ΦΙΛΩΝ Μ. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ, τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν

ΦΙΛΟΣΟΦΙΚΗ ΘΕΩΡΗΣΗ ΤΗΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗΣ ΕΠΙΣΤΗΜΗΣ ΩΣ ΑΠΟΔΕΙΚΤΙΚΗΣ

1. Ἡ θεωρία τῆς ἐπιστήμης, ὅπως διαμορφώθηκε στὴν ἑλλαδικὴ ἀρχαιότητα, ἔλαβε τὴ συστηματοποίησή της στὸ ἔργο τοῦ Ἀριστοτέλους (384-322). Ξεκινώντας ἀπὸ τὰ ἐπιτεύγματα τῶν προγενεστέρων φιλοσόφων καὶ κυρίως ἀπὸ τὸν διδάσκαλό του τὸν Πλάτωνα (427-347), ὁ Ἀριστοτέλης ἐπέτυχε νὰ δώση στὴ θεωρία αὐτὴ τὸν βαθμὸν ἐκεῖνον τελειότητας, ποὺ τῆς ἐπέτρεψε νὰ κατευθύνη γιὰ δύο ὁλόκληρες χιλιετίες τὴν ἐπιστημονικὴ σκέψη — ἀκόμη καὶ νὰ δεσπόση σ' αὐτήν.

Ὅπως εἶναι γνωστόν, ὁ Πλάτων καταλέγεται στοὺς ἱδρυτὲς τῆς καθαρῆς ἐπιστήμης. Ὡστόσο εἶναι ἀμφισβητήσιμο, ἂν καὶ τὸ κέντρον βάρους τῆς πλατωνικῆς διδασκαλίας ἠμπορεῖ νὰ βρεθῆ στὴ θεωρία τῆς ἐπιστήμης· μέσα, ἄλλωστε, στὸν τόσο πλοῦτο τῆς πλατωνικῆς σκέψης εἶναι πραγματικὰ δύσκολο ν' ἀποφανθῆ κανείς, ποῦ βρίσκεται ἡ κατευθυντήρια γραμμὴ τῆς διδασκαλίας του. Ἡ συμβολὴ τοῦ Πλάτωνος στὴ θεωρία τῆς ἐπιστήμης πρέπει ν' ἀναζητηθῆ μέσα στοὺς διαλόγους του. Μάλιστα, πρώτη φορὰ γιὰ τὴν ἑλληνικὴ σκέψη, συναντᾶ κανεὶς στὸν πλατωνικὸ διάλογο *Θεαίτητος* τὸ ἐρώτημα τί εἶναι ἐπιστήμη; Τὸ ἐρώτημα αὐτὸ τὸ ἀπευθύνει ἐδῶ ὁ Πλάτων, μέσα ἀπὸ τὸ στόμα τοῦ Σωκράτη (470;-399), σ' ἕναν ἀπὸ τοὺς μαθητές του, τὸν Θεαίτητο (περὶ τὸ 410 π.Χ.), εἰδικὸ θὰ λέγαμε γιὰ τὸ συζητούμενο θέμα. Θεαίτητος καὶ Εὔδοξος (408;-355;) ἦταν οἱ κορυφαῖοι μαθηματικοὶ τῆς πλατωνικῆς Ἀκαδημίας, οἱ κατ' ἐξοχὴν προσφιλεῖς μαθητὲς τοῦ Πλάτωνος· καὶ τὰ Μαθηματικὰ εἶχε πιθανὸν κατὰ νοῦν ὁ Πλάτων, ὅταν ἔθετε στὸν Θεαίτητο τὸ ἐρώτημα ἐκεῖνο. Γιατὶ τὰ Μαθηματικὰ ἦταν τότε ἡ ἀ π ο δ ε ι κ τ ι κ ὴ ἐπιστήμη, ἀλλιῶς ἡ π α ρ α γ ω γ ι κ ή, ποὺ βρισκόταν στὸ πιὸ ὑψηλὸ ἐπίπεδο ἀνάπτυξής της. Γιὰ τὸν Πλάτωνα, οἱ γεωμετρικὲς καὶ οἱ ἀριθμητικὲς ἰδιότητες βεβαιώνονταν ὡς ἀναγκαῖες, χωρὶς τὴν προσφυγὴ στὴν ἐμπειρία· ἦταν ἁπλῶς ἀτελεῖς πραγματοποιήσεις τῶν αἰωνίων ὄντων, τῶν ἰ δ ε ῶ ν—φυσικὰ ὅσων ἀναφέρονται στὰ Μαθηματικά.

Ἀντίθετα, ὁ Ἀριστοτέλης ἐπρέσβευε, ὅτι ἰ δ έ α (ε ἶ δ ο ς) καὶ π ρ ᾶ γ μ α ἀποτελοῦν κάτι τὸ ἑνιαῖο, ποὺ μόνο ἡ νόηση ἠμπορεῖ νὰ διακρίνη.

Σύμφωνα καὶ μὲ τὸν 'Αριστοτέλη τὰ Μαθηματικὰ ἐρευνοῦν ἕνα κόσμο ἀπὸ ὑπαρκτὲς ὀντότητες. Τόσο οἱ μαθηματικὲς προτάσεις, ὅσο καὶ οἱ λογικὲς συνέπειές τους, εἶναι προτάσεις ἀληθεῖς, καὶ ἡ ἀλήθειά τους πηγάζει ἀπὸ ἐ π α γ ω γ ὴ ποὺ πραγματοποιεῖ ὁ νοῦς ἀναχωρώντας ἀπὸ τὶς αἰσθητηριακὲς ἐντυπώσεις. Τὶς καθόλου γνώσεις τὶς διακρίνει ὁ 'Αριστοτέλης σὲ ἐ π ι σ τ η μ ο ν ι κ ὲ ς καὶ σὲ ἐ μ π ε ι ρ ι κ έ ς. Οἱ δεύτερες ἀναφέρονται στὰ συμβαίνοντα καὶ ἀπαντοῦν στὸ πῶς ἔχουν αὐτά, ἐνῶ οἱ πρῶτες ἐρευνοῦν τὸν λόγον γι' αὐτό[1].

῞Υστερα ἀπὸ τὴ διαμόρφωση τῆς θεωρίας τοῦ δ ι α λ ο γ ι σ μ ο ῦ, ὅπως αὐτὴ ἐκτίθεται στὰ *'Αναλυτικὰ πρότερα*, —καὶ ποὺ ἀποτελοῦν τὸ ἰσχυρὸ ὄργανο γιὰ τὴν ἐπιστημονικὴ σκέψη— ὁ 'Αριστοτέλης μὲ τὰ *'Αναλυτικὰ ὕστερα* στράφηκε στὴν ἔρευνα τῆς ἐπιστημονικῆς θεωρίας. Γιὰ τὴ μεγάλη σπουδαιότητα ποὺ πρέπει ν' ἀποδοθῆ στὰ δύο αὐτὰ ἔργα, χαρακτηριστικὴ εἶναι ἡ φράση τοῦ φιλοσόφου J. Locke (1632-1704) : «῾Ο Θεὸς δὲν ἦταν τόσο φειδωλὸς δημιουργώντας τὸν ἄνθρωπο δίποδο πλάσμα —ἀφήνοντας στὸν 'Αριστοτέλη νὰ τὸν κάνη λογικό»[2].

῾Η θεωρία τῆς ἐπιστήμης, μὲ τὴν πάροδο τοῦ χρόνου, ἔχει ἐμφανίσει διάφορες ἀποκλίσεις σχετικὰ μ' ἐκείνη τοῦ 'Αριστοτέλους χωρίς, στὴν οὐσία, οἱ ἀποκλίσεις αὐτὲς νὰ καταλήξουν σὲ μιὰ γενικὰ παραδεκτὴ θέση. Μαζὶ μὲ τὸν θ ε ω ρ η τ ι κ ὸ κλάδο τῆς ἐπιστήμης, ποὺ ὅπως θὰ ἰδοῦμε παραμένει στὴ βάση ἀριστοτελικός, ἀναπτύχθηκε κι ὁ ἐ μ π ε ι ρ ι κ ὸ ς κλάδος, ποὺ ἀναχωρεῖ ἀπὸ δεδομένα τῆς ἐμπειρίας χωρὶς ν' ἀκολουθῆ ἀναγκαστικὰ τὴν ἀ π ο δ ε ι κ τ ι κ ὴ μέθοδο.

῾Η σύγχρονη ἔρευνα ἔδωκε μιὰ πιὸ ἀποφασιστικὴ στροφὴ στὸ θεωρητικὸ κλάδο. 'Αλλὰ κι ὁ ἐμπειρικὸς κλάδος ἐπῆρε, μὲ τὴν ἐπιστημονικὴ πρόοδο, μιὰ διάφορη μορφή, ἰδιαίτερα μὲ τὴν ἀνάπτυξη τῆς Φυσικῆς. ῾Η διάκριση ποὺ ὑπῆρχε ἄλλοτε ἀνάμεσα στὸν Π λ α τ ω ν ι σ μ ὸ καὶ στὸν 'Α ρ ι σ τ ο τ ε λ ι σ μ ό, ἀντικαταστάθηκε ἀργότερα, κατὰ κάποιο τρόπο, μὲ τὴν ἀντίθεση ἀνάμεσα στὸν ὀ ρ θ ο λ ο γ ι σ μ ὸ (ρασιοναλισμὸ) καὶ τὸν ἐ μ π ε ι ρ ι σ μ ό, ἀνάλογα μὲ τὴ διαίρεση τῶν ὄντων σὲ ν ο η τ ὰ καὶ α ἰ σ θ η τ ά. ῾Η θεωρία τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης, στὴν ὁποία περιοριζόμαστε στὴν παροῦσα μελέτη, δὲν ἔτυχε μικρότερης προσοχῆς, ὕστερα ἀπὸ τὶς σύγχρονες ἔρευνες στὴ Λ ο γ ι κ ὴ καὶ Θ ε μ ε λ ί ω σ η τ ῶ ν Μ α θ η μ α τ ι κ ῶ ν. Οἱ διάφορες Σχολὲς ποὺ δημιουργήθηκαν ὡς σήμερα στὰ Μαθηματικά, παρὰ τὴν προσπάθειά τους νὰ μείνουν πιστὲς στὸ ἀρι-

1. *'Επιστήμη λόγος ἐστί, ...οὐ τοῦ συμβεβηκότος*, 'Αριστοτέλης, *Πρώτη φιλοσοφία* 1077 b 28 καὶ 1077 b 35.

2. E. Nagel, *The Structure of Science*, London (Routledge and Kegan Paul) 1975[4], σελ. 1.

στοτελικὸ π ρ ό τ υ π ο, ὅμως βρέθηκαν μὲ τὸν καιρὸ ἀναγκασμένες νὰ ξεφύγουν ἀπ' αὐτό.

Σκοπός μας ἐδῶ εἶναι νὰ ἐκθέσωμε τόσο τὴν πορεία ὅσο καὶ τὴ σύγχρονη θέση τῆς θεωρίας ποὺ ἐξετάζομε καὶ νὰ ἐρευνήσωμε τὴν ἐπίδραση ποὺ ἄσκησε στὶς μέρες μας ἡ φιλοσοφικὴ θεώρηση στὴν κατάληξη τῆς θεωρίας αὐτῆς.

2. Κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη *πᾶσα διδασκαλία καὶ μάθησις ἐκ προϋπαρχούσης γίνεται γνώσεως*[3]. Ἐπιστημονικὴ γνώση ἔχομε γιὰ κάποιο πρᾶγμα, ὅταν γνωρίζωμε τὸν λόγο, τὴν αἰτία, γιὰ τὸν ὁποῖον αὐτὸ ἀληθεύει καὶ ὅταν δὲν ἠμπορῇ τὸ πρᾶγμα αὐτὸ νὰ εἶναι ἀλλιῶς ἀπ' ὅ,τι εἶναι[4]. Παράδειγμα ἐπιστημονικῆς γνώσης εἶναι οἱ προτάσεις (τὰ θεωρήματα) τῆς Γεωμετρίας· γιατὶ οἱ προτάσεις αὐτές, ὅπως ἐπρέσβευεν ὁ Ἀριστοτέλης, διατυπώνουν κάτι μὲ γενικὴ ἰσχὺ καὶ ἡ γενικότητά τους, καὶ ἀναγκαιότητα, τεκμηριώνεται μὲ τὴν παραγωγή τους ἀπὸ προϋπάρχουσες γνώσεις, τῶν ὁποίων ἡ γενικότητα εἶναι προφανής. Ἡ μετάβαση ἀπὸ ἐπιστημονικὴ σὲ παρόμοια γνώση γίνεται στὴν ἐπιστήμη τῶν Μαθηματικῶν —ποὺ γιὰ τοὺς ἀρχαίους Ἕλληνες περιλαμβάνει τὴ Γεωμετρία καὶ τὴν Ἀριθμητική— ὅπως καὶ σὲ κάθε ἀποδεικτικὴ ἐπιστήμη, μὲ σ υ λ λ ο γ ι σ μ ο ύ ς, ποὺ ὀνομάζομε ἀ π ό δ ε ι ξ η[5]. Ὅμως, οἱ συλλογισμοὶ αὐτοὶ διαφέρουν ἀπὸ ἐκείνους τῆς Λογικῆς κατὰ τοῦτο, ὅτι τώρα δὲν ἐξετάζομε ἁπλῶς τοὺς κανόνες γιὰ τὴ λ ο γ ι κ ὴ σ υ ν ε π α γ ω γ ὴ προτάσεων, ὅπως στὴ Λογική, ἀλλὰ θεωροῦμε, μαζὶ μὲ τὶς σχέσεις ἀνάμεσα σὲ προτάσεις καὶ τὶς σχέσεις ἀνάμεσα σὲ πράγματα.

Ἡ ἀποδεικτικὴ μέθοδος σ υ μ π ε ρ α σ μ ο ῦ τῶν μαθηματικῶν προτάσεων ἦταν, γιὰ τὸν Ἀριστοτέλη, τὸ πρότυπο γιὰ κάθε ἐπιστήμη. Ὁ ἰ δ ε α τ ὸ ς αὐτὸς τρόπος γιὰ τὴ δόμηση μιᾶς ἐπιστήμης βασίζεται στὴν παραδοχή, ὅτι σὲ κάθε ἐπιστήμη π ρ ο ϋ π ά ρ χ ο υ ν ὡρισμένες γνώσεις, τῶν ὁποίων ἡ ἀλήθεια (ἡ ἰσχὺς) εἶναι τόσον προφανής, ὥστε οἱ γνώσεις αὐτὲς οὔτε νὰ χρειάζωνται ἀλλὰ οὔτε καὶ νὰ ἐπιδέχωνται ἀπόδειξη.

Εἶναι φανερόν, ὅτι δὲν εἶναι ἐφικτὴ ἡ περίπτωση τοῦ νὰ ἀποδεικνύωνται ὅλες οἱ προτάσεις μιᾶς ἐπιστήμης· γιατί, τότε, ἡ ἀπόδειξη κάθε πρό-

3. Ἀριστοτέλης, *Ἀναλυτικὰ Ὕστερα* Α 71 a 1-2.

4. *Ἐπίστασθαι δὲ οἰόμεθ' ἕκαστον ἁπλῶς..., ὅταν τήν τ' αἰτίαν οἰώμεθα γινώσκειν δι' ἣν τὸ πρᾶγμά ἐστιν, ὅτι ἐκείνου αἰτία ἐστί, καὶ μὴ ἐνδέχεσθαι τοῦτ' ἄλλως ἔχειν*, *Ἀναλ. Ὕστ.* 71 b 9-12.

5. *Ἀπόδειξιν δὲ λέγω συλλογισμὸν ἐπιστημονικόν· ἐπιστημονικὸν δὲ λέγω καθ' ὃν τῷ ἔχειν αὐτὸν ἐπιστάμεθα. εἰ τοίνυν ἐστὶ τὸ ἐπίστασθαι οἷον ἔθεμεν, ἀνάγκη καὶ τὴν ἀποδεικτικὴν ἐπιστήμην ἐξ ἀληθῶν τ' εἶναι καὶ πρώτων καὶ ἀμέσων καὶ γνωριμωτέρων καὶ προτέρων καὶ αἰτίων τοῦ συμπεράσματος· οὕτω γὰρ ἔσονται καὶ αἱ ἀρχαὶ οἰκεῖαι τοῦ δεικνυμένου*, *Ἀναλ. Ὕστ.* 71 b 17-23.

τασης θὰ ἀνάγεται στὴν ἀπόδειξη ἄλλων, μὲ τρόπο ποὺ ἡ πρόβαση αὐτὴ θὰ ἦταν ἀτελεύτητη, ἐφ' ὅσον δὲν διέπραττε κανεὶς τὸ ἄτοπο νὰ ὑποπέση σὲ φαῦλο κύκλο.

Οἱ προϋπάρχουσες γνώσεις, οἱ ἀρχές, ποὺ οὔτε ἐπιδέχονται οὔτε ἔχουν, ὡς προφανεῖς, ἀνάγκη ἀπόδειξης, διαιροῦνται σὲ δύο κατηγορίες: τὶς κοινὲς ἀρχές, ἀλλιῶς ἀξιώματα, δηλαδὴ τὶς γενικὲς ἀρχὲς γιὰ κάθε ἐπιστήμη, στὶς ὁποῖες περιλαμβάνονται καὶ οἱ νόμοι τῆς Λογικῆς, καὶ τὶς θέσεις, δηλαδὴ τὶς εἰδικὲς ἀρχὲς τὶς ὁποῖες *μὴ ἔστι δεῖξαι μηδ' ἀνάγκη ἔχειν τὸν μαθησόμενόν τι* (*'Αναλ. Ὕστ.* A 72a 15-16). Στὶς θέσεις περιλαμβάνονται οἱ ὑποθέσεις, δηλαδὴ οἱ παραδοχὲς γιὰ *τὸ εἶναί τι ἢ τὸ μὴ εἶναί τι*, μὲ ἄλλες λέξεις οἱ παραδοχὲς γιὰ τὸ ἕνα μέρος τῆς ἐν λόγῳ ἀντίφασης (*'Αναλ. Ὕστ.* A 72 a 18-20), καὶ οἱ ὁρισμοί, δηλαδὴ οἱ ὀνοματικοὶ ὁρισμοὶ ποὺ χρησιμεύουν γιὰ τὴ σημασία τῶν (μὴ ἀρχικῶν) ὅρων.

Τὸ μέρος τοῦ παραπάνω χωρίου τοῦ 'Αριστοτέλους, *τὸ εἶναί τι*, ποὺ συνήθως ἑρμηνεύουν οἱ συγγραφεῖς (W. D. Ross, T. Heath κ.ἄ.) μὲ τὶς λέξεις ὅτι ὑπάρχει τι, πρέπει νὰ συμπληρωθῆ, σύμφωνα μὲ πρόσφατη ἐργασία τοῦ A. Gómez-Lobo (*Aristotle's Hypotheses and the Euclidean Postulates*, στὸ περιοδικὸ «The Review of Metaphysics» 30 (1977) 434-5), ὡς ἑξῆς: τὸ εἶναι (τοδί) τι. Ἄρα, στὸ ὡς ἄνω χωρίον τοῦ 'Αριστοτέλους, τὸ μόριον τι πρέπει νὰ ἐκλαμβάνεται ὡς κατηγόρημα καὶ ὄχι ὡς ὑποκείμενον. Δὲν πρόκειται, λοιπόν, ἐδῶ γιὰ ὑπόθεση ὑπάρξεως, ὅπως πιστεύουν ὣς σήμερα, ἂν βέβαια εὐσταθῆ ἡ νέα αὐτὴ ἐκδοχή.

Πρέπει νὰ σημειωθῆ, ὅτι καὶ γιὰ τοὺς ὅρους ἰσχύει τὸ ἀνάλογο ἐκείνου ποὺ εἴπαμε παραπάνω γιὰ τὶς προτάσεις, ὅτι δηλαδὴ εἶναι ἀνέφικτο νὰ δίνεται ὁρισμὸς γιὰ κάθε ὅρο μιᾶς ἐπιστήμης· γιατί, ὁ ὁρισμὸς κάθε ὅρου ἀνάγεται στοὺς ὁρισμοὺς ἄλλων, σὲ τρόπο ὥστε ἡ πρόβαση θὰ ἦταν πάλιν ἀτελεύτητη, ἂν δὲν ὑποπίπταμε σὲ φαῦλο κύκλο, πρᾶγμα ἄτοπον.

Συνοψίζοντας ἔχομε, ὅτι μιὰ ἀποδεικτικὴ ἐπιστήμη εἶναι, κατὰ τὸν 'Αριστοτέλη, ἕνα σύνολο (σύστημα) ἀπὸ ὅρους, ποὺ ἀντιστοιχοῦν σὲ ὑπαρκτὲς ὀντότητες, ἔτσι ὥστε ἀνάμεσα σ' αὐτοὺς νὰ ὑπάρχουν μερικοὶ ὅροι πεπερασμένοι τὸ πλῆθος, λεγόμενοι ἀρχικοί, ἀπὸ τοὺς ὁποίους νὰ ἠμποροῦν νὰ ὁρισθοῦν ὅλοι οἱ ἄλλοι ὅροι τοῦ συνόλου καὶ ἀπὸ προτάσεις, ἔτσι ὥστε ἀνάμεσα σ' αὐτὲς νὰ ὑπάρχουν μερικὲς ἐπίσης πεπερασμένες τὸ πλῆθος, λεγόμενες ἀξιώματα καὶ θέσεις, τῶν ὁποίων ἡ ἀλήθεια εἶναι προφανὴς σὲ τρόπο, ποὺ ὅλες οἱ ἄλλες προτάσεις νὰ ἠμποροῦν λογικὰ νὰ συναχθοῦν ἀπὸ ἐκεῖνες. Ἔτσι, ὁ ὁρισμὸς κάθε μὴ ἀρχικοῦ ὅρου τοῦ θεωρούμενου συνόλου παρέχεται ἀπὸ τοὺς ἀρχικούς, καὶ ἡ ἀλήθεια κάθε μὴ ἀρχικῆς πρότασης συνάγεται λογικὰ ἀπὸ τὶς ἀρχικές, ποὺ εἶναι ἀξιώματα ἢ θέσεις. 'Αλλὰ καὶ κάθε λογικὸ συμπέρασμα ἀπὸ προτάσεις τοῦ συνόλου εἶναι πρόταση ποὺ ἀνήκει στὸ ὑπ' ὄψη σύνολο. Κατὰ ταῦτα, τὶς ὡς ἄνω παραδοχὲς τὶς διακρίνομε σὲ παραδοχὲς γιὰ τὸ προφανές, τὴν ὕπαρξη, τὴν ἀλήθεια καὶ τὴν παραγωγή.

Ὡς συμπλήρωση, τέλος, τῆς ἀριστοτελικῆς θεωρίας ἀναφορικὰ μὲ τὴ δόμηση μιᾶς ἀποδεικτικῆς ἐπιστήμης, ἀπομένει καὶ ἡ ἀπάντηση στὸ ἐρώτημα: Ποιὰ εἶναι ἡ προέλευση τῶν ἀρχῶν, τὶς ὁποῖες προϋποθέτομε καὶ οἱ ὁποῖες δὲν ἐπιδέχονται ἀπόδειξη; Τὸ ζήτημα αὐτὸ ἀπασχόλησε τὸν Ἀριστοτέλη στὸ δεύτερο βιβλίο τῶν *Ἀναλυτικῶν Ὑστέρων* τὸ ὁποῖον ἀποτελοῦσε πιθανὸν ἕνα χωριστὸ ἔργο.

Ὅπως ἤδη εἴπαμε στὴν πρώτη παράγραφο, τὶς ὑπ' ὄψη ἀρχὲς μᾶς τὶς δίνει κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη ἡ ἐπαγωγή, ποὺ βασίζεται στὶς ἐντυπώσεις μας τῶν αἰσθήσεων. Συγκεκριμένα, λέγει ὁ Ἀριστοτέλης, ὅτι ὅπως συλλαμβάνομε τὶς γενικὲς ἔννοιες, ἔτσι γνωρίζομε καὶ τὶς πρῶτες ἀρχές, δηλαδὴ μὲ τὴν ἐπαγωγὴ μέσω τῆς ἐπαίσθησης[6]. Ἐδῶ ἐπαγωγὴ σημαίνει κι ἕνα εἶδος ψυχολογικῆς προετοιμασίας, ποὺ γίνεται γιὰ τὴ γνώση τῶν ἀρχῶν. Ὥστε πρόκειται μὲ ἄλλες λέξεις γιὰ ὅ,τι σήμερα λέγομε ἐνορατικὴ ἐπαγωγή.

3. Εἶναι πολὺ πιθανόν, ὅτι ὁ Εὐκλείδης (330;-273;) —ὁλόκληρη γενεὰ ἀργότερα καὶ σύμφωνα μὲ τὴ θεωρία τῆς ἐπιστήμης τοῦ Ἀριστοτέλους — συνέγραψε τὰ *Στοιχεῖα* τῆς Γεωμετρίας (καὶ Ἀριθμητικῆς). Ὅπως ξέρομε, τὰ *Στοιχεῖα* αὐτὰ δὲν ἦταν ἡ πρώτη προσπάθεια ποὺ ἔγινε γιὰ τὴ συγκέντρωση καὶ κατάταξη σ' ἕνα συστηματοποιημένο ὅλον τῶν γεωμετρικῶν γνώσεων, ποὺ ἦταν τότε γνωστές. Ὡστόσο, τίποτε δὲν διασώθηκε σὲ μᾶς ἀπὸ τὸ περιεχόμενο ἄλλων ἀναλόγων προσπαθειῶν[7].

Παρὰ τὴ μεγάλη συγγένεια ἀπόψεων ποὺ συναντᾶ κανεὶς ἀνάμεσα στὴν ἀποδεικτικὴ δόμηση τῶν *Στοιχείων* καὶ στὴν ἀντίστοιχη ἀριστοτελικὴ θεωρία, ὑπάρχουν ὅμως καὶ ὡρισμένες διαφορές. Ἔτσι, οἱ κοινὲς ἀρχές, τὰ ἀξιώματα, τοῦ Ἀριστοτέλους ἀνταποκρίνονται μερικῶς μόνο στὶς κοινὲς ἔννοιες τοῦ Εὐκλείδη, κι αὐτὸ γιατὶ οἱ τελευταῖες δὲν ἔχουν τὴ γενικότητα τῶν πρώτων, ἀλλὰ περιορίζονται στὶς κοινὲς ποσοτικὲς ἀρχὲς τῆς Γεωμετρίας καὶ τῆς Ἀριθμητικῆς καὶ δὲν περιλαμβάνουν, ὅπως οἱ πρῶτες, τοὺς νόμους τοῦ διαλογισμοῦ. Πρέπει ἐδῶ νὰ σημειωθῆ, ὅτι τὴν ἐποχὴ ἐκείνη Γεωμετρία καὶ Ἀριθμητικὴ ἦταν δύο τελείως διακεκριμένοι μαθηματικοὶ κλάδοι. Ἐξ ἄλλου, ἀναφορικὰ μὲ τὶς θέσεις τοῦ Ἀριστοτέλους, τὸ μέ-

6. *Ἀναλ. Ὑστ.* B 99b 15-100a 17.

7. Πρὶν ἀπὸ τὸν Εὐκλείδη στοιχεῖα Γεωμετρίας συνέγραψαν ὁ Ἱπποκράτης ἀπὸ τὴ Χίο, στὸ δεύτερο μισὸ τοῦ ε΄ αἰ. π.Χ., καὶ ὁ Λέων, στὸ πρῶτο μισὸ τοῦ δ΄ αἰ. π.Χ. Ἐπίσης ὁ σύγχρονος τοῦ Ἀριστοτέλους Θεύδιος ἀπὸ τὴ Μαγνησία.

ρος αὐτῶν, οἱ ὑποθέσεις, δὲν ἔχει τὸ πλῆρες ἀνάλογό του στὴν ἀξιωματικὴ τοῦ Εὐκλείδη· γιατὶ στὴν τελευταία λείπουν ὁλότελα οἱ παραδοχὲς γιὰ τὴν ὕπαρξη ἀρχικῶν ὅρων. Ἐδῶ ἡ ἀλήθεια προτάσεων διατυπώνεται ὡς δυνατότητα κατασκευῆς. Σ' ἕνα ἄλλο μέρος τῶν θέσεων, στοὺς ὁρισμούς, δὲν γίνεται στὸν Εὐκλείδη διάκριση ἀνάμεσα σὲ ἀρχικοὺς καὶ μὴ ἀρχικοὺς ὅρους, σὲ τρόπο ὥστε νὰ ἐπιχειρῆται στὰ *Στοιχεῖα* ὁρισμὸς (στὴν οὐσία διασάφηση) καὶ ἀρχικῶν ὅρων τῆς Γεωμετρίας.

Σήμερα ἐπικρατεῖ σὲ μερικοὺς ἡ ἄποψη, ὅτι πιθανὸν νὰ ὀφείλεται σὲ διδακτικοὺς λόγους ἡ διασάφηση ἀρχικῶν ὅρων στὰ *Στοιχεῖα*, στὴν ἔλλειψη πραγματικοῦ ὁρισμοῦ, καὶ ὅτι μάλιστα πρόκειται γιὰ μεταγενέστερη προσθήκη ἀπὸ τὸ χέρι κάποιου παιδαγωγοῦ[8]. Ἡ ἀλήθεια εἶναι, ὅτι ὡρισμένα μέρη τῆς ἀξιωματικῆς τῶν *Στοιχείων*, ὅπως εἶναι τὸ μέρος ποὺ ἀφορᾶ στὴ *Θεωρία τῶν λόγων*, —καὶ ποὺ πιθανολογεῖται ὅτι προέρχεται αὐτούσιο ἀπὸ τὸν ἴδιο τὸν δημιουργό της τὸν Εὔδοξο —, εἶναι τόσο σύμφωνο μὲ μιὰ αὐστηρὴ ἀξιωματική, ἀκόμη καὶ μὲ τὶς σύγχρονες ἀντιλήψεις, ὥστε ἄλλα λιγώτερο αὐστηρὰ μέρη τῆς ἀξιωματικῆς τῶν *Στοιχείων* νὰ βρίσκωνται σὲ κάποια παραφωνία μὲ τὴν ὑπ' ὄψη ἀξιωματικοποίηση τῆς θεωρίας τῶν λόγων. Τέλος, ὑπάρχουν στὰ *Στοιχεῖα* καὶ τὰ α ἰ τ ή μ α τ α, ποὺ δὲν ὑπάγονται στὶς ἀριστοτελικὲς ἀρχὲς μιᾶς ἐπιστήμης. Αὐτὸ δὲν σημαίνει, ὅτι δὲν γίνεται καὶ ἀπὸ τὸν Ἀριστοτέλη χρήση τοῦ ὅρου αἴτημα, ἀλλὰ ἡ σημασία του ἐκεῖ εἶναι μερικὰ τελείως διάφορη ἀπὸ ἐκείνη ποὺ ἔχει στὸν Εὐκλείδη. Ἔτσι, αἴτημα γιὰ τὸν Ἀριστοτέλη εἶναι μιὰ πρόταση ποὺ διατυπώνεται ἁπλῶς χωρὶς ἀπόδειξη, ὄχι ἀναγκαστικὰ ἕνα ἀξίωμα ἢ μιὰ θέση. Ἀντίθετα, γιὰ τὸν Εὐκλείδη αἴτημα εἶναι ἢ μιὰ θέση, μὲ τὸ ἀριστοτελικὸ νόημα, ἢ μιὰ παραδοχὴ γιὰ τὴ δυνατότητα μιᾶς ὡρισμένης κατασκευῆς[9].

Εἴπαμε πιὸ πάνω, ὅτι δὲν συναντᾶ κανεὶς στὰ *Στοιχεῖα* ὑποθέσεις γιὰ τὴν ὕπαρξη μαθηματικῶν ὀντοτήτων. Πρέπει νὰ ὁμολογηθῆ, ὅτι ἡ σιωπηλὴ παραδοχὴ τέτοιων ὑπαρξιακῶν παραδοχῶν, εἴτε γίνεται συνειδητὰ εἴτε ὄχι, ἀποτελεῖ ὁπωσδήποτε ἕνα κ ε ν ὸ ν στὴν εὐκλείδεια ἀξιωματική. Γιὰ τὰ κενὰ γενικῶς ποὺ παρουσιάζουν τὰ *Στοιχεῖα* θὰ μιλήσωμε ἀργότερα στὴν ὄγδοη παράγραφο.

---

8. H. Hasse - H. Scholz, *Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik*, Berlin, Pan Verlag 1932 (Ἑλλην. μετάφρ. Ἀθῆναι, Ἐκδ. Ἑλλην. Μαθημ. Ἑταιρία, 1934).

9. Ἔτσι στὴν ἔκδοση Heiberg τὰ τρία πρῶτα αἰτήματα εἶναι παραδοχὲς γιὰ τὴ δυνατότητα ἐκτέλεσης ὡρισμένων ἁπλῶν κατασκευῶν, ἐνῶ τὰ δύο τελευταῖα εἶναι ἐντελῶς ἄλλου εἴδους, ὅπως τὸ αἴτημα ὅτι «ὅλες οἱ ὀρθὲς γωνίες εἶναι ἴσες» καὶ τὸ περίφημο πέμπτο (γιὰ ἄλλους ἑνδέκατο) αἴτημα, τὸ λεγόμενο αἴτημα τῶν παραλλήλων. Βλ. καὶ W. D. Ross, *Ἀριστοτέλους Ἀναλυτικά*, London (Clarendon Press) 1965[3], 58.

4. Τὰ *Στοιχεῖα* τοῦ Εὐκλείδη ἦταν, ὅπως ξεύρομε, γιὰ δυὸ χιλιετίες ἡ ἐπίσημη πηγὴ ἀπ' ὅπου οἱ μαθηματικοὶ ἀρύονταν τὶς βασικὲς γεωμετρικές τους γνώσεις. Γενικὰ νόμιζαν, στὸ διάστημα αὐτό, ὅτι ἡ Εὐκλείδεια Γεωμετρία βασιζόταν σ' ἕνα σύστημα ἀπὸ ἀναμφισβήτητα ἀξιώματα (καὶ θέσεις), —ἀξιώματα ἀπὸ τὰ ὁποῖα ἠμποροῦσε κανεὶς νὰ συμπεράνη λογικὰ κάθε ἄλλη γεωμετρικὴ πρόταση. Ἐξ ἄλλου, ἡ ἀξιωματικὴ μέθοδος θεωρήθηκε ὁ ἰδεατὸς τρόπος γιὰ τὴ δόμηση ὄχι μόνο τῶν Μαθηματικῶν, ἀλλὰ καὶ γιὰ κάθε ἄλλο τομέα ἐπιστημονικῆς γνώσης.

Δύο ἦταν κυρίως οἱ κατευθύνσεις ποὺ ἐκυριάρχησαν τότε (§ 1): Ἡ ὀρθολογικὴ ἄποψη γιὰ τὴν οὐσία τῆς ἐπιστήμης, ἄποψη ποὺ βασιζόταν στὴν παραδοχὴ γιὰ ἕνα πεπερασμένο πλῆθος ἀπὸ προφανεῖς προτάσεις, ἀπὸ τὶς ὁποῖες ἦταν δυνατὸν νὰ συμπεράνη κανεὶς λογικὰ ὅλες τὶς ἀληθεῖς προτάσεις τῆς ἐπιστήμης, καὶ ἡ ἐ μ π ε ι ρ ι κ ή, γιὰ τὴν ὁποία ἡ αἰσθητηριακὴ ἐμπειρία εἶναι ἡ βάση καὶ «ἡ λυδία λίθος» τῆς ἀλήθειας.

Οἱ ὀρθολογιστές, ὅπως προηγούμενα οἱ ὀπαδοὶ τοῦ Πλάτωνος, ἀντλοῦσαν τὴ φιλοσοφική τους ἔμπνευση κυρίως ἀπὸ τὰ Μαθηματικά, οἱ ἐμπειριστὲς πάλιν ἀπὸ τὶς Φυσικὲς ἐπιστῆμες, ἀδιαφορώντας τελείως γιὰ τὴν αὐστηρὴ θεμελίωση τῶν γνώσεών τους. Ὡς ἀντιπρόσωπος γιὰ τὴν πρώτη ἄποψη πρέπει νὰ θεωρηθῆ ὁ Καρτέσιος (1596-1650). Γι' αὐτὸν κριτήριο γιὰ τὴν ἀληθῆ γνώση εἶναι ὁ λογικὸς συμπερασμός, ποὺ γίνεται μὲ ἐνάργεια καὶ αὐστηρότητα ἀπὸ τὴν αὐτοβεβαιούμενη ἀλήθεια *cogito ergo sum*. Τέτοια ἐνάργεια καὶ αὐστηρότητα ἔχουν τὰ Μαθηματικά. Τρόπος, ἐξ ἄλλου, γιὰ τὴν ἀναζήτηση τῆς ἀλήθειας εἶναι, κατὰ τὸν Καρτέσιο, ἡ ἀνάλυση γιὰ κάθε πρόβλημα στὰ δυνατὸν ἁπλούστερα μέρη του. Ἔτσι, βλέπομε καθαρὰ τὴ συγγένεια τῆς καρτεσιανῆς διδασκαλίας μ' ἐκείνη τοῦ Πλάτωνος[10].

Ἀργότερα καὶ ὁ Leibniz (1646-1716) ὑποστήριζε τὴν πλατωνικὴ ἄποψη, ὅτι οἱ ἀλήθειες τῆς Γεωμετρίας, ὅπως ἐκεῖνες τῆς Ἀριθμητικῆς, δὲν εἶναι ἐμπειρικές. Γιὰ τὸν Leibniz οἱ μαθηματικὲς ἀλήθειες εἶναι ἔ μ φ υ τ ε ς στὸν ἄνθρωπο· τὶς ξαναβρίσκει κανεὶς προβαίνοντας προσεκτικὰ καὶ τακτοποιώντας ὅ,τι ἔχει κιόλας στὸ μυαλό του, χωρὶς τὴν προσφυγὴ στὴν ἐμπειρία τοῦ κόσμου. Ἕνα ἀπὸ τὰ πιὸ ὡραῖα παραδείγματα ὀρθολογικοῦ (καὶ μεταφυσικοῦ) συστήματος εἶναι ἡ «Μοναδολογία» τοῦ Leibniz, ποὺ βασίζεται στὴ παραδοχή, ὅτι ὅλες οἱ φιλοσοφικὲς ἀλήθειες ἠμποροῦν νὰ παραχθοῦν ἀπὸ τὶς λογικὲς ἀρχὲς τῆς ἀ ν τ ί φ α σ η ς καὶ τοῦ ἀ π ο χ ρ ῶ ν τ ο ς λ ό γ ο υ[11].

---

10. Φ. Βασιλείου, *Φιλοσοφία τῶν Μαθηματικῶν*, Ἀθῆναι (Ἔκδ. Τεχν. Ἐπιμελ. Ἑλλάδος) 1971^2, σελ. 9.

11. S. Körner, *What is Philosophy?* London, Allen Lane Press 1969. Στὴ γερμανικὴ μετάφρ. μὲ τὸν τίτλο *Grundfragen der Philosophie*, München (List Verlag), σελ. 304.

Ὡς ἀντιπρόσωπος πάλι γιὰ τὴν ἐμπειρικὴ κατεύθυνση πρέπει νὰ θεωρηθῆ ὁ J. Locke (1632-1704), τοῦ ὁποίου τὸ ἔργο *Essay Concerning Human Understanding* (1690) εἶναι τὸ πρῶτο σχετικὸ τῆς νεώτερης ἐποχῆς. Ἀκολουθεῖ ὁ κύριος διαμορφωτὴς τοῦ ἐμπειρισμοῦ, ὁ D. Hume (1711-1776). Καὶ στοὺς δύο αὐτοὺς ἐμπειριστές, ποὺ εἶναι ἄλλωστε καὶ πρόδρομοι τῶν λεγομένων Ὀνοματικῶν, ἐπικρατεῖ ἡ ἄποψη ὅτι τὰ καθόλου (universalia) ἔχουν ἐξάρτηση ἀπὸ τὸν νοῦ καὶ μορφώνονται, μὲ ἀφαίρεση, ἀπὸ τὴν ἐμπειρία.

Ὅπως βλέπομε ἀπὸ τὰ παραπάνω, οἱ ὀπαδοὶ τῆς ὀρθολογικῆς κατεύθυνσης συμφωνοῦν μὲ τὶς ἀριστοτελικὲς παραδοχὲς γιὰ τὸ προφανὲς καὶ τὴν παραγωγὴ ἀναφορικὰ μὲ τὴν ἀποδεικτικὴ ἐπιστήμη, ἐνῶ οἱ ὀπαδοὶ τῆς ἐμπειρικῆς κατεύθυνσης δέχονται μόνο τὶς ἀπαιτήσεις τῆς ἐμπειρικῆς θεμελίωσης τῆς ἐπιστήμης.

Ἡ ἀπόκλιση, ὡστόσο, ἀνάμεσα στὶς δύο αὐτὲς κατευθύνσεις, τοῦ ὀρθολογισμοῦ καὶ τοῦ ἐμπειρισμοῦ, δὲν συνεπάγεται καὶ τὴν ἔλλειψη σ' αὐτὲς κοινῶν σημείων συνάντησης. Ἔτσι, στὴ συνέχεια δὲν ἔλειψε ἡ προσπάθεια γιὰ νὰ πλησιάση κανεὶς τὶς ἀποκλίνουσες αὐτὲς ἀπόψεις. Πρῶτος ἐπεχείρησε τὴν προσέγγιση αὐτὴ ὁ B. Nieuwentyt (1654-1718) πού, κατὰ κάποιο τρόπο, εἶναι καὶ πρόδρομος τοῦ I. Kant (1724-1804). Ὁ Nieuwentyt ἐτόνισε ἰδιαίτερα τὴ σημασία τοῦ νὰ διακρίνη κανεὶς μὲ ἀκρίβεια τὴ διαφορὰ ἀνάμεσα στὰ καθαρὰ καὶ τὰ ἐφαρμοσμένα Μαθηματικά[12]. Στὰ τελευταῖα πληροῦνται οἱ ἀριστοτελικὲς παραδοχὲς τῆς ὕπαρξης, ὄχι ὅμως ἐκεῖνες γιὰ τὸ προφανὲς καὶ τὴν παραγωγή.

5. Γιὰ τὴν προσέγγιση ἀνάμεσα στὶς ἀποκλίνουσες ἀπόψεις τοῦ ὀρθολογισμοῦ καὶ τοῦ ἐμπειρισμοῦ ἐργάσθηκε καὶ ὁ ἴδιος ὁ Kant. Αὐτὸς ἐπρέσβευε τὴν ἄποψη ὅτι ἡ Γεωμετρία εἶναι ἡ ἐπιστήμη τῆς δομῆς τοῦ χώρου. Γιὰ τὴν Ἀριθμητικὴ πάλιν ἔλεγε ὅτι εἶναι ἡ ἐπιστήμη τοῦ χρόνου. Κατ' αὐτὸν τὰ ἀξιώματα, τόσο τῆς Γεωμετρίας ὅσο καὶ τῆς Ἀριθμητικῆς, τὰ συλλαμβάνει ὁ νοῦς μὲ βάση μιὰ a priori ἐνόραση. Ἔτσι, ὁ χῶρος, ὅπως καὶ ὁ χρόνος, δὲν εἶναι ἄλλο παρὰ μιὰ καθαρὴ ἐνορατικὴ μορφή. Σχετικὰ μὲ τὸ τί εἶναι a priori γνώση, λέγει ὁ Kant στὴν Εἰσαγωγή του τῆς *Κριτικῆς τοῦ καθαροῦ λόγου:* «Παρ' ὅλο ποὺ κάθε γνώση ἀρχίζει μὲ τὴν ἐμπειρία, δὲν ἕπεται καθόλου ἀπ' αὐτὸ πὼς πηγάζει καὶ ἀπ' αὐτήν. Θὰ ἦταν, βέβαια, δυνατὸν ἡ ἐμπειρική μας γνώση νὰ εἶναι κάποια σύνθεση αὐτοῦ ποὺ δεχόμεθα μὲ τὶς ἐντυπώσεις καὶ αὐτοῦ ποὺ ἡ γνωστική μας ἱκανότητα

---

12. E. Beth, *The Foundations of Mathematics,* Amsterdam (North - Holland Publ.) 1968, σελ. 39.

παρέχει καθ' ἑαυτὴν (παίρνοντας ἁπλῶς ἀφορμὴ ἀπὸ τὶς αἰσθητηριακές μας ἐντυπώσεις), σύνθεση ἀπὸ τὴν ὁποία δὲν ἠμποροῦμε νὰ διακρίνωμε τὸ ἀρχικὸ στοιχεῖο τῆς ἐπαίσθησης παρὰ ὕστερα ἀπὸ μακρὰ ἄσκηση καὶ δεξιότητα. Χρειάζεται γι' αὐτὸ ἀκριβὴς ἔρευνα γιὰ τὸ ἐρώτημα —ποὺ τὴν ἀπάντηση δὲν ἔχομε ἐκ πρώτης ὄψεως—, ἂν δηλαδὴ ὑπάρχει γνώση ἀνεξάρτητη ἀπὸ τὴν ἐμπειρία, μάλιστα ἀνεξάρτητη ἀπὸ τὶς ἐντυπώσεις τῶν αἰσθήσεων. Τέτοιες γνώσεις τὶς λέμε a priori, διακρίνοντές τες ἀπὸ τὶς ἐμπειρικές, ποὺ ἔχουν τὴν πηγή τους a posteriori, δηλαδὴ στὴν ἐμπειρία»[13]. Καὶ σὲ ἄλλο σημεῖο τῆς Εἰσαγωγῆς του προσθέτει ὁ Kant: «Τὰ Μαθηματικὰ μᾶς δίνουν ἕνα λαμπρὸ παράδειγμα γιὰ τὸ πόσο μακρυά, ἀνεξάρτητα ἀπὸ κάθε ἐμπειρία, ἠμποροῦμε νὰ φθάσωμε μὲ τὴν a priori γνώση»[14].

Ἀναφορικὰ τώρα μὲ τὴ διαμόρφωση τῶν Μαθηματικῶν σὲ ἐπιστήμη, λέγει ὁ Kant στὸν Πρόλογό του στὴ δεύτερη ἔκδοση τῆς *Κριτικῆς τοῦ καθαροῦ λόγου*: «Ἀπὸ τοὺς παλαιότερους χρόνους, ὅπου φθάνει ἡ ἱστορία τοῦ ἀνθρωπίνου πνεύματος, τὰ Μαθηματικὰ βρῆκαν τὸν ἀσφαλῆ δρόμο τῆς ἐπιστήμης ἀπὸ τὸν ἀξιοθαύμαστο λαὸ τῶν Ἑλλήνων. Δὲν πρέπει μόνο νὰ νομισθῇ, ὅτι ἦταν τόσο εὔκολο γιὰ τὴν ἐπιστήμη αὐτὴ νὰ ἐπιτύχῃ ἢ νὰ διανοίξῃ τὴ β α σ ι λ ι κ ὴ ὁ δ ό, ὅπως αὐτὸ συνέβη μὲ τὴ Λογική, ὅπου ὁ λόγος ἔχει νὰ κάνῃ μόνο καθ' ἑαυτόν»[15].

Τὴ σχετικὴ προσπάθεια ποὺ καταβλήθηκε γιὰ νὰ διανοίξουν τὰ Μαθηματικὰ τὴ βασιλικὴ ὁδό, τὴν παρομοιάζει ὁ Kant μὲ ἀληθινὴ ἐπανάσταση στὸν τρόπο σκέψης. «Γιατὶ στὸ μυαλὸ τοῦ πρώτου ἀνθρώπου πού, λόγου χάρη, ἀπέδειξε τὶς ἰδιότητες γιὰ τὸ ἰσοσκελὲς τρίγωνο, θὰ ἔγινε φανερό, πὼς δὲν ἦταν ἀρκετὸ σ' αὐτὸν νὰ σκεφθῇ ἐπάνω στὸ σχῆμα, ὅπως αὐτὸ βρισκόταν μπροστά του, ἢ ν' ἀνιχνεύσῃ ἁπλῶς τὴν ἔννοια τοῦ σχήματος, ὅπως ἦταν στὸ μυαλό του, μὲ σκοπὸ τὴν προσπάθεια γιὰ παραγωγὴ τῶν ὑπ' ὄψη ἰδιοτήτων. Ἀντίθετα, ἦταν γι' αὐτὸ ἀπαραίτητο νὰ προβῇ σὲ μιὰ a priori κατασκευὴ καί, γιὰ νὰ φθάσῃ μὲ βεβαιότητα στὴν a priori γνώση, δὲν θὰ ἔπρεπε νὰ ἀποδώσῃ στὸ ἀντικείμενο ποὺ ἐξετάζει ἄλλες ἰδιότητες παρὰ ἐκεῖνες ποὺ ἀκολουθοῦν μὲ ἀναγκαιότητα ἀπ' ὅ,τι ὁ ἴδιος ἔθεσε στὸ ἀντικείμενο αὐτὸ σύμφωνα μὲ τὴ σύλληψη τῆς ἔννοιας τοῦ ἰσοσκελοῦς»[16].

Πλὴν τοῦ ὅτι οἱ μαθηματικὲς προτάσεις εἶναι γιὰ τὸν Kant a priori, καὶ γι' αὐτὸ ἐκφράζουν ἀναγκαιότητα ποὺ δὲν ἠμπορεῖ νὰ ἐξαχθῇ ἀπὸ τὴν ἐμπειρία, εἶναι συνάμα καὶ σ υ ν θ ε τ ι κ έ ς. Αὐτὸ σημαίνει: Γιὰ τὴν τεκμη-

---

13. I. Kant, *Kritik der reinen Vernunft* (Ἐκδ. Wiss. Buchgesellschaft, Darmstadt 1975), Bd. 3, 45.
14. Kant, ὅ.π., 50.
15. Kant, ὅ.π., 22.
16. Kant, ὅ.π., 22.

ρίωση τῆς ἀλήθειάς τους οἱ προτάσεις αὐτές, πέραν ἀπὸ τὴν κατανόησή τους, ἔχουν ἀνάγκη καὶ ἀπὸ κάτι ἀκόμη· μὲ ἄλλες λέξεις, ἡ ὑπ' ὄψη τεκμηρίωση, μαζὶ μὲ τοὺς ὁρισμοὺς τῶν ὅρων ποὺ περιέχουν οἱ προτάσεις, δὲν ἐξαρτᾶται μόνον ἀπὸ τὴ λογική τους μορφὴ δὲν εἶναι ἀναλυτικές. Σὲ ἐναντία ἀκριβῶς, περίπτωση οἱ προτάσεις λέγονται συνθετικές. Ὡς παράδειγμα γιὰ τὸ ὅτι οἱ γεωμετρικὲς προτάσεις εἶναι συνθετικὲς ἔχομε κατὰ τὸν Kant τὴν πρόταση «ἡ εὐθεῖα εἶναι ἡ συντομώτερη γραμμὴ ποὺ ἑνώνει δύο σημεῖα».

Εἶναι ἀξιοσημείωτο μὲ ποιὸ τρόπο ὁ ὀργανωτὴς τοῦ φιλοσοφικοῦ «Κύκλου τῆς Βιέννης» M. Schlick (1882-1936) ἐχαρακτήρισε, μὲ βάση τὶς a priori καὶ τὶς συνθετικὲς προτάσεις τοῦ Kant —καὶ τὶς ἀντίστοιχες κ ρ ί σ ε ι ς, ποὺ εἶναι οἱ σημασίες τους— δύο ἀπὸ τὶς νεώτερες φιλοσοφικὲς τάσεις, γιὰ τὶς ὁποῖες μιλήσαμε κιόλας στὶς προηγούμενες παραγράφους, τὸν ὀρθολογισμὸ καὶ τὸν ἐμπειρισμό: «Ἂν πιστεύετε, λέγει ὁ Schlick, σὲ συνθετικὲς a priori κρίσεις, τότε εἶστε ὀρθολογικός, ἂν ὄχι, εἶστε ἐμπειρικός»[17].

Ἐξετάζοντες τώρα τὴ θέση τοῦ Kant γιὰ τὴ θεωρία τῆς ἐπιστήμης —πού, ἂς σημειωθῆ ἐδῶ, δὲν διατυπώνεται μὲ ἀρκετὴ σαφήνεια στὴν *Κριτικὴ τοῦ καθαροῦ λόγου*— βλέπομε, ὅτι ἡ θέση αὐτὴ ἀποκλίνει περισσότερο στὴν ἀριστοτελική. Ἄν, ἐξ ἄλλου, παραβάλη κανεὶς σχετικὲς ἀπόψεις τοῦ Kant σὲ συσχετισμὸ μ' ἐκεῖνες τῆς γενεᾶς του, βλέπει ἐπιφανειακὴ μόνο σύμπτωση[18]. Ὁπωσδήποτε γιὰ τὸν Kant, ὅπως προηγούμενα γιὰ τὸν Πλάτωνα καὶ τὸν Leibniz, ἡ Φιλοσοφία εἶναι ἀνάγκη ν' ἀναχωρῆ ἀπὸ τὰ Μαθηματικὰ καί, μάλιστα, χωρὶς τὰ τελευταῖα ἡ πρώτη εἶναι ἀδύνατο νὰ προχωρήση.

Τέλος, εἶναι ἰδιαίτερης ἔξαρσης τὸ γεγονός, ὅτι ἀπὸ τὴν καντιανὴ διδασκαλία ξεπήδησε ὁ ἰ δ ε α λ ι σ μ ό ς, ποὺ γιὰ μεγάλο διάστημα ἐχαρακτήριζε τὸ γερμανικὸ πνεῦμα.

6. Ὅπως εἴπαμε, στὴ δεύτερη παράγραφο, ὁ ὅρος θ έ σ ι ς σημαίνει γιὰ τὸν Ἀριστοτέλη εἰδικὴ παραδοχή, ἀρχικὴ ὀντικὴ θέση. Γιὰ τὸν λόγο ἀκριβῶς αὐτὸν ὁ ὅρος αὐτός, καθὼς καὶ οἱ κ ο ι ν ὲ ς ἀ ρ χ έ ς, ὑπάγονται στὴν *Πρώτη Φιλοσοφία*, δηλαδὴ τὴ Μεταφυσική, ποὺ ἐξετάζει ὀντολογικὲς ἀλήθειες. Ἔτσι, ἡ *Πρώτη Φιλοσοφία* βρίσκεται στὴ βάση τῆς μαθηματικῆς ἀποδεικτικῆς ἐπιστήμης. Αὐτό, ἄλλωστε, συμβαίνει καὶ γιὰ κάθε ἀποδεικτικὴ ἐπιστήμη. Τὴν ἀντίληψη τῆς ἀριστοτελικῆς Ὀ ν τ ο λ ο γ ί α ς, ποὺ

17. M. Schlick, *Form and Content. An Introduction to Philosophical Thinking*, 1932 καὶ σὲ ἑλληνικὴ μετάφραση Ι. Γόρδου: *Εἰσαγωγὴ στὴ φιλοσοφικὴ σκέψη*, Θεσ)νίκη (Ἐκδ. Ἐγνατία, «Φιλοσοφικὴ Βιβλιοθήκη» 5), χ.χ., σελ. 187.

18. Beth, ὅ.π., 39.,

βασίζεται στὴν προσπέλαση τοῦ ὄ ν τ ο ς ὡς ὄ ν τ ο ς, διαδέχθηκε, στοὺς νεώτερους χρόνους, ἡ καντιανὴ γνωσιολογικὴ ἀντίληψη τοῦ ὄντος ὡς δ ο σ μ έ ν η ς ἢ δ υ ν α τ ῆ ς γ ν ώ σ η ς. Ἐδῶ οἱ μεταφυσικὲς προτάσεις, ποὺ εἶναι, ὅπως καὶ οἱ μαθηματικές, a priori καὶ συνθετικές, διαφέρουν ὡστόσο ἀπὸ τὶς μαθηματικές, πρᾶγμα ποὺ παραδεχόταν νωρίτερα κι ὁ Ἀριστοτέλης. Γιὰ τὸν Kant ἡ βασικὴ σκέψη τῆς Φιλοσοφίας τῶν Μαθηματικῶν περιέχεται στὴν φράση του: «Ἂν ἡ ἀντίληψη (Anschauung) ἔπρεπε νὰ κατευθύνεται στὴν κατάσταση (ποιότητα) τῶν πραγμάτων, τότε δὲν καταναοῶ πῶς ἠμπορεῖ κανεὶς νὰ μάθη a priori κάτι ἀπ' αὐτήν· ἄν, ὅμως, τὸ πρᾶγμα (ὡς ἀντικείμενο τῆς ἐπαίσθησης) συμμορφώνεται πρὸς τὴν παραστατική μας ἱκανότητα, τότε ἠμπορῶ νὰ φαντασθῶ πλήρως τὴ δυνατότητα αὐτή»[19]. Ὁ συνθετικός, τώρα, καὶ a priori χαρακτήρας τῶν μαθηματικῶν ἀρχῶν ἐξηγεῖται ἀπὸ τὸ ὅτι αὐτὲς δὲν περιγράφουν τὸ περιεχόμενο τῆς ἐπαίσθησης, ἀλλὰ μόνο τὴν τυπικὴ δομὴ τῶν ἀντιλήψεών μας. Ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος, ἡ βασικὴ σκέψη στὴν καντιανὴ γνωσιολογικὴ ἀντίληψη τῆς Μεταφυσικῆς, ὡς ἐπιστήμης γιὰ τὴ δομὴ τοῦ ὄντος, περιέχεται, μαζὶ μ' ἐκεῖνα ποὺ εἴπαμε γιὰ τὰ Μαθηματικά, καὶ στὶς ἑξῆς φράσεις τοῦ Kant: «Ἐπειδὴ ὅμως δὲν ἠμπορῶ νὰ σταματήσω στὶς ἀντιλήψεις αὐτές, ἂν θέλω νὰ γίνουν γνώσεις, ἀλλὰ πρέπει νὰ τὶς συσχετίσω μὲ παραστάσεις γιὰ κάτι, ὡς ἀντικείμενο, καὶ τὸ ἀντικείμενο αὐτὸ νὰ τὸ προσδιορίσω μὲ τὶς παραστάσεις ἐκεῖνες, γι' αὐτὸ ἢ ἠμπορῶ νὰ δεχθῶ, ὅτι οἱ ἔ ν ν ο ι ε ς, μὲ τὶς ὁποῖες κατορθώνω τὸν προσδιορισμὸ αὐτόν, συμμορφώνονται καὶ πρὸς τὸ ἀντικείμενο, ὁπότε πάλιν εἶμαι στὴν ἴδια ἀμηχανία, . . ., ἢ δέχομαι ὅτι τὰ ἀντικείμενα, μὲ ἄλλες λέξεις ἡ ἐ μ π ε ι ρ ί α, μὲ τὴν ὁποία μόνο τὰ ἀντικείμενα αὐτὰ (ὡς δοσμένα ἀντικείμενα) γίνονται γνωστά, συμμορφώνονται πρὸς τὶς ὑπ' ὄψη ἔννοιες, ὁπότε βλέπω ἀμέσως μιὰ εὐκολώτερη ἐξήγηση . . .»[20].

Τόσο στὸν Ἀριστοτέλη ὅσο καὶ στὸν Kant τὰ Μαθηματικὰ ἀδυνατοῦν μόνα τους νὰ θεμελιώσουν αὐτὲς τὶς ἴδιες παραδοχές τους. Ἀπαραίτητη εἶναι γιὰ τὸ σκοπὸ αὐτὸν ἡ προσφυγὴ στὴ Μεταφυσική. Ἔτσι ἡ Μεταφυσικὴ στὰ Μαθηματικὰ δὲν εἶναι στὴν οὐσία τίποτε ἄλλο ἀπὸ ἐκεῖνο ποὺ λέγομε σήμερα «ἔρευνα γιὰ τὴ θεμελίωση τῶν Μαθηματικῶν». Τὸ ἴδιο ἰσχύει καὶ γιὰ τὶς ἄλλες ἀποδεικτικὲς ἐπιστῆμες. Ἰδιαίτερα ὁ Kant ὑποστηρίζει ὅτι, ὅπως τὰ ἀξιώματα (καὶ οἱ θέσεις) τῆς Εὐκλείδειας Γεωμετρίας καὶ τῆς Ἀριθμητικῆς καθορίζουν τὴ χωροχρονικὴ δομὴ τῆς ἀντικειμενικῆς ἐμπειρίας, ἔτσι καὶ οἱ μεταφυσικὲς ἀρχὲς προσδιορίζουν τὴν a priori ἐννοιολογικὴ δομὴ τῆς ἐμπειρίας αὐτῆς. Μὲ τὸν τρόπο αὐτόν, τὸ σύνολο τῶν μα-

19. Kant, *KrV*, δ.π., 25.
20. Kant, δ.π., 25-26.

θηματικῶν καὶ μὴ μαθηματικῶν συνθετικῶν καὶ a priori ἀρχῶν καθορίζει τὴν τυπικὴ δομὴ τοῦ ὄντος, ἐφ' ὅσον τοῦτο ἔχει γνωσθῆ ἢ ἠμπορεῖ νὰ γνωσθῆ[21].

Οἱ ἀπόψεις τόσο τοῦ 'Αριστοτέλους ὅσο κι ἐκεῖνες τοῦ Kant, παρ' ὅλη τὴ μεγάλη προσοχὴ ποὺ ἔτυχαν ἀκόμα καὶ στὶς μέρες μας, δὲν ἔμειναν ὡστόσο μακρυὰ ἀπὸ ἐπικρίσεις. Αὐτὸ ὀφείλεται κυρίως στὰ πολλὰ καὶ δυσχερῆ προβλήματα ποὺ ἐξ αἰτίας τους ἐμφανίσθηκαν, στοὺς καινούργιους μάλιστα μαθηματικοὺς κλάδους. Τὸ θετικὸ σημεῖο στὶς ἐπικρίσεις αὐτὲς ἦταν μιὰ πιὸ ἐξονυχιστικὴ μελέτη τῶν παλαιοτέρων θεωριῶν, χωρὶς παρὰ ταῦτα νὰ λείψουν καὶ μερικὲς παρανοήσεις ἢ πλάνες. Λόγου χάρη, οἱ γνωστὲς συζητήσεις γιὰ τὴ μαθηματικὴ φιλοσοφία τοῦ Kant, στὴ λεγόμενη ἀντίθεση τῶν Russel-Poincaré, ποὺ ἄρχισαν μὲ ἀφορμὴ τὴν ἔκδοση τοῦ κλασσικοῦ ἔργου *Principia Mathematica* (τῶν B. Russel καὶ A. Whitehead), ὀφείλονταν σὲ σφαλερὴ ἑρμηνεία τῶν θεωριῶν τοῦ Kant, ὅπως ἔδειξε ὁ E. Beth[22].

Ἂς σημειωθῆ τέλος, ὅτι πλὴν τῆς ἀριστοτελικῆς ἐκδοχῆς τοῦ ὅρου μεταφυσικός, ποὺ σὲ τελευταία ἀνάλυση ἔχει τὴν ἔννοια τοῦ πέραν τοῦ ἐπαισθητοῦ, στὴ σύγχρονη ἐποχὴ ὁ ὅρος σημαίνει κάτι ποὺ στερεῖται ἀπὸ ἐπιστημονικὴ σημασία. Τὸ νόημα αὐτὸ ἀποδίδουν στὸν ὅρο μεταφυσικὸς ἰδιαίτερα οἱ ὀπαδοὶ τοῦ «Κύκλου τῆς Βιέννης». Οἱ ὀπαδοὶ τοῦ ὑπ' ὄψη Κύκλου εἶναι ἀρνητὲς ὁποιασδήποτε Μεταφυσικῆς τόσο μὲ τὴν παραδοσιακὴ ὅσο καὶ μὲ τὴ δική τους ἔννοια. 'Εξ ἄλλου, γι' αὐτοὺς ἡ ὀρθότητα τῶν μαθηματικῶν προτάσεων καθορίζεται ἀποκλειστικὰ ἀπὸ τὴ δομὴ τῆς ἐπιστημονικῆς γλώσσας (βλ. καὶ τὴ δεκάτη παράγραφο) καὶ εἶναι ἀνεξάρτητη ἀπὸ τὴν ἐνόραση ἢ τὴν ἐμπειρία. Τοὺς φιλοσόφους τοῦ «Κύκλου τῆς Βιέννης» τοὺς κατατάσσομε στὴν κατηγορία ἐκείνων ποὺ φέρουν τὸ ὄνομα, νεοθετικιστές. 'Απλῶς θετικιστὲς εἶναι ὅσοι πρεσβεύουν ὅτι οἱ μεταφυσικὲς προτάσεις ἀποτελοῦνται ἀπὸ μὴ λογικές, μὴ μαθηματικὲς καὶ μὴ ἐμπειρικὲς προτάσεις.

7. Δὲν ἄργησε ὡστόσο νὰ τεθῆ καὶ πάλι τὸ ἐρώτημα: εὐσταθεῖ ἄραγε ἡ ἀριστοτελικὴ ἄποψη, ὅτι τὶς μαθηματικὲς ἀρχὲς μᾶς τὶς δίνει ἡ ἐπαγωγή, ποὺ βασίζεται στὶς αἰσθητηριακές μας ἐντυπώσεις; Πῶς ξεύρει κανεὶς ὅτι οἱ ἀρχὲς αὐτὲς εἶναι προτάσεις ἀληθεῖς; Φυσικὰ μιλᾶμε γιὰ τὰ καθαρὰ καὶ ὄχι γιὰ τὰ ἐφαρμοσμένα Μαθηματικά. Ἕνα πρῶτο καὶ σημαντικὸ ὁρόσημο στὴν προσπάθεια νὰ δοθῆ ἀπάντηση στὰ ἐρωτήματα αὐτὰ ἦταν τὸν

---

21. Körner, ὅ.π., 224.
22. Στὸ ἄρθρο *Über Locke's allgemeines Dreieck*, «Kant-Studien» 48 (1956-57).

δέκατο ἔνατο αἰώνα, ἡ ἐπινόηση τῆς Γεωμετρίας ποὺ λέγεται ἀπὸ τότε μὴ Εὐκλείδεια. Ἡ ἐπινόηση αὐτὴ ὀφείλεται στοὺς μαθηματικοὺς C. Gauss (1777-1855), N. Lobatschewsky (1793-1856) καὶ J. Bolyai (1802-1860).

Ὅπως ξέρομε κιόλας, γιὰ πολλοὺς ἐρευνητές, πρὶν ἀπὸ τὴν ἐπινόηση τῆς μὴ Εὐκλείδειας Γεωμετρίας, κοινὴ ἦταν ἡ πεποίθηση ὅτι οἱ γεωμετρικὲς ἀρχὲς περιγράφουν αὐτὴ τὴν ἴδια τὴ φύση τοῦ χώρου ποὺ μᾶς περιβάλλει καὶ ὅτι ἡ Εὐκλείδεια Γεωμετρία ἦταν ἡ ἐπιστήμη τῆς δομῆς τοῦ χώρου αὐτοῦ. Ἀκόμα καὶ γιὰ τὸν Kant ἡ ἐν λόγῳ Γεωμετρία ἐκφράζει τὴ μορφὴ τῆς ἐνόρασης τοῦ χώρου. Ἄρα τὰ Εὐκλείδεια ἀξιώματα, ὅπως καὶ οἱ λογικὲς συνέπειές τους, εἶναι ἀλήθειες ποὺ ἀναφέρονται στὴ μορφὴ κάθε δυνατῆς ἐνόρασης στὸ χῶρο. Εἶναι γνωστὸ ὅτι οἱ ἀπόψεις τοῦ Kant γιὰ τὴ φύση τῆς Εὐκλείδειας Γεωμετρίας εἶχαν μεγάλη ἐπίδραση στοὺς φιλοσόφους καὶ μαθηματικοὺς τῆς ἐποχῆς του. Ἡ ἐπίδραση μάλιστα αὐτὴ παρέμεινε ἰσχυρὴ γιὰ μακρὸ ἀπὸ τότε διάστημα. Ἐκεῖνο ποὺ ἀποφασιστικὰ συνετέλεσε στὴν ἐπινόηση τῆς μὴ Εὐκλείδειας Γεωμετρίας ἦταν ἡ κατανόηση, ὕστερα ἀπὸ πολλὲς προσπάθειες, τῆς διαπίστωσης ὅτι μὲ τὴν ἀντικατάσταση μὲ ἄλλο τοῦ πέμπτου αἰτήματος τοῦ Εὐκλείδη —τοῦ λεγομένου καὶ αἰτήματος τῶν παραλλήλων — καὶ μὲ τὴ διατήρηση τῶν λοιπῶν ἀξιωμάτων, ἦταν δυνατὴ ἡ δόμηση μιᾶς νέας Γεωμετρίας ὄχι λιγώτερο συμβιβαστῆς ἀπὸ τὴν Εὐκλείδεια. Πρόκειται γιὰ τὴ λεγόμενη σήμερα Ὑπερβολικὴ Γεωμετρία. Ἀπὸ τότε ἀκολούθησε ἡ ἐπινόηση καὶ ἄλλων Γεωμετριῶν (B. Riemann, 1826-1866)[23].

Εἶναι ἐνδιαφέρον νὰ παραθέσωμε ἐδῶ τὴν ἄποψη τοῦ μαθηματικοῦ J. Hadamard (1865-1963), ἄποψη ποὺ διατυπώνεται στὸ βιβλίο του *The Psychology of Invention in the Mathematical Field* (στὶς ἐκδόσεις Dover). Σύμφωνα μ' αὐτὴν ἡ κατανόηση τῆς σημασίας τοῦ αἰτήματος τῶν παραλλήλων ἐνδέχεται νὰ εἶχε γίνει τρεῖς αἰῶνες ἐνωρίτερα, ἂν ἀπὸ τότε οἱ ἐρευνητὲς συνελάμβαναν τὴ σκέψη νὰ συνδέσουν τὶς δύο παρατηρήσεις, ποὺ ἀναφέραμε στὴ δεύτερη παράγραφο, ὅτι δηλαδὴ εἶναι ἀνέφικτο νὰ ὁρίση κανεὶς κάθε ὅρο καὶ νὰ ἀποδείξη κάθε πρόταση. Συγκεκριμένα, ὁ Hadamard κάνει λόγο γιὰ τὸν Bl. Pascal (1623-1662), ποὺ ἐγνώριζε τὶς δύο αὐτὲς παρατηρήσεις, τὶς ὁποῖες καὶ ἀναφέρει στὸ ἔργο του *Art de persuader*. Μιλώντας γιὰ τὴ στενὴ σκοπιά, ἀπὸ τὴν ὁποία βλέπει κανεὶς πολλὲς φορὲς μιὰ ἰδέα του καὶ τὴν παράλειψη τοῦ ἴδιου νὰ σκεφθῆ πολύπλευρα πάνω σ' αὐτήν, ὁ Hadamard τονίζει τὴ δυσάρεστη θέση, στὴν ὁποία ἠμπορεῖ νὰ βρεθῆ ὁ ἐρευνητὴς μὲ τὴν ἀπώλεια τῆς ἐπιτυχίας τοῦ νὰ συναγάγη ἀπὸ

23. Ἡ μέθοδος ποὺ ἐχρησιμοποίησε ὁ Riemann γιὰ τὴν κατασκευὴ τῶν Γεωμετριῶν, ποὺ φέρουν σήμερα τὸ ὄνομά του, βασίζεται σὲ ἰδέες τοῦ C. F. Gauss (1777-1855) ἐπάνω στὴν ἔρευνα γιὰ συμφυεῖς ἰδιότητες στὴ λεγόμενη Θεωρία τῶν ἐπιφανειῶν.

τὴν ἰδέα του συμπεράσματα, ποὺ ἄλλος εὐτυχέστερος ἀπὸ αὐτὸν ἐρευνητὴς ἐπιτυγχάνει ἀργότερα. Σχετικὰ μὲ τὴν παράλειψη αὐτὴ τοῦ Pascal, ὁ Hadamard λέγει κατὰ λέξη: «Ἐξ ἄλλου σὲ ἄλλο σημεῖο ὁ Pascal τονίζει τὸ εὐνόητο γεγονός, ὅτι γιὰ τὸν ἴδιο λόγο ποὺ δὲν εἶναι δυνατὸ ν' ἀποδείξη κανεὶς ὁποιαδήποτε πρόταση εἶναι ἐπίσης ἀδύνατο νὰ ὁρίση ὁποιοδήποτε ὅρο. Ὑπάρχουν ἀρχικὲς ἰδέες ποὺ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ ὁρισθοῦν. Ἂν ὁ Pascal εἶχε σκεφθῆ νὰ ἀντιπαρατάξη τὶς δύο αὐτὲς φράσεις, θὰ βρισκόταν μπροστὰ σ' ἕνα μεγάλο πρόβλημα λογικῆς, πρόβλημα ποὺ συντελεῖ ὄχι μόνο στὴν κατανόηση τῆς ἀληθινῆς σημασίας τοῦ περίφημου αἰτήματος τοῦ Εὐκλείδη, ἀλλὰ γενικώτερα ἔχει προκαλέσει βαθειὰ ἐπανάσταση, ἡ ὁποία, νομίζω, ἐνδέχεται νὰ γινόταν τρεῖς αἰῶνες ἐνωρίτερα. Ὡστόσο ὁ Pascal δὲν συνέδεσε τὶς δύο ἰδέες».

Ὕστερα ἀπ' αὐτά, συνέπεια τῶν παραπάνω ἐπινοήσεων ἦταν ἡ ἐπανεξέταση καί, στὴ συνέχεια, ἡ ἀνασκευὴ τῶν ἀντιλήψεων ποὺ κυριαρχοῦσαν παλαιότερα ἀναφορικὰ μὲ τὴ φύση καὶ τὴν τεκμηρίωση τῶν ἀρχῶν σὲ ὁποιαδήποτε μαθηματικὴ θεωρία. Σύμφωνα μὲ τὶς παλαιότερες αὐτὲς ἀντιλήψεις, γιὰ τὶς ὁποῖες ὑπερεμάχησε καὶ ὁ ἴδιος ὁ Kant, τὰ ἀξιώματα καὶ οἱ θέσεις στὰ Μαθηματικὰ δὲν ἦταν δυνατὸ νὰ λαμβάνωνται τελείως αὐθαίρετα —ἂν καὶ πρέπει νὰ ὁμολογηθῆ κάποια αὐθαιρεσία κατὰ τὴν ἐπιλογή τους —, ἀλλὰ πρέπει οἱ ἀρχὲς αὐτὲς νὰ συμμορφώνωνται μὲ τὶς ἐνοράσεις μας τοῦ χώρου καὶ τοῦ χρόνου[24]. Θὰ ἰδοῦμε στὰ παρακάτω πῶς οἱ ἀντιλήψεις αὐτὲς ἀναιρέθηκαν ἀπὸ τὰ συμπεράσματα, στὰ ὁποῖα ὡδήγησε τὴν ἔρευνα ἡ ἐμφάνιση τῶν νέων Γεωμετριῶν.

Εἶναι ἀξιοσημείωτο τὸ γεγονὸς ὅτι, μετὰ τὴν εὕρεση τῶν νέων Γεωμετριῶν, δὲν ἄργησε νὰ βρεθῆ ἐποπτικὴ ἑρμηνεία τῆς ὑπερβολικῆς Γεωμετρίας καὶ αὐτὸ μέσα στὴν Εὐκλείδεια. Ἔτσι, ἡ ἄποψη ὅτι ἡ Εὐκλείδεια Γεωμετρία εἶναι ἡ μόνη ποὺ δέχεται ἐποπτικὴ ἑρμηνεία, βρέθηκε ὡς μὴ εὐσταθοῦσα. Δυσκολώτερο ἦταν νὰ δοθῆ ἐποπτικὴ ἑρμηνεία γιὰ ὡρισμένες Γεωμετρίες Riemann (αὐτῶν μὲ σταθερὴ καμπυλότητα τοῦ χώρου). Ὅμως, καὶ στὴν περίπτωση αὐτὴ βρέθηκε ἀργότερα ἐποπτικὴ ἑρμηνεία, πρῶτα τέτοιας ἐπιπέδου Γεωμετρίας Riemann μέσα σὲ Εὐκλείδεια Γεωμετρία τοῦ χώρου, καὶ στὴ συνέχεια μέσα σὲ ἐπίπεδο Εὐκλείδεια Γεωμετρία. Τὸ ἴδιο ἠμπορεῖ νὰ γίνη καὶ γιὰ τὶς ἀντίστοιχες στερεὲς Γεωμετρίες.

Οἱ παραπάνω ἑρμηνεῖες μὴ Εὐκλείδειων Γεωμετριῶν μέσα στὴν Εὐκλείδεια Γεωμετρία, ἔδωκαν ἀφορμὴ στὸ νὰ νομισθῆ, ὅτι ἡ ἐ π ο π τ ι κ ό τ η τ α τῆς Εὐκλείδειας Γεωμετρίας εἶναι ἀ π ό λ υ τ η, μὲ ἄλλες λέξεις δὲν γίνεται σὲ ἀναφορὰ πρὸς ἄλλες Γεωμετρίες ἀλλὰ καθ' ἑαυτή, ἐνῶ γιὰ τὶς μὴ Εὐκλείδειες Γεωμετρίες ἡ ἐποπτικότητα εἶναι σ χ ε τ ι κ ή, δηλαδὴ γί-

24. Beth, ὅ.π., 46

νεται μὲ τὴν ἐπίκληση ἐκείνης στὴν Εὐκλείδεια Γεωμετρία. Καὶ στὸ σημεῖο ὅμως αὐτὸ πρέπει νὰ παρατηρηθῆ ὅτι καὶ ἡ ἐποπτικότητα τῆς Εὐκλείδειας Γεωμετρίας ὑπόκειται σὲ ὡρισμένους περιορισμούς[25]. Ἤδη ξεύρομε, ἀπὸ τὶς παραστάσεις γεωμετρικῶν σχημάτων, ὅτι οἱ γραφικὲς παραστάσεις πολλῶν ἁπλῶν συναρτήσεων δὲν ὑποπίπτουν στὴν ἄμεση (ἐμπειρικὴ) ἐποπτεία μας[26].

8. Στὴν τέταρτη παράγραφο μιλήσαμε κιόλας γιὰ ὡρισμένο κενὸ ποὺ παρουσιάζει ἡ ἀξιωματικὴ τῶν *Στοιχείων* τοῦ Εὐκλείδη. Ἔρευνες, ποὺ ἔγιναν στὸ τελευταῖο τέταρτο τοῦ περασμένου αἰώνα, ἔδειξαν τὴν ὕπαρξη στὰ *Στοιχεῖα* καὶ ἄλλων κενῶν. Τὰ κενὰ αὐτὰ ἀφοροῦν κυρίως σὲ ὡρισμένες ἀναπόδεικτες παραδοχές, ἀπαραίτητες γιὰ ἕνα αὐστηρὸ λογικὸ συμπερασμὸ τῶν θεωρημάτων στὰ *Στοιχεῖα*, παραδοχῶν ποὺ δὲν περιλαμβάνονται στὴν Εὐκλείδεια ἀξιωματική. Ἀκόμη ἀπὸ τὴν ἀρχαιότητα ἀσκήθηκε ἕνα εἶδος κριτικῆς γιὰ μερικὰ ἀπὸ τὰ κενὰ αὐτά[27], χωρὶς ὅμως, μὲ τὴν κριτικὴ αὐτή, τὸ ἐπίτευγμα τοῦ Εὐκλείδη νὰ χάση τίποτε ἀπὸ τὴν ἀξία του, οὔτε νὰ μειωθῆ καθόλου ἡ σημασία καὶ ἡ ἐπίδραση ποὺ εἶχε τὸ ἐπίτευγμα αὐτὸ στὴ μαθηματικὴ σκέψη.

Συνέπεια τῶν ὡς ἄνω ἐρευνῶν ἦταν ἡ προσφυγὴ σὲ διάφορα νέα συστήματα ἀξιωμάτων, συστήματα ἀπαλλαγμένα ἀπὸ τὶς προηγούμενες ἀτέλειες[28]. Χαρακτηριστικὸ γνώρισμα, σὲ μεταγενέστερη ἐξέλιξη τῆς ἀξιωματικῆς, εἶναι ὅτι σ' αὐτὴ τὰ γεωμετρικὰ ἀντικείμενα ποὺ θεωροῦμε καὶ οἱ σχέσεις ἀνάμεσά τους δὲν μᾶς εἶναι ἐξ ἀρχῆς γνωστὲς καὶ ὅτι τὰ ἀξιώματα χρησιμεύουν, κατὰ κάποιο τρόπο, γιὰ ἕνα ἔμμεσο ὁρισμὸ τῶν ἀρχικῶν ὅρων. Ἔτσι, ἡ σημαντικὴ διαφορὰ ἀνάμεσα στὴ νέα καὶ τὴν παλαιὰ ἀξιωματικὴ συνίσταται σὲ τοῦτο: Ὅτι, ἐνῶ στὴν παλαιὰ δεχόταν τὴν ἀλήθεια τῶν ἀξιωμάτων ὡς προφανῆ, στὴ νέα τὰ ἀξιώματα ἐμφανίζονται ὡς προτάσεις ἰσοδύναμες μὲ τὰ θεωρήματα, καὶ ὄχι ὡς προτάσεις καθ' ἑαυτὲς φανερὲς ἢ προτάσεις ποὺ δὲν ἔχουν ἀνάγκη ἀπόδειξης, ὡστόσο ὡς προτάσεις κατάλληλες γιὰ νὰ χρησιμεύσουν γιὰ τὴ συλλογιστικὴ πρόβαση τῆς παραγωγῆς τῶν θεωρημάτων μας.

---

25. E.W. Beth, *Mathematical Thought,* Dortrecht (Reidel Publ.) 1965, σελ. 16.

26. Κατὰ τὸν F. Klein (1849-1925) ἠμπορεῖ κανεὶς νὰ σκεφθῆ μία γωνία ποὺ εἶναι τὸ χιλιοστὸ μιᾶς ἄλλης, χωρὶς νὰ εἶναι σὲ θέση νὰ διακρίνη ἀνάμεσα στὶς πλευρές της (Βλ. J. Hadamard, στὸ βιβλίο ποὺ ἀναφέραμε παραπάνω, σελ. 88 σημ.).

27. Οἱ σχετικὲς πληροφορίες προέρχονται ἀπὸ τὸν νεοπλατωνικὸ σχολιαστὴ Πρόκλο.

28. Ἐπανεξέταση τῆς Εὐκλείδειας ἀξιωματικῆς, σὲ τρόπο ὥστε νὰ ἀνταποκρίνεται αὐτὴ στὶς νέες ἀπαιτήσεις τῆς λογικῆς αὐστηρότητας, ἔγινε ἀπὸ τοὺς **M. Pasch** (1882), **G. Peano** (1889), **G. Veronese** (1891), **M. Pieri** (1898), **D. Hilbert** (1899), **O. Veblen** (1911).

Ὡρισμένες ὅμως ἀτέλειες ποὺ παρουσιάζει ἡ χρήση τῆς καθημερινῆς γλώσσας κατὰ τὴ διατύπωση τῶν ἀξιωμάτων, ὡδήγησαν τοὺς μαθηματικοὺς ἀκόμη πιὸ πέρα· στὴ σύγχρονη, λεγόμενη τυπική, ἀξιωματική, δηλαδὴ στὴ διαμόρφωση τῶν ἀξιωμάτων σὲ ἁπλοὺς τύπους, ὅπως στὴ διαμόρφωση σὲ τύπους καὶ αὐτῶν τῶν ἴδιων τῶν ἀποδείξεων.

Πρέπει νὰ παρατηρήσωμε, στὸ σημεῖο αὐτό, ὅτι ἡ ἀπαλλαγὴ τῶν ἀξιωμάτων ἀπὸ τὴν παραδοχὴ τῆς προφανοῦς ἀλήθειάς τους, ἀντισταθμίζεται τώρα μὲ τὴν ἐμφάνιση μερικῶν νέων προβλημάτων ἀπὸ τὰ ὁποῖα τὰ πιὸ σημαντικὰ εἶναι ἡ ἀνάγκη τῆς διαπίστωσης, ὅτι τὸ σύστημα ἀξιωμάτων ὄχι μόνο δὲν παρουσιάζει μὲ τὴ νέα ἐκδοχὴ ἀντιφάσεις, εἶναι ὅπως λέγομε συμβιβαστό[29], ἀλλὰ εἶναι καὶ πλῆρες, μὲ τὸ νόημα ὅτι κάθε θεώρημα (ἀληθὴς πρόταση) τῆς Γεωμετρίας ποὺ θεωροῦμε ἠμπορεῖ νὰ συναχθῆ λογικὰ ἀπὸ τὰ ὑπ' ὄψη ἀξιώματα.

Ἡ ἀνάγκη τοῦ νὰ προσφύγη κανεὶς στὴν παραπάνω νέα ἀντίληψη γιὰ τὴ φύση τῶν ἀξιωμάτων, ὀφείλεται στὴν ἀκόλουθη ἀτέλεια τῆς παλαιᾶς ἐκδοχῆς: Κατὰ τὴν Εὐκλείδεια ἀξιωματικὴ βασίζεται κανεὶς στὴν προφανῆ ἀλήθεια τῶν ἀξιωμάτων εἴτε γιατὶ αὐτά, ὅπως ἐπρέσβευε ὁ Ἀριστοτέλης, ἦταν ἀποτέλεσμα ἐπαγωγῆς ποὺ παίρναμε ἀπὸ τὶς ἐντυπώσεις τῆς ἐπαίσθησης εἴτε γιατί, ὅπως ἐπίστευε ὁ Kant, ἦταν προϊὸν τῆς ἐνόρασής μας τοῦ χώρου. Κατόπιν αὐτοῦ, ἦταν φυσικὸ νὰ ἰσχυρίζεται κανείς, ὅτι τὸ σύστημα ἀξιωμάτων δὲν ἠμποροῦσε νὰ παρουσιάζη ἀντιφάσεις, ὅτι δηλαδὴ εἶναι καθ' ἑαυτὸ συμβιβαστό. Ὅμως, ἀκριβῶς τὶς μεταφυσικὲς πεποιθήσεις αὐτὲς ἦλθαν νὰ ἀναιρέσουν οἱ ἔρευνες ἐπάνω στὰ κενὰ ποὺ εἶχε ἡ ἀξιωματικὴ τῶν *Στοιχείων*, ἔρευνες ποὺ ἔγιναν ἀφορμὴ νὰ ἐπινοηθοῦν οἱ μὴ Εὐκλείδειες Γεωμετρίες. Κατὰ τὴν ὡς ἄνω νέα ἐκδοχὴ τῶν ἀξιωμάτων, αὐτὰ οὔτε εἶναι προτάσεις ἀληθεῖς οὔτε ψευδεῖς, ἐφ' ὅσον στεροῦνται ἀπὸ ὁποιαδήποτε σημασία (περιεχόμενο).

Ὡστόσο, τὰ ἐν λόγω ἀξιώματα ἀποκτοῦν τὴν ἰδιότητα τῆς ἀλήθειας ἢ τοῦ ψεύδους, ὅταν δοθῆ σ' αὐτὰ περιεχόμενο, δηλαδὴ ὅταν δοθῆ συγκεκριμένη ἑρμηνεία, ἀλλιῶς ἐφαρμογή, στοὺς ὅρους ποὺ τὰ ἀξιώματα αὐτὰ περιέχουν σὲ τρόπο βέβαια ὥστε νὰ ἰσχύη τὸ σύστημα ἀξιωμάτων. Μὲ τὸν τρόπο αὐτὸν διακρίνομε τὶς λεγόμενες καθαρὲς ἀπὸ τὶς ἐφαρμοσμένες Γεωμετρίες. Στὶς καθαρὲς Γεωμετρίες καταργεῖται, μαζὶ μὲ τὴν ἀριστοτελικὴ παραδοχὴ τοῦ προφανοῦς τῶν ἀξιωμάτων, καὶ ἡ παραδοχὴ τῆς ἀλήθειας τῶν προτάσεων. Ἐξ ἄλλου τὶς καθαρὲς αὐτὲς Γεωμετρίες εἶχε ὑπ' ὄψη ὁ B. Russel (1872-1970), ὅταν διετύπωνε τὸν περίφημο ὁρισμό του: «Τὰ Μαθηματικὰ εἶναι ἡ ἐπιστήμη ὅπου δὲν ξεύρομε

---

29. Βασιλείου, *Φιλοσοφία τῶν Μαθηματικῶν*, σελ. 42.

για τί μιλᾶμε, οὔτε κι ἂν αὐτὸ γιὰ τὸ ὁποῖο μιλᾶμε εἶναι ἀληθινό»[30].

Γεννιέται τώρα τὸ ἐρώτημα: Πότε μιὰ ἐφαρμοσμένη Γεωμετρία ἀνταποκρίνεται στὴ δομὴ τοῦ φυσικοῦ χώρου, στὴν Εὐκλείδεια ἢ στὴ μὴ Εὐκλείδεια περίπτωση; Ἡ ἀπάντηση ἔχει ὡς ἑξῆς: Καὶ οἱ δύο περιπτώσεις, δηλαδὴ τῆς Εὐκλείδειας ἢ μὴ δομῆς τοῦ φυσικοῦ χώρου, εἶναι δυνατές. Τὸ μόνο ποὺ ἠμπορεῖ κανεὶς νὰ εἰπῆ εἶναι, ὅτι πιὸ σκόπιμη ἀπὸ τὶς δυὸ ἐφαρμογὲς εἶναι ἐκείνη ποὺ κάνει ἁπλούστερη τὴν περιγραφὴ καὶ ἐξήγηση τῶν φαινομένων τοῦ φυσικοῦ κόσμου.

Ὅ,τι εἰπώθηκε γιὰ τὴ Γεωμετρία ἰσχύει γιὰ ὁποιοδήποτε μαθηματικὸ κλάδο, ὅπως καὶ γιὰ κάθε ἀποδεικτικὴ ἐπιστήμη. Καὶ πάλιν ἔχομε τὴν καθαρὴ ἐπιστήμη, αὐτὴ ποὺ παριστάνει τὴν καθαρὴ δομή της, καὶ τὴν ἐφαρμοσμένη, αὐτὴ πού, λόγου χάρη στὴν περίπτωση τῆς θεωρητικῆς Φυσικῆς, τὴ συνδέει μὲ τὴ φυσικὴ πραγματικότητα. Δὲν εἶναι ὅμως ὀρθὸ νὰ νομισθῆ ὅτι οἱ προτάσεις μιᾶς ἐπιστήμης μὲ τὴν ἐφαρμογή τους γίνονται πάντοτε καὶ ἐμπειρικές, ὅτι συνδέονται, μὲ ἄλλες λέξεις, μὲ αὐτὴ τὴν πραγματικότητα.

9. Ὕστερα ἀπὸ ὅσα εἴπαμε πιὸ πάνω, μὲ τὸ νὰ βγάλωμε ἀπὸ ἕνα καθαρὰ μαθηματικὸ κλάδο κάθε μὴ λογικὸ στοιχεῖο καὶ νὰ περιορισθοῦμε ἀποκλειστικὰ στὴ λογικὴ παραγωγὴ τῶν προτάσεων τοῦ κλάδου, δὲν κάνομε τίποτε ἄλλο ἀπὸ τὸ νὰ δημιουργοῦμε μιά, ὅπως λέγομε, καθαρὴ δομή, δηλαδὴ δομὴ χωρὶς ὁποιοδήποτε συγκεκριμένο περιεχόμενο. Ἂς παρακολουθήσομε, ὅμως, πιὸ κοντὰ τὴ κατασκευὴ μιᾶς τέτοιας δομῆς, αὐτῆς ποὺ ὡδήγησε στὰ λεγόμενα τυπικὰ Μαθηματικά. Στὴν οὐσία πρόκειται γιὰ ἕνα πλήρη διαχωρισμὸ ἀνάμεσα στὴ μορφὴ καὶ τὸ περιεχόμενο (τῆς θεωρίας μας), θέμα πού, ὅπως ξεύρομε, ἀπασχόλησε κατὰ καιροὺς τὸν φιλοσοφοῦντα ἄνθρωπο, ἀκόμη καὶ στὴν ἀρχαιότητα[31].

Προτάσεις ἀπὸ τὶς ὁποῖες ἀφαιρέθηκε κάθε μὴ λογικὸ στοιχεῖο δὲν εἶναι, ὅπως εἴπαμε, οὔτε ἀληθεῖς οὔτε ψευδεῖς, δὲν εἶναι ἄρα γνήσιες προτάσεις. Γιὰ διάκριση ἀπὸ τὶς τελευταῖες τὶς λέγομε συναρτησιακὲς προτάσεις, δανειζόμενοι τὸν ὅρο ἀπὸ τὴν Τυπικὴ Λογική. Στὴ θέση, τώρα, ὡρισμένων λέξεων θέτομε ἁπλῶς σύμβολα χωρὶς ὁποιαδήποτε σημασία καὶ ἄλλα ποὺ ἀντιπροσωπεύουν λογικὲς ἔννοιες. Μερικὰ ἀπὸ τὰ πρῶτα σύμβολα τὰ λέγομε μεταβλητές, κι αὐτὸ γιατὶ στὴν περίπτωση ἑρμηνείας (ἀντικατάσταση τῶν μεταβλητῶν μὲ ἀφηρημένα πράγματα) ἢ ἐφαρμογῆς (ἀντικατάσταση τῶν μεταβλητῶν μὲ συγκεκριμένα),

30. «The International Monthly» 4 (1901) 81.
31. Schlick, ὅ.π., 137.

πού θά θέλαμε νά κάνωμε στή συναρτησιακή πρόταση, τά σύμβολα αυτά τά άντικαθιστούμε μέ διαφορετικές κάθε φορά σταθερές έννοιες. Τά άλλα σύμβολα είναι οί λεγόμενες σ τ α θ ε ρ έ ς. Στό παράδειγμα, λόγου χάρη, τής συναρτησιακής πρότασης μέ δύο μεταβλητές «ό χ είναι ψ», άν άντικαταστήσωμε τίς μεταβλητές χ, ψ μέ όρους πού έχουν σημασία, τότε καταλήγομε σέ γνήσιες προτάσεις, άλλες άληθείς καί άλλες ψευδείς, όπως «ό δύο είναι άρτιος», «ό πέντε είναι τέλειο τετράγωνο»[32].

Θά ήμποροῦσε κανείς νά παρομοιάση τό ρόλο τῶν μεταβλητῶν, σέ μιά συναρτησιακή πρόταση μέ τά κενά (πρός συμπλήρωση) σ' ένα έρωτηματολόγιο. Όπως τό έρωτηματολόγιο αυτό άποκτᾶ σημασία μέ τή συμπλήρωση τῶν κενῶν (βέβαια μέ λέξεις πού δίνουν νόημα στίς φράσεις του), έτσι καί ένα σύστημα άπό συναρτησιακές προτάσεις άποκτᾶ νόημα μέ τήν άντικατάσταση τῶν μεταβλητῶν μέ κατάλληλες σταθερές. (Φυσικά ή ίδια σταθερά πρέπει ν' άντικαταστήση παντοῦ μιά καί τήν ίδια μεταβλητή). Καί στήν καθημερινή μας άκόμη ζωή κάνομε κάποτε (όχι ένσυνείδητα) χρήση συναρτησιακῶν προτάσεων, όταν χρησιμοποιοῦμε, σέ φράσεις, λέξεις χωρίς καθωρισμένη έννοια καί στίς όποίες έπομένως καθένας ήμπορεί νά δίνη διαφορετική σημασία. Ή χρήση τέτοιων μή γνησίων προτάσεων παρέχει πολλές φορές άφορμή σέ άντεγκλήσεις ή σέ άσκοπες κι άτέρμονες συζητήσεις[33].

Ό ρόλος τόν όποίον παίζουν οί συναρτησιακές προτάσεις στήν άξιωματική όποιουδήποτε καθαροῦ μαθηματικοῦ κλάδου, ήμπορεί σέ γενικές γραμμές νά κατανοηθῆ άπό τά έξῆς : 'Αναχωρεί κανείς άπό μερικές μεταβλητές καί άπό συναρτησιακές προτάσεις (πεπερασμένες τό πλῆθος), πού περιέχουν τίς μεταβλητές αυτές, μαζί μέ σταθερές γιά λογικές έννοιες, όπως τό ό χ ι, τό κ α ί, τό ε ί τ ε, τό έ π ε τ α ι. 'Από τίς άρχικές αυτές συναρτησιακές προτάσεις (άξιώματα) καί μέ βάση τό συλλογιστικό σχῆμα modus ponens παράγομε τίς λοιπές (συναρτησιακές) προτάσεις τοῦ θεωρούμενου κλάδου. Τόν κλάδο αυτό τόν λέγομε τώρα άλλιῶς καί ύ π ο θ ε τ ι κ ο - π α ρ α γ ω γ ι κ ό, λόγω τῆς συντελούμενης παραγωγῆς καί τῆς ύποθετικῆς φύσης τοῦ ώς άνω συλλογιστικοῦ σχήματος.

'Ιδιαίτερα, στήν περίπτωση τῆς Γεωμετρίας καί σέ συσχετισμό μέ όσα πιό πάνω είπαμε γιά τίς a priori καί συνθετικές προτάσεις, είναι εὔλογο νά έρωτήση κανείς γιά τή φύση τῶν γεωμετρικῶν προτάσεων. Προκειμένου ν' άπαντήσωμε στό έρώτημα αυτό είναι άνάγκη νά διακρίνωμε τήν καθαρή άπό τήν έφαρμοσμένη Γεωμετρία. 'Επειδή στήν καθαρή Γεωμετρία βασίζεται κανείς μόνο στή λογική μορφή καί τή παραγωγή τῶν

---

32. Φ. Βασιλείου, *'Επί τῆς ούσίας τῶν Μαθηματικῶν*, 'Αθῆναι 1965, σελ. 103.
33. Βασιλείου, ό.π., 104.

προτάσεών της, οἱ ἐν λόγῳ προτάσεις δὲν ἠμποροῦν νὰ εἶναι συνθετικές, ἄρα εἶναι ἀναλυτικές, συνεπῶς καὶ a priori. Ἀντίθετα, στὴν ἐφαρμοσμένη Γεωμετρία ἐργαζόμαστε μὲ ἐμπειρικές, ἀλλιῶς a posteriori, προτάσεις, ἄρα συνθετικές. Στὴν περίπτωση αὐτὴ ἡ διαπίστωση τῆς ἀλήθειας ἢ τοῦ ψεύδους τῶν προτάσεων εἶναι ζήτημα ἁπλῆς ἐμπειρίας.

10. Ὁ M. Schlick ἔγραφε τὸ 1932 : «Μὲ τὴν ἐξέλιξη τῆς ἐπιστήμης στὴ διάρκεια τῶν δύο ἢ τριῶν τελευταίων δεκαετιῶν, ἡ δυνατότητα καὶ ἡ ἀναγκαιότητα μιᾶς αὐστηρῆς διάκρισης ἀνάμεσα στὴ μορφὴ καὶ τὸ περιεχόμενο ἄρχισε νὰ γίνεται ὁλοένα καὶ πιὸ φανερὴ καὶ ἀναγνωρίσθηκε πληρέστερα ἡ μεγάλη σημασία τῆς δομῆς. Ἡ βαθμιαία ἀνατολὴ τῆς ἀλήθειας αὐτῆς — ποὺ ἀκόμη δὲν κατανοήθηκε πλήρως — μοῦ φαίνεται ὡς τὸ σπουδαιότερο ἐπίτευγμα τῆς σύγχρονης ἐπιστημολογίας... Ἡ ἐπιστήμη δὲν εἶναι συλλογὴ ἀπὸ γνώσεις γεγονότων (προτάσεις γιὰ γεγονότα), ἀλλὰ σύστημα ἐξηγητικῆς γνώσης (περιγραφὴ μὲ νόμους). Ὅσο γίνεται τελειότερη, ὅσο δηλαδὴ περισσότερο συνδέονται λογικὰ οἱ προτάσεις της, τόσο διαυγέστερα φανερώνεται ὁ τυπικὸς χαρακτήρας τῆς γνώσης, ἀκόμη καὶ στὸν ἀνειδίκευτο· ἡ ἐπιστήμη ντύνεται μὲ μαθηματικὸ ἔνδυμα»[34].

Πρέπει, ὅμως, νὰ τονισθῆ καὶ πάλιν, ὅτι ἡ θεώρηση τῶν μαθηματικῶν κλάδων ὡς καθαρῶν συστημάτων ἐγείρει νέα καὶ δύσκολα προβλήματα, ὅπως ἐκεῖνα γιὰ τὴ συμβιβαστότητα καὶ πληρότητα τῶν ἀξιωμάτων. Ἔτσι καὶ στὰ καθαρὰ Μαθηματικά, τὸ νὰ καταφύγη κανεὶς σὲ προτάσεις μὲ περιεχόμενο, γιὰ τὴ θεώρηση τῶν προβλημάτων ἐκείνων, παρουσιάζεται ὡς ἐπιτακτικὴ ἀνάγκη. Ὡστόσο, ἡ θεώρηση αὐτὴ ἐκφεύγει ἀπὸ τὰ πλαίσια τῆς παρούσης μελέτης καὶ ἀποτελεῖ ἰδιαίτερο μαθηματικὸ κλάδο. Ἀναφέρομε μόνον ἐδῶ, ὅτι ἡ νέα προβληματική, ποὺ συνδέεται ἄμεσα καὶ μὲ τὴ σύγχρονη ἔρευνα γιὰ μιὰ ἀσφαλῆ θεμελίωση ὁλόκληρης τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης, ἀποτέλεσε τὸ ἀποφασιστικὸ βῆμα γιὰ τὶς κατευθύνσεις ποὺ ἐπῆρε σήμερα ἡ θεωρία τῆς ἀποδεικτικῆς ἐπιστήμης ξεκινώντας ἀπὸ τὴν ἀριστοτελική. Οἱ κατευθύνσεις αὐτές, ποὺ ἀντιπροσωπεύονται ἀπὸ Σχολὲς ὅπως ἡ Λογικιστική, ἡ Ἐνορατικὴ καὶ ἡ Φορμαλιστική[35], ζήτησαν ἐξ ἀρχῆς νὰ κρατήσουν ὅσο τὸ δυνατὸ περισσότερες ἀπὸ τὶς ἀριστοτελικὲς παραδοχὲς γιὰ μιὰ ἀποδεικτικὴ (παραγωγικὴ) ἐπιστήμη. Ὁπωσδήποτε, γρήγορα βρέθηκαν στὴν ἀνάγκη νὰ ἐγκαταλείψουν μερικὲς ἀπὸ τὶς ἐν λόγῳ παραδοχὲς — ἄλλοι ἄλλες. Ἰδιαίτερα ἡ παραδοχὴ γιὰ τὴν ὕπαρξη τῶν μαθηματικῶν ἀντικειμένων, δηλαδὴ τὸ ὀντο-

34. Schlick ὅ.π., 137
35. Βασιλείου, *Φιλοσοφία τῶν Μαθηματικῶν*, 18, 22, 25.

λογικὸ μαθηματικὸ πρόβλημα, ἔγινε ἀφορμὴ πολλῶν ἀποκλίσεων στὶς κατευθύνσεις ποὺ ἀκολούθησαν.

Ὁ καθαρὰ τυπικὸς χαρακτήρας στὶς μαθηματικὲς θεωρίες εἶχεν ἐξ ἄλλου ὡς ἐπακόλουθο τὴν τυποποίηση καὶ τῆς ἴδιας τῆς γλώσσας ποὺ χρησιμοποιεῖται στὰ Μαθηματικά. Αὐτὸ συμπεραίνεται κιόλας ἀπὸ ὅσα εἴπαμε στὰ προηγούμενα, ἀναφορικὰ μὲ τὴν ἀξιωματικοποίηση στὰ καθαρὰ Μαθηματικά. Παρ' ὅλον ποὺ οἱ δύο αὐτὲς τυποποιήσεις, τῶν Μαθηματικῶν καὶ τῆς Γλώσσας (ὅπως τῆς γλώσσας τῆς μαθηματικῆς Λογικῆς), βρίσκονται χωρὶς ἄλλο σὲ ἄμεση μεταξύ τους σχέση, ὅμως δὲν παύουν νὰ εἶναι γιὰ πολλοὺς δύο διαφορετικὲς καὶ ἀνεξάρτητες δραστηριότητες τοῦ ἀνθρώπινου μυαλοῦ. Ἐνῶ, λόγου χάρη, μιὰ βασικὴ λειτουργία τῆς γλώσσας εἶναι ἡ ἔκφραση (περιγραφή), γιὰ τὰ Μαθηματικὰ μιὰ τέτοια λειτουργία πρέπει νὰ ἀναζητηθῆ στὴν τυπικὴ τεχνικὴ κατασκευῆς. Ἄλλωστε, ἂς μὴ λησμονοῦμε ὅτι γιὰ μερικοὺς σύγχρονους μαθηματικοὺς (P. Lorenzen) τὰ Μαθηματικὰ χαρακτηρίζονται ὡς ἡ σπουδὴ καὶ ἔρευνα τῶν διαφόρων μαθηματικῶν Λογισμῶν[36].

Θὰ ὡδηγοῦσε πολὺ μακρυά, ἂν θέλαμε νὰ μιλήσωμε πιὸ διεξοδικὰ γιὰ τὴν προσπάθεια ποὺ γίνεται, στὴ σύγχρονη ἐποχή, σχετικὰ μὲ τὴν ἐφαρμογὴ καὶ στὴν ἐπιστήμη τῶν ἀρχῶν ποὺ ἰσχύουν στὴ Λογικὴ τῆς Γλώσσας. Σημειώνομε μόνον, ὅτι ἡ μόνη μαθηματικὴ Σχολή, ποὺ ἀρνεῖται ὁποιαδήποτε οὐσιαστικὴ σχέση ἀνάμεσα στὰ Μαθηματικὰ καὶ τὴ μαθηματικὴ Γλώσσα, εἶναι ἡ Ἐνορατικὴ — Σχολὴ ποὺ ἀναφέραμε κιόλας παραπάνω.

Κατὰ τὸν E. Beth[37], τὸ ἐνδιαφέρον γιὰ τὴ Γλώσσα, σὲ σχέση μὲ τὰ Μαθηματικά, βασίζεται στοὺς ἑξῆς λόγους : Πρῶτα, σὲ ἀντίδραση πρὸς τὸν πλατωνισμὸ κατὰ τὴν προσπάθεια γιὰ εὕρεση κάποιου, ὅσο τὸ δυνατόν, συγκεκριμένου ἀντικειμένου γιὰ τὰ Μαθηματικά, καὶ ἔπειτα, στὴν ἀνάγκη γιὰ μιὰ πιὸ βαθειὰ ἔρευνα τῆς λογικῆς δομῆς κάθε μαθηματικῆς θεωρίας, ἔρευνα ποὺ κατέστησε ἐπιτακτικὴ ἡ ἀνάπτυξη τῶν σύγχρονων ἀφῃρημένων Μαθηματικῶν.

Ἀλλὰ καὶ σχετικὰ μὲ τὸν ἐμπειρισμὸ στὰ Μαθηματικά, στὴ σύγχρονη ἐποχὴ σημειώθηκε σημαντικὴ πρόοδος. Εἶναι ἀλήθεια, ὅτι καὶ οἱ πιὸ ριζοσπαστικοὶ ἐμπειριστὲς δὲν πιστεύουν πιὰ πὼς τὰ καθαρὰ Μαθηματικὰ βασίζονται σὲ ἐμπειρικὰ δεδομένα, ὅπως τοῦτο συνέβαινε ἄλλοτε. Οἱ σύγχρονοι ἐμπειριστὲς ἀντιπροσωπεύουν μιὰ πολὺ εὐρύτερη ἀντίληψη γιὰ ὅ,τι λέγομε ἐμπειρία. Οὔτε λίγο οὔτε πολύ, ἡ ἔννοια τῆς

36. P. Lorenzen, *Ist Mathematik eine Sprache?*, «Synthese» 10 (1956).
37. Beth, *Mathematical Thought*, 171.

ἐμπειρίας τείνει σήμερα νὰ περιλάβη γιὰ τοὺς ἐμπειριστὲς ὁλόκληρο τὸ περιεχόμενο τῆς πνευματικῆς μας ζωῆς[38].

11. Ἀναφορικὰ μὲ τὶς διάφορες κατευθύνσεις ποὺ ἀκολουθοῦνται σήμερα γιὰ τὴ θεωρία τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης — κατευθύνσεις γιὰ τὶς ὁποῖες ἔγινε λόγος στὴν προηγούμενη παράγραφο — ἰδιαίτερο ἐνδιαφέρον παρουσιάζουν ὡρισμένες ἀπόψεις πού, καταλήγοντας, δὲν θὰ ἠθέλαμε νὰ παρασιωπήσωμε. Μιὰ τέτοια ἄποψη εἶναι, πρῶτα, ἐκείνη ὅπου ἡ δόμηση τῆς ὑπ' ὄψη ἐπιστήμης ζητεῖται νὰ γίνη μὲ τὸν τρόπο πού, πολλὲς φορές, ἀκολουθεῖ κανεὶς στὶς φυσικὲς ἐπιστῆμες. Πρόκειται γιὰ τὴν ἵδρυση μιᾶς θεωρίας ἐπάνω σὲ ἐξηγητικὲς ὑποθέσεις. Γιὰ τὴ διασάφηση τοῦ ὅρου ἂς ἀναφέρομε, ἀπὸ τὴ Φυσική, τὸ παράδειγμα τῶν ἠλεκτρομαγνητικῶν φαινομένων, μὲ τὰ ὁποῖα ἠμπορεῖ κανεὶς νὰ ἐξηγήση, λόγου χάρη, τὸ γαλάζιο χρῶμα τοῦ οὐρανοῦ, ὅπως τὸν βλέπομε σὲ καλὲς καιρικὲς συνθῆκες. Ἡ ἐξήγηση αὐτὴ γίνεται, ὡς γνωστόν, μὲ βάση ἕνα σύστημα ἀπὸ ἀξιώματα ποὺ ἀφοροῦν σὲ ὑποθέσεις ἤ, ἀλλιῶς, σὲ ὑποθετικοὺς νόμους γιὰ τὰ ἠλεκτρομαγνητικὰ (καὶ ἄλλα) φαινόμενα καὶ μὲ τὴ χρήση τοῦ λογικοῦ συλλογισμοῦ. Μάλιστα, μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν δὲν ἐπιτυγχάνομε τὴν ἐξήγηση μόνον τοῦ ὑπ' ὄψη φαινομένου (τοῦ χρώματος τοῦ οὐρανοῦ), ἀλλὰ εἴμαστε καὶ σὲ θέση νὰ τὸ ἀναπαράγωμε στὸ ἐργαστήριο μὲ σκοπὸ τὴν ἐπαλήθευση τῆς ἰσχύος τοῦ ἀξιωματικοῦ συστήματος ἀπὸ τὸ ὁποῖο ξεκινήσαμε. Ὅπως βλέπομε, ὁ ρόλος ποὺ παίζουν ἐδῶ τὰ ἀξιώματα εἶναι ἁπλῶς ἐξηγητικός, χωρὶς διόλου νὰ μᾶς ἀπασχολῆ ἡ ἀλήθειά τους ἢ νὰ μᾶς ἐνδιαφέρη κἂν τὸ πρόβλημα, κατὰ πόσον ἡ ἰσχὺς τῶν ἀξιωμάτων αὐτῶν εἶναι πιὸ βάσιμη ἢ πιὸ ἀξιόπιστη ἀπ' αὐτὸ τοῦτο τὸ φαινόμενο ποὺ ζητᾶμε νὰ ἐξηγήσωμε μὲ τὰ ἐν λόγω ἀξιώματα.

Μιὰ δεύτερη ἄποψη, ποὺ ἀντιμετωπίζομε σήμερα γιὰ τὴ θεωρία τῆς μαθηματικῆς ἐπιστήμης, εἶναι ἐκείνη κατὰ τὴν ὁποίαν εἶναι σκόπιμο νὰ ἐκλεγῆ, γιὰ τὴ διατύπωση ὡρισμένης μαθηματικῆς θεωρίας, ὄχι πάντοτε ἡ ἀριστοτελικὴ Λογική, ἀλλὰ κάποια ἄλλη «πολυτιμικὴ» Λογική[39], μάλιστα διάφορη γιὰ τὶς διάφορες θεωρίες. Λέγοντες «πολυτιμικὴ» Λογικὴ ἐννοοοῦμε τὸ ἑξῆς : Στὴν ἀριστοτελικὴ Λογικὴ τὸ σύνολον ὅλων τῶν (σταθερῶν) κατηγορικῶν ἀποφάνσεων χωρίζεται σὲ δύο τάξεις, τὴν τάξη τῶν ἀληθῶν κι ἐκείνη τῶν ψευδῶν ἀποφάνσεων. Τὶς τάξεις αὐτὲς τὶς λέμε καὶ τιμὲς ἀλήθειας. Ὅμως, οἱ δύο αὐτὲς τιμὲς δὲν

---

38. Beth, *The Foundations*, 49.

39. Προτιμήσαμε τὸν ὅρον αὐτὸν ἀντὶ τοῦ «πολυσήμαντη», ποὺ χρησιμοποιήσαμε σὲ προηγούμενες ἐργασίες μας.

ἀποτελοῦν ἀναγκαστικὰ προϋπόθεση γιὰ τὴ θεωρούμενη Λογική. Θὰ ἦταν ἐντελῶς δυνατὸν νὰ φαντασθῆ κανεὶς τὸν ἄνω χωρισμὸ τῶν ἀποφάνσεων ὄχι σὲ δύο τάξεις, τῶν ἀληθῶν καὶ τῶν ψευδῶν, ἀλλὰ σὲ περισσότερες, ἐνδεχομένως σὲ ἄπειρες τάξεις. Τέτοια Λογική, μὲ περισσότερες ἀπὸ δύο τιμὲς ἀλήθειας, λέγεται «πολυτιμική».

Ἀξιοσημείωτο εἶναι, ὅτι ἡ χρήση τῶν ὡς ἄνω Λογικῶν δὲν εἶχε, μέχρι πρὸ ὀλίγου, κανένα ἄλλο ἐνδιαφέρον ἐκτὸς ἀπὸ τὸ καθαρὰ θεωρητικό. Εἶναι γεγονός, ὅτι κατὰ τὴν ἵδρυση τῆς Κβαντομηχανικῆς ἔγινε κιόλας ἀπόπειρα γιὰ τὴν εἰσαγωγὴ Λογικῶν μὲ τρεῖς τιμὲς ἀλήθειας, τὴν ἀλήθεια, τὸ ψεῦδος καὶ τὴν ἀπροσδιοριστία. Ὡστόσο δὲν ἠμπορεῖ νὰ εἰπωθῆ θετικά, ὅτι τὰ ἀποτελέσματα τῆς ἀπόπειρας αὐτῆς ἦταν τότε τελείως ἱκανοποιητικά.

Τέλος, ἔχομε καὶ τὴ λεγόμενη κατασκευαστικὴ ἄποψη —ἰδιαίτερα τὸν κατασκευαστικὸ φορμαλισμὸ —ὅπου θεωροῦμε ἐκεῖνα μόνον τὰ (μαθηματικὰ) ἀντικείμενα γιὰ τὰ ὁποῖα ἔχομε κατασκευαστικὲς μεθόδους παραγωγῆς τους. Οἱ μέθοδοι αὐτὲς παρέχονται κυρίως μὲ κατασκευαστικὲς συναρτήσεις ἀκεραίων (ἀριθμῶν). Ἔτσι, ἔχομε λόγου χάρη τὶς γενικὲς ἀναδρομικὲς συναρτήσεις. Μὲ τὴν κατασκευαστικὴ αὐτὴ ἄποψη περιορίζεται, ὁπωσδήποτε, ὁ κόσμος τῶν μαθηματικῶν ὀντοτήτων ποὺ θεωροῦμε. Εἶναι ἀξιοσημείωτο, ὅτι ὥς σήμερα δὲν ἔχει ἐξετασθῆ ἡ διάκριση ἀνάμεσα στὰ ἀντικείμενα γιὰ τὰ ὁποῖα εἶναι πραγματικὰ δυνατὴ ἡ κατασκευὴ καὶ στὰ ἀντικείμενα γιὰ τὰ ὁποῖα ἡ κατασκευὴ εἶναι (τουλάχιστον) κατ' ἀρχὴν δυνατή.

Στὴν ἀδυναμία ποὺ παρουσιάσθηκε γιὰ ἕνα ἀκριβῆ ὁρισμὸ τῆς ἔννοιας τῆς κατασκευαστικότητας, πολλοὶ μαθηματικοὶ βρῆκαν ὡς διέξοδο τὴν ταύτιση τῆς ἐν λόγῳ ἔννοιας μ' ἐκείνη τῆς γενικῆς ἀναδρομικότητας, ἔννοιας ποὺ εἶναι πολὺ πιὸ πρόχειρη καὶ προσιτὴ σὲ μαθηματικὸ ὁρισμό. Πρέπει νὰ σημειωθῆ, ὅτι ἡ ἔννοια τῆς κατασκευαστικότητας, ποὺ ὥς τώρα χρησιμοποιήθηκε μὲ νόημα ὄχι τελείως καθωρισμένο, εἶναι ἀνάμεσα σ' ἄλλους καὶ ἡ θεμελιακὴ ἔννοια τῆς Σχολῆς ποὺ ἀναφέραμε κιόλας στὴν προηγούμενη παράγραφο, συγκεκριμένα τῆς Ἐνορατικῆς Σχολῆς. Ἀκόμη, ὅμως, πιὸ ἀξιοπρόσεκτο εἶναι τὸ ἀπροσδόκητο συμπέρασμα, στὸ ὁποῖον κατέληξε ἡ μαθηματικὸς R. Péter καὶ ποὺ δημοσιεύθηκε στὰ Πρακτικὰ ἑνὸς Colloquium, τοῦ 1959, στὸ Amsterdam: «Φαίνεται, πῶς τὴν ἔννοια τῆς κατασκευαστικότητας δὲν ἠμπορεῖ διόλου νὰ τὴν συλλάβη κανεὶς χωρὶς νὰ ὑποπέση σὲ φαῦλο κύκλο»[40].

---

40. *Rekursivität und Konstruktivität*, στὸ *Constructivity in Mathematics* (1959), 226-33.

PHILOSOPHICAL CONSIDERATIONS OF MATHEMATICS AS A DEMONSTRATIVE SCIENCE

Summary.

The theory of science had been initiated by Aristotle in his *Posterior Analytics*. It might be said in general that Aristotle identifies here this theory with mathematics. The inquiry about his first principles of science, which cannot be known by demonstration (deduction) and which is the basis of the theory of science, had been discussed by Aristotle in a separate book following his *Analytics*. Of course, this inquiry is a metaphysical one. From Aristotle's point of view, the faculty of intuitive reason based on experience is that through which one begins to grasp those principles.

Aristotle's underlying theory is to be found on Euclid's *Elements*, written a generation later. On the other hand more recent theories of science, such as Descartes', Leibniz' and Kant's, have a great affinity with the ancient theory. It seems therefore that this theory dominated for many centuries scientific as well as philosophical thought.

The aim of the present paper is to examine, following a consideration of the earlier aspects, the recent thesis of mathematical theory as deductive science and to investigate how current philosophical development contributed towards this thesis.

Athens Philon Vassiliou