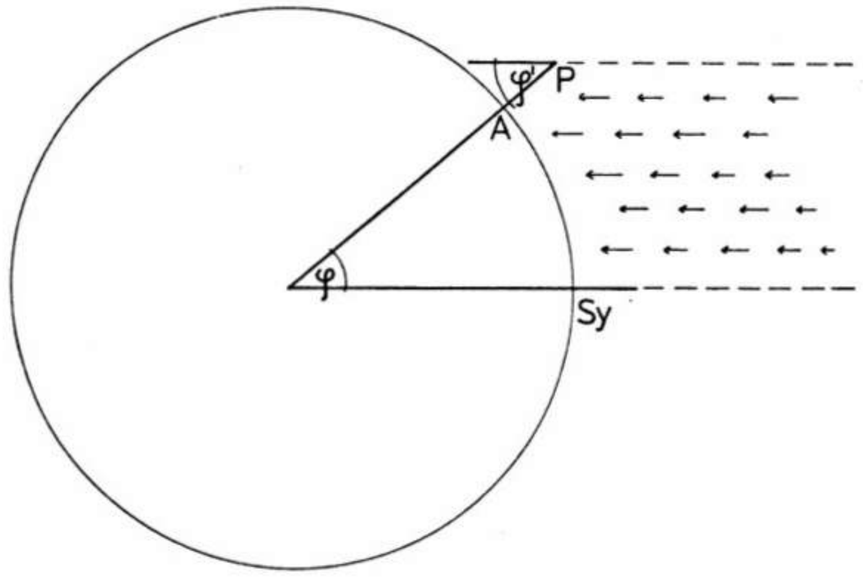
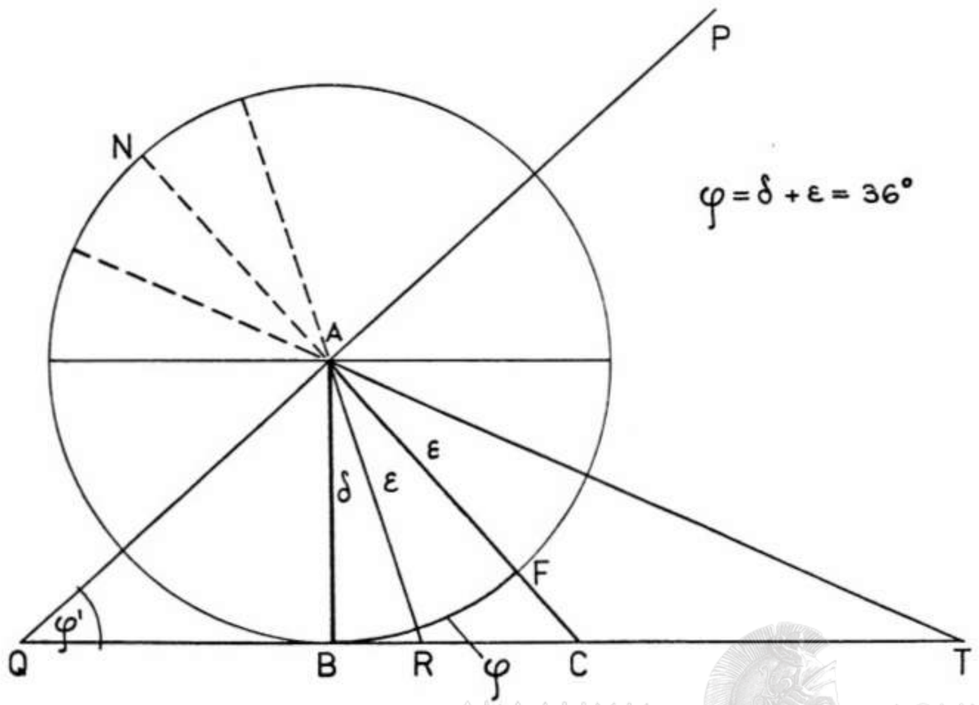



Fig. 6.




ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Fig. 7.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ
ΑΘΗΝΩΝ

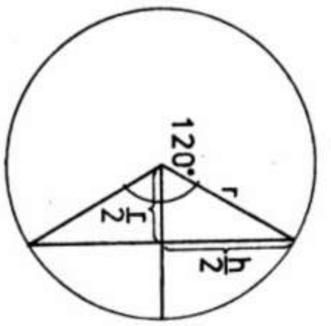



Fig. 8.

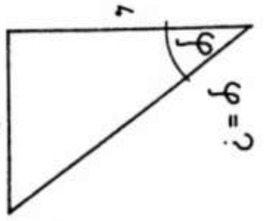



Fig. 9.

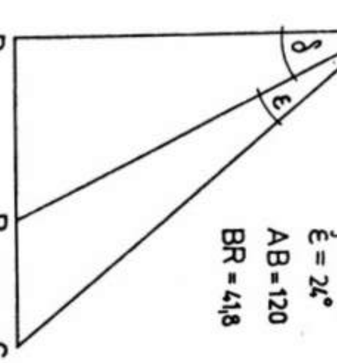
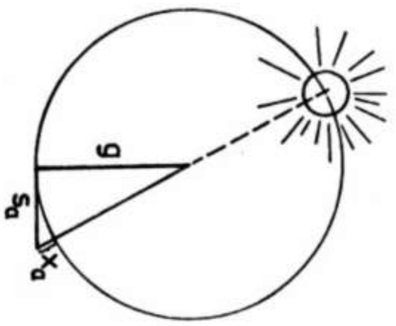
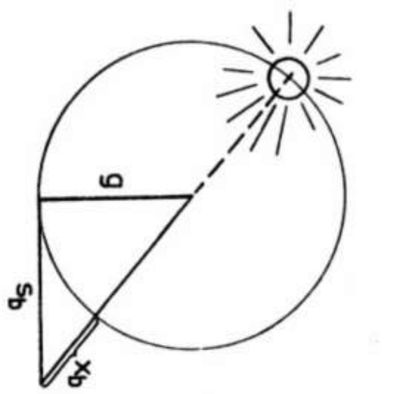



Fig. 10.



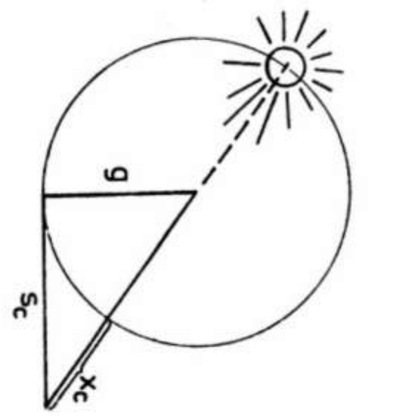




Fig. 11.

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens

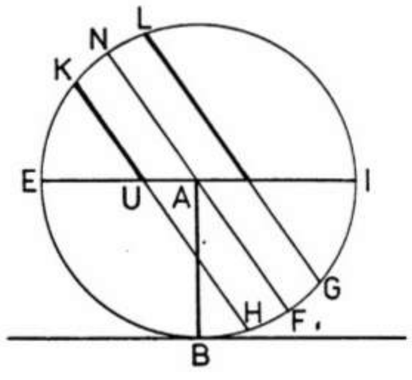



Fig. 12

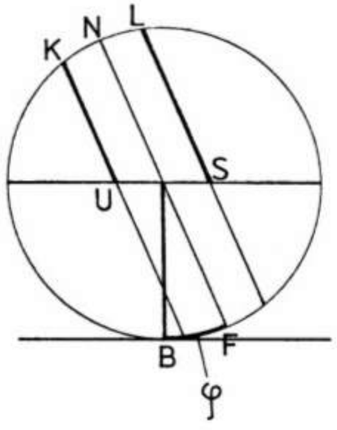



Fig. 13a

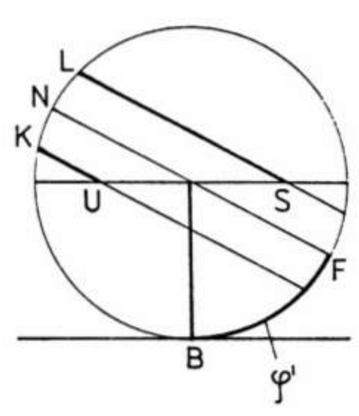



Fig. 13b

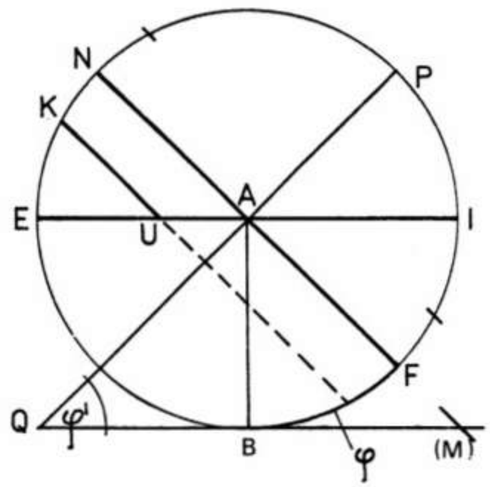



Fig. 14a

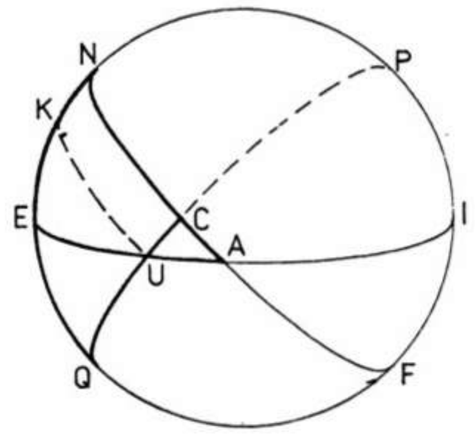



Fig. 14b

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

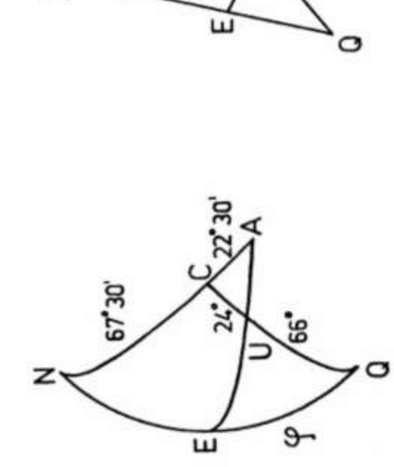



Fig. 15

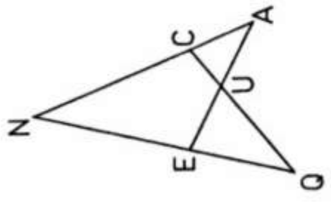



Fig. 16

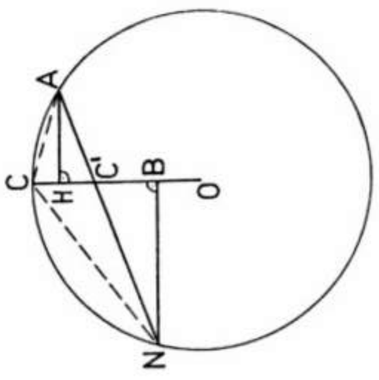



Fig. 17

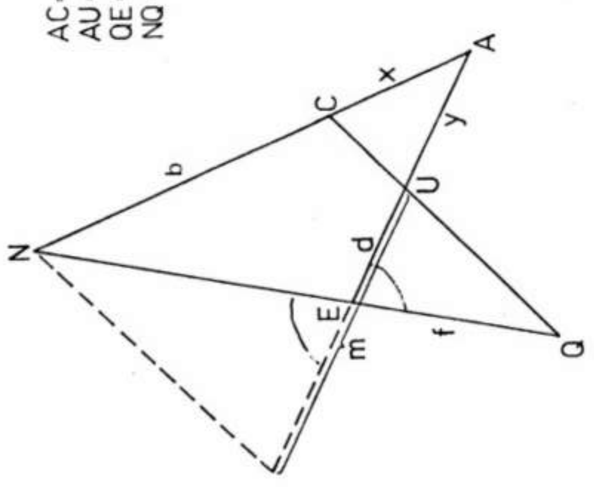



Fig. 19

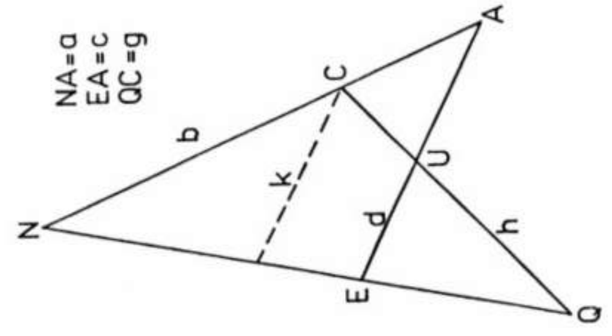



Fig. 18

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

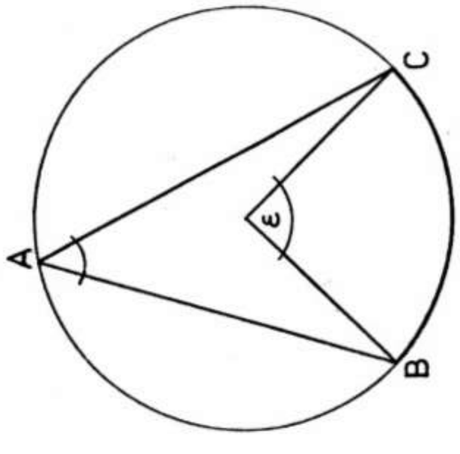



Fig. 20

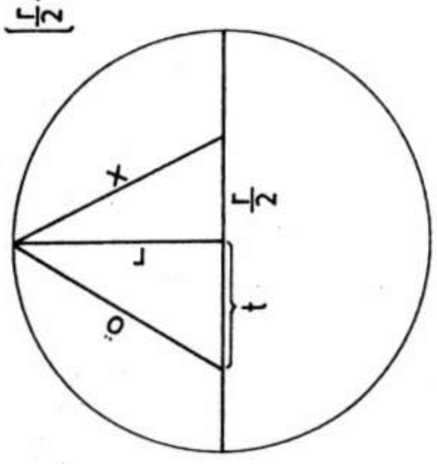



Fig. 21

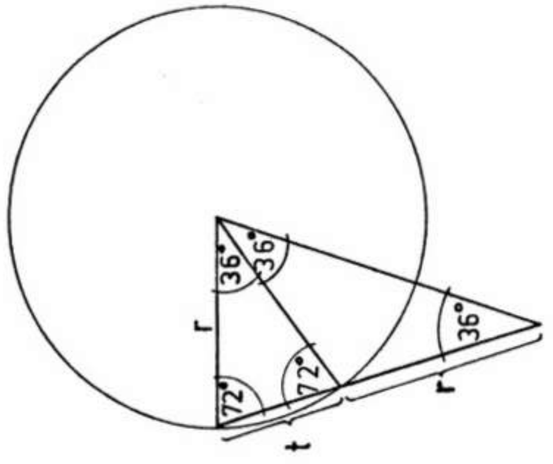



Fig. 22

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ
007000103419

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ

ΑΚΑΔΗΜΙΑ
ΑΘΗΝΩΝ

Ακαδημία Αθηνών / Academy of Athens

ΑΚΑΔΗΜΙΑ ΑΘΗΝΩΝ