

ΦΙΛΩΝ Μ. ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ, τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν

ΟΝΟΜΑΤΟΚΡΑΤΙΑ, ΕΝΝΟΙΟΚΡΑΤΙΑ & ΠΛΑΤΩΝΙΣΜΟΣ ΣΤΑ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

1. Παρότρυνση για τὴν παροῦσα μελέτη ἔδωσε στὸν συγγραφέα ἓνα ἄρθρο μὲ τὸν τίτλο *A Critical Evaluation of Universals in Nominalism*, ποὺ δημοσιεύθηκε στὴν ἐπετηρίδα τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν «Φιλοσοφία»¹, γιατί ἡ κριτικὴ ἀποτίμηση τῶν καθόλου τῆς Ὀνοματοκρατίας στὰ Μαθηματικά, μαζί μὲ ἐκείνη τῶν καθόλου τῆς Ἐννοιοκρατίας καὶ τοῦ Πλατωνισμοῦ, ἀποτελοῦν θέμα ὄχι μικρότερης γνωσιολογικῆς σημασίας καὶ ἐνδιαφέροντος. Ἡ Ὀνοματοκρατία (Nominalismus) μὲ τὴν ἄρνησή της γιὰ τὴν ὑπαρξὴ τῶν καθόλου (universalia) βρίσκεται στὴν Φιλοσοφία τῶν Μαθηματικῶν σὲ μιὰ πλήρη διάζευξη ἀπέναντι στὸν Πλατωνισμό, ποὺ ἀντίθετα δέχεται τὴν ὡς ἄνω ὑπαρξὴ καὶ ποὺ ὡς γνωστὸν κυριάρχησε στὰ κλασσικὰ Μαθηματικά.

Εὐθὺς ἀπὸ τὴν ἀρχὴ πρέπει νὰ σημειωθῇ, ὅτι ἡ ὀνοματοκρατικὴ σκέψη, ὅπως αὐτὴ διαμορφώθηκε στὴν σύγχρονη ἐποχὴ, ἀποκλίνει σημαντικὰ ἀπὸ τὴν ἱστορικὰ γνωστὴ· ἀκριβῶς γιὰ τὸν λόγο αὐτὸν συνηθίζεται σήμερα ἡ προσθήκη στὸν ὄρο Ὀνοματοκρατία κάποιου ἐνδεικτικοῦ ἐπιθέτου γιὰ τὸν χαρακτηρισμὸ τῆς σύγχρονης ἐξελίξεώς της. Ὡστόσο, ἡ διάκριση ἐδῶ δὲν κρίθηκε ἀπαραίτητη, μιὰ καὶ μόνο γιὰ τὴν σύγχρονη Ὀνοματοκρατία πρόκειται νὰ ὁμιλήσωμε. Ἐκεῖνο ποὺ πραγματικὰ ἐξασθένησε τὴν θέση τοῦ Πλατωνισμοῦ στὰ νεώτερα Μαθηματικά ἦταν ἡ ἐμφάνιση τῶν λεγομένων ἀντινομιῶν, ἀλλιώως παραδόξων, ἐμφάνιση ποὺ ἔγινε στὶς ἀρχὲς περίπου τοῦ αἰῶνα μας στὴν τότε τὸ πρῶτον δημιουργούμενη Θεωρία τῶν Συνόλων. Οἱ ἀντινομίες αὐτὲς εἶναι στὴν οὐσία πολὺ πιὸ σοβαρῆς μορφῆς ἀπ' ὅσες γνωρίζαμε κιόλας ἀπὸ τὴν ἀρχαιότητα καὶ ἀφοροῦν τόσο στὴν πρωταρχικὴ ἔννοια τοῦ συνόλου ὅσο καὶ σ' αὐτὴν τὴν ἴδια τὴν Λογική. Ἡ ἐπιτακτικὴ ἀνάγκη γιὰ τὴν ἐρμηνεία καὶ τὴν ἐξουδετέρωση τῶν ἀντινομιῶν αὐτῶν, ποὺ συνεκλόνισαν ἀπὸ τὰ θεμέλια ὁλόκληρο τὸ οἰκοδόμημα τῶν Μαθηματικῶν, ὠδήγησε σὲ μιὰ πιὸ στενὴ ἔννοια τοῦ Πλατωνισμοῦ καὶ ἀργότερα στὴν, γνωστὴ κιόλας, φιλοσοφικὴ θέση τῆς

1. A. Fotinis, «Φιλοσοφία» 3 (1973) 382-404.



Ὄνοματοκρατίας. Ἔτσι τώρα, σὲ ἀντίθεση πρὸς τὴν ἀρχικὴ ἄποψη τοῦ Πλατωνισμοῦ, λεγομένη καὶ εὐρύτερη, μὲ τὴν ὁποία ξεκίνησε κι ὁ ἴδιος ὁ δημιουργὸς τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων ὁ G. Cantor (1845-1918), ἔχομε μιὰ ὄχι τόσο εὐρεῖα ἐκδοχὴ πού, σύμφωνα μὲ τὴν ἐκφραση τοῦ P. Bernays, ἀποτελεῖ κατὰ κάποιον τρόπο μιὰ ἰδεατὴ προβολὴ αὐτῆς τῆς σκέψεως². Ὁ ἴδιος προσθέτει, ὅτι «πολλοὶ φιλόσοφοι καὶ μαθηματικοὶ προσέδωκαν προηγούμενα στὶς πλατωνιστικὲς μεθόδους τὸ νόημα κάποιου ἐννοιολογικοῦ ρεαλισμοῦ, θέτοντας ὡς ἀρχὴ τὴν ὑπαρξὴ ἐνὸς κόσμου ἀπὸ ἰδεατὰ ἀντικείμενα πού περιλαμβάνουν ὅλες τὶς μαθηματικὲς ὀντότητες καὶ σχέσεις».

Ἐξ ἄλλου, ἡ νομισθεῖσα πρὸς στιγμὴν ὑπεροχὴ τῆς Ὄνοματοκρατίας ἀπέναντι στὸν Πλατωνισμό ἀποδείχθηκε τελείως φαινομενικὴ· γιατί ἡ προσπάθεια γιὰ τὴν ἐπανερμηνεία τῶν κλασσικῶν Μαθηματικῶν στὴν ὀνοματοκρατικὴ γλῶσσα δὲν ἄργησε νὰ παρουσιάσῃ δυσκολίες πού στάθηκε ἀδύνατον νὰ ὑπερνικηθοῦν. Ἡ ἐξοδος ἀπὸ τὴν νέα ἀμηχανία, παρ' ὅλην τὴν θεώρηση ὀλοένα νέων ὀνοματοκρατικῶν θέσεων πού ἀπέκλιναν ἀπὸ τὴν ἀρχικὴ, δὲν ἔχει ἀκόμα ἐπιτευχθῇ καὶ τὸ μόνο πού ἀπομένει εἶναι μιὰ μελλοντικὴ ἐλπίδα, ὄχι ὅμως καὶ τόσο πιθανή. Δὲν πρέπει νὰ παραγνωρισθῇ, παρ' ὅλα αὐτά, ὁ ἐποικοδομητικὸς ρόλος, τὸν ὁποῖον ἡ Ὄνοματοκρατία ἐπαιξε καὶ ἐξακολουθεῖ νὰ παίζει στὴν ἀναζήτηση τῶν μέσων γιὰ μιὰ ἀσφαλῆ θεμελίωση τῆς ἐπιστήμης τῶν Μαθηματικῶν.

Ὑπάρχει ἀκόμα, ἀναφορικὰ μὲ τοὺς δεχόμενους τὴν ὑπαρξὴ τῶν καθόλου, καὶ ἡ παραλλαγή, σύμφωνα μὲ τὴν ὁποίαν τοὺς γενικοὺς ὅρους τοὺς δημιουργεῖ ὁ νοῦς· μὲ ἄλλες λέξεις, οἱ ὑπ' ὄψη ὅροι πρέπει ν' ἀναζητοῦνται μέσα στὴν σκέψη καὶ ὄχι, ὅπως παραδέχονται οἱ πλατωνιστές, ἔξω ἀπ' αὐτήν. Τὴν τρίτη αὐτὴν ἄποψη τὴν ὀνομάζομε Ἐννοιοκρατία. Ὅπως οἱ δύο προηγούμενες ἀπόψεις ἔτσι καὶ ἡ Ἐννοιοκρατία ἐξελίχθηκε σὲ σημεῖο, ὥστε καὶ γι' αὐτὴν σήμερα νὰ εἶναι πρόδηλη ἡ ἀνάγκη τῆς ὀρολογικῆς τῆς διακρίσεως ἀπὸ τὴν παλαιότερη. Σημαντικὸς κλάδος τῆς Ἐννοιοκρατίας εἶναι ἡ κατασκευαστικὴ, πού ὅπως καὶ ὁ κορμὸς εἶναι περισσότερο ἓνα εἶδος ἀνορθοδόξου Πλατωνισμοῦ παρὰ μιὰ ἄποψη ἀνάμεσα στὸν Πλατωνισμό καὶ τὴν Ὄνοματοκρατία.

Τέλος, ἡ κριτικὴ γιὰ τὴν ἀποτελεσματικότητά αὐτῆς ἢ ἐκείνης ἀπὸ τὶς ἄνω ἀπόψεις σχετικὰ μὲ τὸ πρόβλημα τῆς θεμελιώσεως τῶν Μαθηματικῶν οὔτε ἐκλείσει οὔτε φαίνεται πιθανὸν νὰ κλείσῃ σύντομα. Χαρακτηριστικὴ γι' αὐτὸ εἶναι καὶ ἡ ἀστάθεια προσανατολισμοῦ ἐρευνητῶν, πού ὄχι σπά-

2. P. Bernays, *On Platonism in Mathematics*, εἰς τὸ ἔργον *Philosophy of Mathematics*, ἐκδοθὲν ὑπὸ τῶν P. Benacerraf καὶ H. Putman, Englewood Cliffs,¹N.J., Prentice Hall Inc. 1964, 277.

νια μετακινούνται από την μιὰ στήν ἄλλη φιλοσοφική θέση ἀνάλογα με τὴν ὁλοένα ἀποκτώμενη ὀριμότητα στὶς μαθηματικὲς τοὺς πεποιθήσεις.

2. Τὴν συζήτηση γιὰ τὸ πρόβλημα τῶν *καθόλου*, ποὺ χρονολογεῖται κιόλας ἀπὸ τὸν μεσαῖωνα, ποὺ ἔχει ὅμως τὶς ρίζες τοῦ πολὺ πιὸ παλαιὰ στὸν Πλάτωνα (427 - 347) καὶ στὸν Ἀριστοτέλη (384 - 322), τὴν βλέπομε νὰ ἀναβιώνη στὴν νεώτερη ἐποχὴ σ' αὐτὴ τὴν Φιλοσοφία τῶν Μαθηματικῶν. Οὐσία τῆς συζητήσεως εἶναι πάντοτε τὸ *ὄντολογικὸ πρόβλημα* σχετικὰ μετὰ τὶς γενικὲς κατηγορικὲς ἐκφράσεις, ἀλλιῶς τοὺς γενικοὺς ὅρους. Ὅχι διάφορο ἀπὸ τὸ πρόβλημα αὐτὸ εἶναι σήμερα ἐκεῖνο γιὰ τὴν ὑπαρξὴ ὀρισμένων μορφωμάτων τῆς σύγχρονης Μαθηματικῆς ἐπιστήμης. Βασικὸ εἶναι τὸ ἀκόλουθο ἐρώτημα: Σὲ κάθε δοσμένη *ιδιότητα*, ποὺ ἡμπορεῖ νὰ μορφωθῇ ἀπὸ γενικὲς κατηγορικὲς ἐκφράσεις καὶ ἀναφέρεται σὲ μαθηματικὲς ὀντότητες (πράγματα, στοιχεῖα), ὑπάρχει ἄραγε μιὰ ἄλλη μαθηματικὴ ὀντότης, ἡ ὁποία συμπεριλαμβάνει ἐκεῖνα ἀπὸ τὰ πράγματα ὅσα ἔχουν τὴν ιδιότητα ἐκείνη;

Στὴν περίπτωση τῆς θετικῆς ἀπαντήσεως στὸ ἐρώτημα, ἡ νέα μαθηματικὴ ὀντότης, ποὺ τὴν ὀνομάζομε *σύνολον*, ὀρίζεται μονοσήμαντα ἀπὸ τὴν ὑπ' ὄψιν ιδιότητα, μετὰ ἄλλες λέξεις ἀπὸ τὸ βάθος (ἀλλιῶς τὴν *ἐντασιν*) τῆς ἐννοίας τοῦ συνόλου, σὲ τρόπο ὥστε ἐκεῖνα καὶ μόνον τὰ στοιχεῖα *ἀνήκουν* στὸ σύνολον, ὅσα ἔχουν τὴν δοσμένη ιδιότητα, δηλαδὴ αὐτὰ ποὺ ἀποτελοῦν τὸ *πλάτος* (ἀλλιῶς τὴν *ἐκτασιν*) τῆς ἐν λόγῳ ἐννοίας. Ἡ θετικὴ αὐτὴ ἀπάντηση λέγεται καὶ *ἀρχὴ τῆς συμπτύξεως* (ἀλλιῶς τῆς *συμπεριλήψεως*). Ἐξ ἄλλου, στὴν περίπτωση ἀρνητικῆς ἀπαντήσεως, ὅποταν ἡ ὑπαρξὴ μιᾶς νέας ἀντικειμενικῆς ὀντότητος δὲν εἶναι παραδεκτὴ, ἀντὶ τοῦ ὅρου σύνολον εἶναι ἀπαραίτητη, γιὰ ἀντιδιαστολή, ἡ χρῆση ἄλλου ὅρου καὶ ὡς τέτοιος ὁρος χρησιμεύει συνήθως ἐκεῖνος τῆς *τάξεως*, ποὺ ἔχει τὸ νόημα τῆς θεωρήσεως τῶν ὑπ' ὄψιν πραγμάτων χωρὶς τὴν σύμπτυξή τους σ' ἓνα ὑπαρκτὸ ὅλον (ἄρνηση τῆς ἀρχῆς τῆς συμπτύξεως).

Μὲ τὸν ὅρο Πλατωνισμός³, ὑπὸ εὐρεῖα ἐννοία, ἐννοοῦμε ἀκριβῶς στὰ Μαθηματικὰ τὴν φιλοσοφικὴ ἄποψη, σύμφωνα μετὰ τὴν ὁποίαν οἱ γενικὲς κατηγορικὲς ἐκφράσεις (γενικοὶ ὅροι) ἔχουν ὑπαρξὴ ἀνεξάρτητη ἀπὸ τὸν νοῦν, ὅταν δηλαδὴ ὁ νοῦς τὶς *ἀνακαλύπτει* ἀλλὰ δὲν τὶς *δημιουργεῖ* (δὲν τὶς *ἐπινόη*). Ἐξ ἄλλου, μετὰ τὸν ὅρον Ἐννοιοκρατία ἐννοοῦμε τὴν φιλοσοφικὴ ἄποψη, σύμφωνα μετὰ τὴν ὁποίαν οἱ γενικοὶ ὅροι ἔχουν ὑπαρξὴ ἐξαρτώμενη ἀπὸ τὸν νοῦν, δηλαδὴ ὁ νοῦς τὶς δημιουργεῖ (τὶς ἐπι-

3. Ὁ ὅρος Πλατωνιστὴς ὀφείλεται στὸν P. Bernays, σὲ ἀντίθεση πρὸς τὸν ὅρο Πλατωνικὸς ποὺ σημαίνει ὁπαδὸς τοῦ Πλάτωνος.

νοεῖ). Ὡστε, στὶς δύο ἀπόψεις αὐτὲς ἀνταποκρίνεται ἡ θετικὴ ἀπάντηση τοῦ ἄνω ἐρωτήματος, ἐνῶ στὴν ἀρνητικὴ ἀπάντηση ἀνταποκρίνεται ἡ ἀποψη, σύμφωνα μὲ τὴν ὁποῖαν καταρρίπτεται ἡ παραδοχὴ τῆς ἀνεξάρτητης ἢ μὴ ἀπὸ τὸν νοῦν ὑπάρξεως τῶν γενικῶν ὄρων — ἀποψη τὴν ὁποῖαν ὠνομάσαμε Ὄνοματοκρατία.

Πρέπει ἐδῶ νὰ σημειωθῇ, ὅτι ἡ ὑπάρχουσα διαφορὰ ἀνάμεσα στὶς τρεῖς ἀναφερόμενες φιλοσοφικὲς ἀπόψεις δὲν συνεπιφέρει ὁποιαδήποτε ἀπόκλιση ἀπὸ τὸν διαλογιστικὸ καὶ ἀποδεικτικὸ τρόπο γιὰ τὶς τρεῖς μὴ συγκλίνουσες μαθηματικὲς μεθόδους, ποὺ ἰσχύουν ἀναφορικὰ μὲ τὶς ἀπόψεις αὐτές. Ὅμως, ἡ ἐπιχειρηθεῖσα ἐπανερμηνεία ὅλων τῶν κλασσικῶν Μαθηματικῶν (ποὺ ὅπως εἶπαμε βασίζονται στὸν πλατωνισμὸ) στὴν ὀνοματοκρατικὴ καὶ στὴν ἐννοιοκρατικὴ γλῶσσα, παρουσιάζει τέτοια χάσματα ποὺ ἡ γεφύρωσή τους δὲν ἔγινε ὥς τώρα κατορθωτή.

3. Οἱ ὅροι τάξη καὶ σύνολον, γιὰ τοὺς ὁποίους ἔγινε λόγος στὴν προηγούμενη παράγραφο, εἶναι μὲ σύγχρονη ἔκφραση ὅ,τι στὸν μεσαῖωνα ὠνόμαζαν τὰ καθόλου. Γι' αὐτὸ καὶ τὸ ἐρώτημα ποὺ διατυπώθηκε στὴν παράγραφο ἐκείνη ἀφορᾷ στὴν ὀντολογικὴ φύση τῶν γενικῶν κατηγορικῶν ἐκφράσεων (γενικῶν ὄρων). Ὅπως κιόλας εἶναι γνωστό, ὡς γενικοὺς ὅρους ἐννοοῦμε ὠρισμένα οὐσιαστικά, ἐπίθετα καὶ ῥήματα. Ἡ ὑπαρξὴ ἢ μὴ τῶν ὄρων αὐτῶν ἀπετέλεσε πάντοτε τὸ κεντρικὸ σημεῖο γιὰ ὅλες σχεδὸν τὶς σχετικὲς μὲ τὰ καθόλου συζητήσεις καὶ τὶς διαφωνίες, ποὺ ἀκολούθησαν.

Καὶ πρῶτα ἀπ' ὅλα, ἡ διαφωνία ἀναφορικὰ μὲ τὴν ὑπαρξὴ εἶχε ὡς αἷτιο τὴν σύγχυση ποὺ γίνεται στὸ σημαῖνον⁴ (τὸ ὄνομα) καὶ στὸ σημαίνον (τὴν σημασία). Ἐξ ἄλλου, γιὰ πολλοὺς π.χ. τὰ κόκκινα φύλλα, οἱ κόκκινες στέγες καὶ οἱ κόκκινες φλόγες ἔχουν κάτι τὸ κοινόν· αὐτὸ εἶναι ἡ ιδιότης τοῦ κόκκινου (ἐρυθροῦ), δηλαδή ἡ κοκκινάδα (ἐρυθρότης). Γιὰ τοὺς ἴδιους μάλιστα ἡ κοκκινάδα εἶναι κάτι τὸ πιὸ φανερό καὶ σαφές ἀπὸ ὅ,τι εἶναι ἡ τάξη τῶν κόκκινων φύλλων κτλ. Γιὰ ἄλλους πάλιν, μὲ ἴδια φανερότητα καὶ σαφήνεια, δὲν ὑπάρχει τίποτε τὸ κοινὸ ἀνάμεσα στὰ ἄνω πράγματα. Ὁ ὅρος (τὸ ὄνομα) ἢμπορεῖ ν' ἀποδίδεται σὲ κάθε ὄντοτητα, ὅπως τὸ φύλλον, ἡ στέγη, ἡ φλόγα, δίχως ὅμως καὶ νὰ σημαίνει αὐτὸ ἀναγκαστικά ὅτι ὑπάρχει ὄντοτης ποὺ ν' ἀνταποκρίνεται στὴν κοκκινάδα, μὲ ἄλλες λέξεις ποὺ νὰ εἶναι αὐτὴ ἡ κοκκινάδα. Ἔτσι, διαπιστώνομε μιὰ οὐσιαστικὴ διαφωνία — διαφωνία ποὺ ἢμπορεῖ νὰ ἐγερθῇ μεταξὺ δύο συζητητῶν, τῶν ὁποίων ὁ ἓνας νὰ ὑποστηρίξη τὴν ὑπαρξὴ τῆς κοκκινάδας καὶ ὁ ἄλλος νὰ τὴν ἀρνηθῇ. Ἀς σημειωθῇ, ὅτι ἀκόμα καὶ ἡ διάκριση ἀνάμεσα

4. Φ. Βασιλείου, *Λογική, Γλῶσσα καὶ Μαθηματικά*, «Φιλοσοφία» 2 (1972) 67.

στο σημαίνον και στο σημαινόμενον δεν εξαιλείφει, στην περίπτωση που εξετάζουμε, την επισημαινόμενη διαφωνία.

Για την πρώτη άποψη που αναφέραμε, ακόμα και αν δεν υποθέσει κανείς ότι η κοκκινάδα είναι το όνομα κάποιας ιδιότητας, όμως πρέπει να παραδεχθῇ πως η κοκκινάδα έχει σημασία, είναι δηλαδή σημαινόμενον, και πως η σημασία αυτή είναι ένα καθόλου. Το καθόλου αυτό επέχει θέση ενός πράγματος που ήμπορούμε να το δεχθούμε ως ιδιότητα. Για την δεύτερη άποψη ήμπορεί κανείς να κάμη χρήση όρου σε πρόταση με νόημα, όπως π.χ. του όρου κοκκινάδα, χωρίς την προϋπόθεση ότι υπάρχει οντότητας, για την όποιαν ο όρος αυτός σημαίνει το όνομα. Η πρώτη από τις δύο απόψεις αντιπροσωπεύεται ακριβώς από τους πλατωνιστές ή τους έννοιοκρατικούς και η δεύτερη από τους ονοματικούς.

Τα προβλήματα που θίξαμε πιο πάνω απέτέλεσαν από την αρχαιότητα κιόλας αντικείμενο της Μεταφυσικής. Στην σφαίρα της Μεταφυσικής ανήκουν και όλα τα προβλήματα, για την επίλυση των οποίων καταφεύγει κανείς σε ιδεατά αντικείμενα ή μορφώματα. Τέτοια μορφώματα είναι π.χ. τα σύνολα που εισάγουν οί πλατωνιστές. Σε πλήρη αντίθεση προς αυτούς βρίσκονται τοποθετημένοι οί ονοματοκρατικοί.

4. Για μία, κάπως ευρύτερη, ανάλυση της θέσεως των τελευταίων θα άρκεσθούμε στα ακόλουθα: Τα κατηγορήματα εκλαμβάνονται από τους ονοματικούς ως απλά ονόματα (λέξεις), χωρίς αυτά να αντιπροσωπεύουν ύπαρκτα πράγματα, με άλλες λέξεις χωρίς να χρησιμεύουν για την ονομασία όποιασδήποτε οντότητας. Ένα κατηγορημα καθ' έαυτο δεν έχει νόημα· όμως, χρησιμοποιούμενο ως λέξη σε προτάσεις ήμπορεί να δώσει νόημα στα συμφραζόμενα, πράγμα που εκφράζουμε με μαθηματικό τρόπο λέγοντας —όταν ή λέξη συμπληρωθῇ από ένα ελεύθερο όρισμα, αλλιώς από μιὰ ελεύθερη μεταβλητή. Συνήθως ή μεταβλητή αυτή συμβολίζεται με ένα από τα τελευταία γράμματα του αλφαβήτου, π.χ. το χ. Παράδειγμα: ή πρόταση «ό χ (όπως ο Σωκράτης ή ο Πλάτων) είναι σοφός». Η ανοικτη αυτή πρόταση καθορίζεται κάθε φορά, όταν στην θέση του χ τεθῇ το όνομα Σωκράτης, Πλάτων κτλ. Μόνο του το κατηγορημα σοφός δεν έχει όποιασδήποτε οντότητα. Έξ άλλου, ή πρόταση «ό χ είναι σοφός» εκφράζει μιὰ αντιστοιχία μεταξύ του έκαστοτε χ, της τιμῆς του, και μιᾶς των τιμών ἀληθές, ψευδές (καθόσον με την αντικατάσταση της τιμῆς του χ στην πρόταση «ό χ είναι σοφός» προκύπτει ἀληθῆς ή ψευδῆς πρόταση). Με μαθηματική διατύπωση: Η ἐν λόγω πρόταση είναι (μονοσήμαντη) συνάρτηση σ(χ) της (μιᾶς) μεταβλητῆς χ. Το εἶδος της συναρτήσεως είναι το κατηγορημα σοφός, το όρισμα (ή μεταβλητή) χ διατρέχει τιμές από το πεδίο ορίσμοῦ της συναρτήσεως, που είναι ἐδῶ τα ονόματα

ανθρώπων και τιμές $\sigma(\chi)$ της συναρτήσεως είναι οί δύο τιμές αληθές (άλλιως: ισχύει) ή ψευδές (άλλιως: δέν ισχύει).

Έκτός από την αναφερθεΐσα πράξη της αντικαταστάσεως του χ με ένα όνομα ανθρώπου, πράξη που άφορᾷ στο όρισμα της συναρτήσεως, έχομε και πράξεις εκτελούμενες σέ όλόκληρη την συνάρτηση. Οί πράξεις αυτές, λεγόμενες ποσοδεικτικές, αντιπροσωπεύουν τις φράσεις «για κάθε χ », άλλιως «για όλα τα χ », και «για μερικά χ », άλλιως «ύπάρχει χ για τὸ ὁποῖον...». Για τις πράξεις αυτές χρησιμοποιεΐται ὁ ἐξῆς συμβολισμός: $A(\chi)$ αντιστοίχως $E(\chi)$. Τα σύμβολα αυτά λέγονται ποσοδείκτες. Τὸ ἀποτέλεσμα της εκτελέσεως τῶν ὑπ' ὄψη πράξεων ἐπὶ της συναρτήσεως $\sigma(\chi)$ σημειώνεται: $A(\chi)\sigma(\chi)$ και $E(\chi)\sigma(\chi)$ και διαβά-ζεται: «για κάθε χ είναι (ισχύει) $\sigma(\chi)$ » και «ύπάρχει χ για τὸ ὁποῖον είναι (ισχύει) $\sigma(\chi)$ ».

Με την ἐφαρμογή τῶν ποσοδεικτικῶν πράξεων ἡ ἐλεύθερη μεταβλητή χ γίνεται, ὅπως λέμε, δεσμευμένη ἢ ἀπλῶς δεσμεύεται. Έξ ἄλλου, με μεταβλητὸ και τὸ εἶδος της συναρτήσεως σ , ἄλλες ἀπὸ τις μεταβλητὲς προτάσεις $A(\chi)\sigma(\chi)$ ἢ $E(\chi)\sigma(\chi)$ εἶναι ἀληθεῖς (ισχύουν) και ἄλλες εἶναι ψευδεῖς (δέν ισχύουν).

Στὸ σημεῖον αὐτὸ πρέπει νὰ τονισθῇ, ὅτι ἐκεῖνο πὸ εἶναι περισσότερο σημαντικό για τὴν ὀνοματοκρατική θέση δέν εἶναι τόσο ἡ ἄρνηση για τὴν σύμπτυξη πραγμάτων σέ νέα ὀντότητα, ὅσο εἶναι ἡ ἀπαγόρευση, σέ μιὰ ἀποδεικτική πράξη, νὰ λαμβάνεται ὡς τιμὴ δεσμευμένης μεταβλητῆς ἓνα σύνολον. Κι αὐτὸ γιατί ὁ ὅρος σύνολον δέν ἡμπορεῖ νὰ χρησιμοποιηθῇ ὡς τιμὴ ὀρίσματος, ἐνῶ ἡ σύμπτυξη πραγμάτων ἡμπορεῖ ν' ἀντικατασταθῇ με ἓνα ὀνομα χωρίς περιεχόμενο, δηλαδή νὰ θεωρηθῇ ὡς ἓνας «τρόπος τοῦ λέγειν».

5. Ἀπὸ τὸ σύνηθες περιεχόμενο της μαθηματικῆς Λογικῆς ἐκεῖνο πὸ εἶναι παραδεκτὸ για τὴν Ὀνοματοκρατία εἶναι ἀποκλειστικά ὁ λεγόμενος περιορισμένος Συναρτησιακὸς Λογισμὸς, ἄλλιως ὁ Συναρτησιακὸς Λογισμὸς Πρώτης τάξεως⁵.

Σέ ἓνα ὀνοματοκρατικὸ σύστημα διακρίνομε κυρίως τὰ ἐξῆς: Τα ὀρίσματα, δηλαδή τις μεταβλητὲς πὸ διατρέχουν τὰ ἀντικείμενα τοῦ συστήματος, τις συναρτησιακὲς μεταβλητὲς, πὸ διατρέχουν κατηγορήματα (εἶδη συναρτήσεων), τις λογικὲς σταθερὲς (ὅπως τὰ ὅχι, καί, εἴτε...εἴτε, ἄν...τότε) και τοὺς ποσοδείκτες. Ἀπ' αὐτὲς οἱ συναρτησιακὲς μεταβλητὲς εἶναι ἐνὸς ἢ περισσοτέρων ὀρισμάτων ἀνάλογα με τὴν θεώρηση ἀπλῶν ἢ γενικευμένων κατηγορημάτων (σχέσεων),

5. Φ. Βασιλείου, *Φιλοσοφία τῶν Μαθηματικῶν*, Ἀθῆναι 1971², 96.

ἐνῶ οἱ ποσοδεῖκτες χρησιμεύουν γιὰ τὴν μόρφωση γενικῶν ἀποφάσεων⁶ μὲ τὰ θεωρούμενα ἀντικείμενα. Ἡ ἐρμηνεία τώρα (μετάφραση) ὀρισμένων βασικῶν ἐκφράσεων ἀπὸ τὴν πλατωνιστικὴ στὴν ὀνοματοκρατικὴ γλῶσσα δὲν συναντᾷ οὐσιαστικὴ δυσκολία. Ἔτσι, ἡ φράση «τὸ σύνολον α εἶναι ὑποσύνολον τοῦ β» ἐρμηνεύεται ὡς ἐξῆς: «Κάθε στοιχεῖον, ἐφ' ὅσον εἶναι στοιχεῖον τοῦ α, εἶναι καὶ στοιχεῖον τοῦ β».

Εὐλογον εἶναι ὁμῶς νὰ τεθῇ γενικώτερα τὸ ἐρώτημα, ἂν καθετὶ ποὺ λέγεται στὴν πλατωνιστικὴ γλῶσσα ἡμπορῇ νὰ εἰπωθῇ καὶ στὴν ὀνοματοκρατικὴ. Τὸ ἀντίστροφον τοῦ ἐρωτήματος αὐτοῦ εἶναι εὐκολόν' ἀπαντηθῇ καταφατικά, ὁμῶς οἱ δυσκολίες γιὰ τὴν ἀπάντηση στὸ εὐθὺ ἐρώτημα εἶναι πολὺ μεγάλες καὶ δὲν ἔχουν ὥς σήμερα ὑπερπηδηθῇ. Ἐξ ἄλλου, ἡ κατανόηση τῆς εὐκολίας γιὰ τὴν ἀπάντηση στὸ ἀντίστροφον ἐρώτημα βασίζεται στὴν παρατήρηση, ὅτι κάθε ἀπλῆ κατηγορικὴ ἀπόφανση ἡμπορεῖ νὰ διατυπωθῇ κατὰ τρόπο, ὥστε ὅ,τι ἐκφράζεται μὲ τὴν ἀπόφανση ν' ἀνάγεται στὸ ὅτι «κάποιο στοιχεῖο ἀνήκει σὲ μιὰ τάξη ἢ σ' ἓνα σύνολον». Ὡς παράδειγμα: Ἡ ἀπόφανση «ὁ ἄνθρωπος εἶναι θνητὸς» μετατρέπεται στὴν σχέσι «τὸ (μεταβλητὸ) στοιχεῖον ἄνθρωπος ἀνήκει στὴν τάξη τῶν θνητῶν». Ὑπὸ τὴν νέα αὐτὴ διατύπωση ἡ μεταφορὰ στὴν ὀνοματοκρατικὴ γλῶσσα γίνεται σύμφωνα μὲ τὴν πιὸ πάνω παρατήρηση γιὰ τὴν ἐρμηνεία ἀπὸ τὴν πλατωνιστικὴ στὴν ὀνοματοκρατικὴ γλῶσσα. Ἀνάλογη διατύπωση ἰσχύει καὶ στὴ περίπτωση ὅπου τὸ κατηγορημα εἶναι κάποια σχέση, ὅταν δηλαδὴ ἀπὸ κατηγορημα μὲ ἓνα ὄρισμα μεταβαίνωμε σὲ κατηγορημα μὲ περισσότερα (ἀπὸ ἓνα) ὀρίσματα. Ἄς σημειωθῇ τέλος ὅτι, λόγῳ τῶν ἀνυπερβλήτων δυσκολιῶν στὴν ἐξεταζόμενη ἐρμηνεία ἀπὸ τὴν πλατωνιστικὴ στὴν ὀνοματοκρατικὴ γλῶσσα, τὸ θέμα ἐξετάζεται συνήθως κατὰ περίπτωσι.

6. Ἐνα ἄλλο ἐρώτημα ἐγείρεται τώρα: Ποιὲς τιμὲς εἶναι ἐπιτρεπτές γιὰ μιὰ ἀνεξάρτητη ἢ δεσμευμένη μεταβλητὴ κατὰ τὴν ὀνοματοκρατικὴ θέσι;

Ὁ ὀνοματοκρατικὸς κόσμος εἶναι, πρῶτα ἀπ' ὅλα, ἓνα κόσμος ἀπὸ ἄτομα (individuals). Ὁ ὅρος ἄτομο πρέπει φυσικὰ νὰ ἐκλαμβάνεται μὲ εἰδικὴ καὶ ὄχι τὴν συνήθη φυσικὴ του ἔννοια. Κατὰ τὸν σύγχρονον πρωτόπορον ἡγέτη τῆς Ὀνοματοκρατίας Ν. Goodman, βασικὴ ἀρχὴ τῆς φιλοσοφικῆς τοποθετήσεώς του εἶναι, ὅτι παραδεκτὲς θεωροῦνται ὅποιεςδήποτε ὀντότητες καὶ ἀπορρίπτονται μόνον οἱ τάξεις, ὡς μὴ δυνάμενες νὰ συμπτυχθοῦν σὲ ὀντότητες. Γιὰ τὸν ἴδιον, ὁ Ὀνοματισμὸς δὲν ἀποκλείει τίς ἀφηρημένες ὀντότητες καὶ τὸ μόνον ποὺ ζητεῖ εἶναι, ὅτι καθετὶ ποὺ εἶναι παραδεκτὸ ὡς ὀντότης ἡμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὡς ἄτομον.

6. Φ. Βασιλείου, ὁ.π. 74.

Ένας φιλόσοφος, λέγει ο Goodman, όνοματοκρατικός ή όχι, ήμπορεί να θέτη όσονδήποτε δεσμευτικούς όρους για ό,τι θα δέχεται ως όντότητες... , οί όροι όμως αυτοί είναι ανεξάρτητοι από την φιλοσοφική του τοποθέτηση». Όπωςδήποτε, κατά την μόρφωση ενός συστήματος είναι ανάγκη να θεωρήση κανείς με προσοχή ποιές όντότητες είναι πρόθυμος να κάμη παραδεκτές, ή καλύτερα ποιούς όρους θέλει να παραδεχθ ή ως άπλές λέξεις χωρίς σημασία που όμως δίνουν νόημα από τα συμφραζόμενα σε προτάσεις, και ποιές πάλιν θέλει να έρμηνεύση ως λέξεις με σημασία. Όσον ενδιαφέρον και αν παρουσιάση ή διάκριση αυτή, πρέπει να τονισθ ή ότι δεν είναι ή Όνοματοκρατία εκείνη που αποφασίζει για την διάκριση αυτή. Και προσθέτει ο Goodman: «Ποτέ δεν εισηγήθηκα πως ή Όνοματοκρατία άρκει για να χαρακτηρισθ ή ένα σύστημα ως παραδεκτό». Γεννιέται ώστόσο το έρώτημα, αν ο όνοματοκρατικός ήμπορ ή να έρμηνεύση ως άτομο και μι ά τάξη. Η άπάντηση του Goodman στο έρώτημα αυτό έχει ως εξής: «Όποιοδήποτε πράγμα, που ήμπορεί να έρμηνευθ ή ως τάξη, ήμπορεί πραγματικά να έρμηνευθ ή ως άτομο». Και όμως μι ά τάξη δεν ήμπορεί να έρμηνευθ ή ως άτομο. Όσον κι αν φαίνεται αυτό παράδοξο, όμως ήμπορεί να γίνη σαφές με το εξής ανάλογο του: Ένα τραπέζι ή είναι ένα άτομο ή είναι άτομο ή τάξη των ποδιών και τής έπιφανείας του, ή ή τάξη των μορίων του, ανάλογα με τον τρόπο που θεωρε ί κανείς το τραπέζι ως σύστημα... Ημπορούμε να θεωρήσωμε καθετί ως άτομο (και ήμπορούμε να θεωρήσωμε καθετί ως τάξη μακριά από όνοματοκρατικούς ένδοιασμούς), όμως δεν ήμπορούμε από την στιγμή εκείνη να θεωρήσωμε πια μι ά ήδη θεωρηθείσα τάξη ως ένα άτομο⁷. Έξ άλλου, δύο διαφορετικές όντότητες δεν αποτελούνται από τα ίδια άτομα. Δηλαδή, αν δύο όντότητες αποτελούνται από τα ίδια άτομα, τότε πρέπει να ταυτίζονται. Κατόπιν τούτων, αν ο όνοματοκρατικός έχη έπτά άτομα, τότε από αυτά ήμπορεί να σχηματίση πεπερασμένες το πλήθος νέες όντότητες, συγκεκριμένα $2^7 - 1$ το πλήθος όντότητες. Σε αντίθεση ο πλατωνιστής σχηματίζει άπειρες νέες όντότητες, θεωρώντας μαζί με τις προηγούμενες όντότητες (σύνολα) και όλα τα ύποσύνολά τους.

Υπάρχει και ή στενώτερη άποψη, ότι τα άτομα αντιπροσωπεύουν μόνον συγκεκριμένα αντικείμενα, άρα κατά το πλήθος πεπερασμένα, αν και ή έννοια του συγκεκριμένου δεν προσδιορίζεται έπακριβώς. Αυτό δίνει, φυσικά, κάποια άπροσδιοριστία στην δεχόμενη την άποψη αυτή Όνοματοκρατία. Πραγματικά ή άκριβής διάκριση ανάμεσα σε μι ά συγκεκριμένη και μι ά αφηρημένη έννοια δεν είναι κάτι το κατορθωτό, γι' αυτό και καταφεύγομε πάντοτε σε παραδείγματα, αν θέλωμε να κάμωμε κατανοητή την διάκριση αυτή.

7. N. Goodman, *A World of Individuals*, εις το *Philosophy of Mathematics*, ό.π. 197-210.



Ἔνεκα τοῦ πεπερασμένου πλήθους ἀντικειμένων, ποὺ διατρέχει μιὰ μεταβλητὴ κατὰ τὴν ἐκτιθέμενη ἄποψη, μιᾶς γιὰ περατοκρατικῆς ὀνοματοκρατίας. Σύμφωνα λοιπὸν μὲ τὴν ἄποψη αὐτήν, ἡ ὀνοματοκρατία δέχεται μόνον μεταβλητὲς στὰ πεδία ὁρίσματος, τῶν ὁποίων εἰσέρχονται ἀποκλειστικὰ συγκεκριμένα ἀντικείμενα· ἀφηρημένα ἀντικείμενα, ὅπως ιδιότητες, σχέσεις, ἀριθμοί, συναρτήσεις κλπ., ἀποκλείονται ὡς τιμὲς τῶν ὑπ' ὅψῃ μεταβλητῶν. Εἰσηγητὴς γιὰ τὴν ἐν λόγω ἄποψη ὑπῆρξεν ὁ ἄλλος ἡγέτης τῆς ὀνοματοκρατίας, ὁ W.V. Quine⁸, στὸν ὁποῖον ὀφείλεται καὶ ἡ φράση: «Ἐκεῖνο ποὺ κανεῖς θεωρεῖ ὡς ὑπάρχον ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὶς δεσμευμένες μεταβλητὲς ποὺ χρησιμοποιεῖ».

7. Μεταβαίνομε τώρα στὴν πλατωνιστικὴ ἄποψη, σύμφωνα μὲ τὴν ὁποία σὲ κάθε δοσμένη ιδιότητα ὑπάρχει ἓνα σύνολον, ποὺ περιέχει ἐκεῖνες καὶ μόνον τὶς ὀντότητες, ὅσες ἔχουν τὴν ὑπ' ὅψῃ ιδιότητα. Ὅπως εἶπαμε κιόλας σὲ προηγούμενη παράγραφο, ἡ ἄποψη αὐτὴ ὠδήγησε σὲ ἀντινομίες. Λέγομε ὅτι μιὰ μαθηματικὴ θεωρία παρουσιάζει ἀντινομία, ὅταν μαζὶ μὲ τὴν θέση κάποιας προτάσεως ἡμπορεῖ ἀποδεικτικὰ νὰ συναχθῇ καὶ ἡ ἄρνησὴ της, δηλαδή ἡ ἀντιφατικὴ της πρόταση. Τὶς ἀντινομίες τὶς διακρίνομε σὲ λογικὲς καὶ σὲ ἐπιστημολογικὲς, ἀλλιῶς σημασιακὲς. Οἱ πρῶτες δὲν ἀπαιτοῦν γιὰ τὴν παραγωγή τους παρὰ μόνον τὴν χρῆση τῶν κανόνων τῆς Λογικῆς, μὲ ἄλλες λέξεις τὴν ἐφαρμογὴ τῶν συνήθων συλλογιστικῶν κανόνων, ἐνῶ οἱ δεύτερες ἀναφέρονται σὲ μερικὲς σημασιακὲς ἔννοιες καὶ ἀφοροῦν σὲ σχέσεις ἀνάμεσα σὲ γλωσσικὰ ἀντικείμενα, ὅπως λέξεις, σύμβολα, φράσεις ἢ τύπους, ὅπως καὶ σὲ μὴ γλωσσικὰ ἀντικείμενα, ὅπως ἀριθμοὺς, τάξεις, ἔννοιες ἢ καταστάσεις (συνθῆκες).

Παράδειγμα λογικῆς ἀντινομίας εἶναι ἐκείνη τοῦ B. Russell⁹ (1872 - 1970), ποὺ βρέθηκε σύγχρονα ἀλλ' ἀνεξάρτητα καὶ ἀπὸ τὸν E. Zermelo (1871 - 1953). Κατ' αὐτὴν καταμερίζομε ὅλα τὰ σύνολα σὲ δύο κατηγορίες μὴ ἔχουσες κοινὸ στοιχεῖον· στὴν πρώτη κατηγορία θέτομε τὰ σύνολα ποὺ δὲν περιέχουν τὰ ἴδια ὡς στοιχεῖον (π.χ. τὸ σύνολον τῶν ἄστρον), καὶ στὴν δεύτερη κατηγορία θέτομε κάθε σύνολον ποὺ περιέχει τὸ ἴδιο ὡς στοιχεῖον (π.χ. τὸ σύνολον ὅλων τῶν συνόλων). Θεωροῦμε τώρα τὸ σύνολον ὅλων τῶν συνόλων τῆς πρώτης κατηγορίας. Σὲ ποιά κατηγορία ἀνήκει τὸ σύνολον αὐτό; Ἄν ἀνῆκε στὴν δεύτερη κατηγορία, τότε θὰ περιεῖχε στοιχεῖον ποὺ περιέχει τὸ ἴδιο, πρᾶγμα ἀντίθετο πρὸς τὴν ὑπόθεσίν μας, ἀφοῦ τὸ ἐν λόγω

8. Ὁ W.V. Quine ξεκίνησε ὡς Λογικιστὴς καὶ ἀργότερα ἀφοσιώθηκε στὴν ὀνοματοκρατία, τῆς ὁποίας καὶ ὑπῆρξεν ἓνας τῶν ἡγετῶν.

9. Ὁ B. Russell ἐπινόησε τὴν ἀντινομία, ποὺ φέρει τὸ ὄνομά του, τὸ 1902. Ἀνεξάρτητα τὴν ἴδια ἀντινομία βρῆκε καὶ ὁ E. Zermelo, δὲν προέβη ὁμῶς σὲ δημοσίευσή της.

σύνολον περιέχει σύνολα τής πρώτης κατηγορίας, άρα μη περιέχοντα τὰ ἴδια ὡς στοιχεῖον· ἂν πάλιν ἀνῆκε στήν πρώτη κατηγορία, τότε δὲν θὰ περιεῖχε τὸ ἴδιο ὡς στοιχεῖον καί, σύμφωνα μὲ τὴν κατασκευή, θὰ περιείχετο στὸ ἐν λόγω σύνολον, πρᾶγμα ἐπίσης ἄτοπο.

Παράδειγμα σημασιακῆς ἀντινομίας εἶναι ἐκείνη τοῦ J. Richard, ποὺ μορφώνεται σύμφωνα μὲ τὴν λεγόμενη *διαγώνιο μέθοδο* τοῦ G. Cantor¹⁰. Θεωροῦμε ὅλους τοὺς πραγματικοὺς ἀριθμοὺς τοὺς μεταξὺ 0 καὶ 1, ποὺ ἡμποροῦν νὰ χαρακτηρισθοῦν μὲ πεπερασμένο πλῆθος, λέξεις στήν ἑλληνικὴ γλῶσσα. Εἶναι φανερόν, ὅτι τὸ πλῆθος τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν ποὺ ἐκφράζονται μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν εἶναι ἀριθμῆσιμος, δηλαδή οἱ ἐν λόγω ἀριθμοὶ ἀντιστοιχίζονται ἀμφιμονοσήμαντα μὲ τοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς (ἀκεραίους καὶ θετικούς). Χαρακτηρίζομε τώρα ἕναν πραγματικὸν ἀριθμὸ μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο: Εἶναι ὁ μεταξὺ 0 καὶ 1 πραγματικὸς ἀριθμὸς τοῦ ὁποίου τὸ v - στὸ δεκαδικὸ ψηφίον (δηλαδή τὸ 0 ἢ 1 ἢ . . . ἢ 9) εἶναι τὸ κυκλικὰ ἐπόμενο τοῦ v - στοῦ δεκαδικοῦ ψηφίου τοῦ v - στοῦ ἀριθμοῦ κατὰ μιὰ ὡς ἄνω ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία. Ἐνῶ τώρα ὁ πραγματικὸς ἀριθμὸς ποὺ ὀρίζεται κατὰ τὸν τρόπον αὐτὸν διαφέρει, ὅπως ἀποδεικνύεται, ἀπὸ ἐκείνους ποὺ προηγουμένως χαρακτηρίσαμε μὲ πεπερασμένο πλῆθος λέξεις, ὅμως, σὲ πλήρη ἀντίφαση, χαρακτηρίζεται καὶ αὐτὸς μὲ πεπερασμένες λέξεις καὶ κεῖται μεταξὺ 0 καὶ 1.

Πρέπει νὰ σημειωθῇ, ὅτι στήν σύγχρονη ἐποχὴ ἀντινομίες ἐμφανίσθηκαν γιὰ πρώτη φορὰ κατὰ τὴν ἀνάπτυξη τῆς θεωρίας τῶν Συνόλων. Ὅπως εἶπαμε στὰ προηγούμενα, στίς ἀντινομίες κατατάσσονται καὶ τὰ ἀπὸ τὴν ἀρχαιότητα γνωστὰ *παράδοξα* τοῦ Ζήνωνος τοῦ Ἐλεάτου (490 - 430), ποὺ ἀναφέρονται στὸ *συνεχὲς* καὶ τὴν *κίνηση*. Τὰ παράδοξα αὐτὰ τοῦ Ζήνωνος χρησίμευσαν, πιθανῶς, γιὰ τὴν ἄσκηση κάποιου εἶδους κριτικῆς ἀπέναντι ἐκείνων ποὺ καταφέρονταν ἐναντίον τῶν θεωριῶν τοῦ διδασκάλου του Παρμενίδη (515 - 440;)¹¹. Ἀλλὰ καὶ ἀργότερα, στὸ τέλος τοῦ 18ου αἰῶνα, δὲν ἦσαν ἄγνωστες διάφορες ἀντινομίες. Ἐνδεικτικὰ ἀναφέρομε τίς ἀντινομίες τοῦ Kant (1724 - 1804), ποὺ δημοσιεύθηκαν στὸ περίφημο ἔργο του *Κριτικὴ τοῦ καθαροῦ λόγου*. Ὅμως, ὅπως τονίσαμε καὶ πιὸ πάνω, οἱ ἀντινομίες τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων ἦσαν πολὺ πιὸ σοβαρῆς μορφῆς· πολλοὶ ἐρευνητὲς εἶχαν τότε ἀρχίσει νὰ ἀμφιβάλλουν γιὰ τὴν ὀρθότητα τῶν ἐξαγομένων αὐτῆς τῆς ἴδιας τῆς ἐπιστήμης τῶν Μαθηματικῶν.

10. Ἡ ἀντινομία τοῦ J. Richard δημοσιεύθηκε τὸ 1905 καὶ περιέχεται στήν ἐργασία τοῦ ἰδίου *Les principes des mathématiques et le problème des ensembles*, «Revue gen. des sciences» 16, 541. Τὸν ἐπόμενο χρόνο ἀναδημοσιεύθηκε στὸ «Acta Mathematica».

11. H. Hasse - H. Scholz, *Die Grundlagenkrisis der griechischen Mathematik*, Berlin 1930.

Ἡ εὐρυτάτη στήν Θεωρία τῶν Συνόλων χρήση τῆς ἐννοίας τοῦ συνόλου, μαζί με τὴν εἰσαγωγή τοῦ ἐνεργεία (ἀλλιῶς ἐνεστωτικοῦ) ἀπείρου, ποὺ κατεδίκαζαν ἀπὸ τὸν Ἀριστοτέλη κι ἔπειτα ὅλοι σχεδὸν οἱ ἐπιστήμονες, προκάλεσε τὴν ἔκφραση δισταγμῶν καὶ τὴν ἄσκηση δρυμείας κριτικῆς ἐκ μέρους τῶν περισσοτέρων μαθηματικῶν. Ὅμως, ἡ ἀποκορύφωση σὲ ἀληθινὴ ἔκρηξη ἀνησυχίας γιὰ τὸν ἀπειλούμενο κίνδυνο χρονολογεῖται ἀπὸ τὴν ἐποχὴ ποὺ ἐπινοήθηκαν ἀντινομίες παρόμοιες μ' ἐκεῖνες στὰ δύο ἀναφερόμενα παραδείγματα. Ἔτσι, φιλόσοφοι καὶ μαθηματικοί, ποὺ ἀρχικὰ ἦσαν θιασῶτες τῆς νεαρῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων, δὲν ἄργησαν νὰ χάσουν τὴν ἐμπιστοσύνη τους σ' αὐτήν. Τὴν ἀνησυχία ἐπέτειναν μάλιστα οἱ γενόμενες ἄκαρπες προσπάθειες γιὰ τὴν ἐξουδετέρωση τῶν ὡς ἄνω ἀντινομιῶν. Ὡστόσο, ἀντὶ νὰ ἐγκαταλειφθῇ ἡ θεωρία συνέβη ἀκριβῶς τὸ ἀντίθετον. Μὲ τίς ἀντινομίες δόθηκε ἡ ἀφορμὴ νὰ προκληθῇ τὸ γενικὸν ἐνδιαφέρον γιὰ τὴν ἔρευνα καὶ τὴν ἐκρίζωση τοῦ κακοῦ.

8. Ἐνα κρίσιμο σημεῖον ἦταν ἡ ἀλόγιστη χρήση τῆς ἀρχῆς τῆς συμπτώξεως, ποὺ διατυπώθηκε στὰ προηγούμενα. Γιατί, παρατηρήθηκε πὼς στήν μὴ ὀρθὴ ἐφαρμογὴ τῆς ἀρχῆς αὐτῆς παρουσιάσθηκαν κιόλας οἱ πρῶτες ἀντινομίες. Ἐκεῖνο ποὺ ἐπέτρεψε τὴν γενικὴ χρήση τῆς ἀρχῆς βρίσκεται ἀκριβῶς στήν πλατωνιστικὴ τοποθέτηση, ὑπὸ τὴν εὐρεῖα τῆς μορφῆς, τῶν πρῶτων ἐρευνητῶν τῆς νέας τότε θεωρίας. Ὅπως τονίσαμε πιὸ πάνω, σύμπτωση μιᾶς τάξεως δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο ἀπὸ τὴν μετατροπὴ τῆς τάξεως σὲ μιὰ νέα ὄντοτητα, αὐτὴν ποὺ καλέσαμε σύνολον. Ἔτσι, ὁ ἀποκλεισμός τῶν ἀντινομιῶν ζητήθηκε σ' ἓναν περιορισμὸ τῆς ἐν λόγῳ ἀρχῆς, ποὺ σὲ τελευταία ἀνάλυση ἐσήμαινε τὸν περιορισμὸ τῆς ἴδιας τῆς ἐννοίας τοῦ συνόλου. Ἐνας τέτοιος περιορισμὸς ἐπετεύχθηκε μὲ τὴν εὐκλείδειο ἀξιοματικὴ μέθοδος, ὅπως αὐτὴ τροποποιήθηκε καὶ συμπληρώθηκε στήν σύγχρονη ἐποχὴ ἀπὸ τὸν D. Hilbert (1862 - 1943).

Σὲ σύγκριση μεταξὺ τους τὰ δύο γεωμετρικὰ ἀξιοματικὰ συστήματα, ἐκεῖνο τοῦ Εὐκλείδου (330; - 273;) καὶ ἐκεῖνο τοῦ Hilbert, παρουσιάζουν τὴν ἐξῆς διαφορά: Ἐνῶ ὁ Εὐκλείδης στὰ *Στοιχεῖα* κάνει π.χ. λόγο γιὰ τὴν κατασκευὴ εὐθείας ποὺ ἐνώνει δύο (διάφορα) σημεῖα, ὁ Hilbert στὰ *Θεμέλια τῆς Γεωμετρίας* τοῦ ὁμιλεῖ γιὰ τὴν ὑπαρξὴ εὐθείας στήν ὁποῖαν κεῖνται τὰ δύο σημεῖα. Μὲ ἄλλες λέξεις, ἐνῶ ὁ Εὐκλείδης κατασκευάζει τὸ γεωμετρικὸ τοῦ συστήματος, ὁ Hilbert τὸ θεωρεῖ ὡς ὑφιστάμενο ἀπὸ τὴν ἀρχή. Ἀναφορικὰ τώρα μὲ τὴν Θεωρία τῶν Συνόλων, ἡ ἀξιοματικὴ τῆς δόμησης θεωρεῖ, ἐκτὸς ἀπὸ τίς ἐννοιες τῆς Λογικῆς, μιὰ μοναδικὴ θεμελιώδη διμελῆ σχέση συμβολιζόμενη μὲ τὸ γράμμα ε (ἀρχικὸ τῆς λέξεως *ἐστὶ*) τέτοια, ὥστε γιὰ κάθε διατεταγμένο ζεῦγος α, β συνόλων, σ' ἓνα σύστημα συνόλων ἀπ' ἀρχῆς ὑφιστάμενο, ἡ σχέση $\alpha \varepsilon \beta$ (διαβάζεται: τὸ α εἶναι στοιχεῖον τοῦ β) ἢ ἰσχύει

(είναι αληθής) ή δέν ισχύει (είναι ψευδής). Στην δεύτερη αυτήν περίπτωση γράφουμε $\alpha \varepsilon \beta$.

Κατά την αξιωματικοποίηση της Θεωρίας των Συνόλων είναι σκόπιμο ή έννοια της ισότιτος δύο συνόλων να μὴ λαμβάνεται με την λογική της σημασία —πράγμα που έγινε στην επιχειρηθείσα τὸ πρῶτον αξιωματικοποίηση—, ἀλλὰ νὰ εἰσάγεται κατόπιν ὀρισμοῦ, πὸ προτάσσεται τῶν ἀξιωμάτων καὶ βασίζεται στὴν ἀρχικὴ σχέση ε , ὡς ἐξῆς: Ἐν γὰρ ὅλα τὰ (στοιχεῖα) χ , γὰρ τὰ ὅποια ισχύει ἡ σχέση $\chi \varepsilon \alpha$, ισχύει καὶ ἡ σχέση $\chi \varepsilon \beta$, τότε ὀνομάζουμε τὸ α ὑποσύνολον τοῦ β , συμβολικῶς $\alpha < \beta$. στὴν περίπτωση πὸ εἶναι $\alpha < \beta$ καὶ $\beta < \alpha$, τότε τὰ δύο σύνολα α, β λέγονται ἴσα, συμβολικῶς $\alpha = \beta$. Ἐντὶ νὰ λέμε τὸ α εἶναι ὑποσύνολον τοῦ β , λέμε πὸς τὸ α περιέχεται στὸ β ἢ τὸ β περιέχει τὸ α .

Εἶναι ἀπαραίτητο νὰ σημειωθῇ, ὅτι στὴν εἰσαγόμενη αξιωματικὴ γίνεται σαφὴς διάκριση ἀνάμεσα στὶς δύο σχέσεις $\alpha \varepsilon \beta$ καὶ $\alpha < \beta$ καὶ τοῦτο γιὰτί, ἐνῶ ἓνα σύνολον περιέχει τὸ ἴδιο τὸ σύνολον, ὅπως καὶ τὰ ὑποσύνολά του, ὅμως γενικὰ δέν εἶναι τὸ σύνολον στοιχεῖον τοῦ ἰδίου τοῦ συνόλου, οὔτε τὰ ὑποσύνολά του εἶναι στοιχεῖα του.

Ἐνα σύστημα ἀπὸ ἀξιώματα τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων, ὀφειλόμενο στοὺς E. Zermelo καὶ A. Fraenkel (1891 - 1962), εἶναι τὸ ἐξῆς: ($\alpha, \beta, \gamma, \dots$ παριστάνουν τυχόντα σύνολα). Τὸν ὅρον σύνολον τὸν χρησιμοποιοῦμε καὶ διὰ τὰ δύο μέλη τῆς σχέσεως ε).

1. Ἐν $\alpha \varepsilon \gamma$ καὶ $\alpha = \beta$, τότε εἶναι καὶ $\beta \varepsilon \gamma$.

2. Γὰρ δύο διάφορα (μὴ ἴσα) α, β ὑπάρχει γ πὸ ἔχει τὰ α, β ὡς στοιχεῖα καὶ μόνον αὐτὰ (Ἀξίωμα συζεύξεως).

3. Γὰρ κάθε α , πὸ ἔχει τουλάχιστον ἓνα στοιχεῖον, ὑπάρχει β τέτοιο, ὥστε νὰ ἔχη στοιχεῖα τὰ στοιχεῖα τῶν στοιχείων τοῦ α (Ἀξίωμα συνενώματος).

4. Γὰρ κάθε α ὑπάρχει β τέτοιο, ὥστε τὰ στοιχεῖα του νὰ εἶναι ὅλα τὰ ὑποσύνολα τοῦ α καὶ μόνον αὐτὰ (Ἀξίωμα δυναμικότητος)¹².

5. Γὰρ κάθε ιδιότητα (κατηγορημα), πὸ ἔχει νόημα γὰρ ὅλα τὰ στοιχεῖα τοῦ α , ὑπάρχει ὑποσύνολον τοῦ β , πὸ ἔχει τὰ στοιχεῖα τοῦ α γὰρ τὰ ὅποια ισχύει ἡ ιδιότης, καὶ μόνον αὐτὰ (Ἀξίωμα τῶν ὑποσυνόλων).

6. Ἐν τὰ στοιχεῖα τοῦ α εἶναι ἀνὰ δύο $\xi \varepsilon \nu \alpha$ ¹³, δέν ἔχουν δηλαδὴ κοινὸ στοιχεῖον, καὶ καθένα ἀπ' αὐτὰ ἔχει τουλάχιστον ἓνα στοιχεῖον, τότε ὑπάρχει τουλάχιστον ἓνα σύνολον, τὸ ὅποιον ἔχει ἓνα καὶ μόνον στοιχεῖον κοινὸν μετὰ κάθε στοιχεῖον τοῦ α , δέν ἔχει ὅμως κανένα ἄλλο στοιχεῖον (Ἀξίωμα τῆς ἐπιλογῆς)¹⁴.

Ὁρισμός. Μηδενικὸν στοιχεῖον λέγεται ἐκεῖνο πὸ δέν ἔχει στοι-

12. Τὸ ἀξίωμα «δυναμικότητος», πὸ πραγματοποιεῖ τὴν μετάβαση ἀπὸ τὸ ἀριθμητὸ ἀπειροστὸ ὑπερπεπερασμένον (transfinite), φέρεται ὡς ἀξίωμα ὑπάρξεως στὴν Ἀξιωματικὴ τοῦ E. Zermelo, ἐνῶ στὴν Ἀξιωματικὴ τῶν A. Fraenkel - E. Zermelo εἶναι ἀπλῶς κατασκευαστικὸ ἀξίωμα.

13. Ἡ ὑπόθεση, ὅτι τὰ στοιχεῖα εἶναι $\xi \varepsilon \nu \alpha$, ἀποδεικνύεται πὸς ἔμπορεῖ νὰ παραλειφθῇ.

14. Τὸ ἀξίωμα «ἐπιλογῆς» ἀπετέλεσε στὴν Ἱστορία τῶν Μαθηματικῶν ἀντικείμενο

χείον. Συνηθίζεται, κατά σύμβαση, ένα μηδενικόν στοιχείον να λέγεται *μηδενικόν σύνολον*.

Σημείωση. Από τὰ πιὸ πάνω ἀξιώματα συνάγεται ἡ ὑπαρξὴ ἑνὸς καὶ μόνου μηδενικοῦ συνόλου.

7. Ὑπάρχει τουλάχιστον ἓνα σύνολον μὲ τὶς ἐξῆς δύο ιδιότητες :

α) τὸ μηδενικόν σύνολον νὰ εἶναι στοιχείον τοῦ ὑπ' ὧς συνόλου,

β) ἂν a εἶναι στοιχείον τοῦ ὑπ' ὧς συνόλου, τότε στοιχείον τοῦ νὰ εἶναι καὶ τὸ σύνολον μὲ μοναδικόν στοιχείον τὸ a (Ἀξίωμα ἀπείρου συνόλου).

8. Γιὰ κάθε a καὶ γιὰ κάθε μονοσήμαντη ἀντιστοιχία τῶν στοιχείων τοῦ a ἐπάνω σὲ ὅποιαδήποτε στοιχεῖα, ὑπάρχει β μὲ μοναδικὰ στοιχεῖα τὶς *εἰκόνας* τῆς ἀντιστοιχίας αὐτῆς (Ἀξίωμα ἀντικαταστάσεως).

9. Γιὰ κάθε a , ποὺ ἔχει τουλάχιστον ἓνα στοιχείον, ὑπάρχει στοιχείον τοῦ β τέτοιο, ὥστε τὰ a καὶ β νὰ εἶναι ξένα¹⁵.

9. Μὲ βάση ἓνα σύστημα ἀξιωμάτων γιὰ τὴν Θεωρίαν τῶν Συνόλων, ἡ ἀρχὴ τῆς συμπτύξεως ἔχει μιὰ πιὸ στενὴ ἐφαρμογή, σύμφωνα μὲ τὴν ὁποία μαθηματικὲς ὀντότητες, ποὺ ἔχουν κοινὴ ιδιότητα, ἀποτελοῦν ἀπλῶς μιὰ τάξη (κλάση) μὲ στοιχεῖα τὶς ὑπ' ὧς ὀντότητες. Σὲ περίπτωσιν μόνον, ποὺ ἡ τάξη αὐτὴ ἱκανοποιεῖ τὶς συνθῆκες τὶς διατυπούμενες ἀπὸ τὰ ἀξιώματα, ἀποτελεῖ μιὰ νέα μαθηματικὴ ὀντότητα, δυνάμενη καθ' ἑαυτὴν ν' ἀποτελῇ στοιχείον κάποιας ἄλλης τάξεως. Σύνολον λέγεται ἡ τάξη, ὅταν αὐτὴ ἀποτελῇ νέα ὀντότητα.

Ἐξ ἄλλου, βασικὴ ἀρχὴ γιὰ τὴν κατάρτιση ἑνὸς συστήματος ἀξιωμάτων πρέπει νὰ εἶναι (πλὴν τῆς ἀποφυγῆς τῶν γνωστῶν ἀντινομιῶν) καὶ ἡ διάσωση ὅσο τὸ δυνατόν περισσοτέρων ἀπὸ τὰ θεωρήματα τῆς κλασσικῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων, ὅπως ἡ θεωρία αὐτὴ διαμορφώθηκε ἀπὸ τὸν δημιουργό της G. Cantor. Χαρακτηριστικὴ γι' αὐτὸ εἶναι ἡ φράσις τοῦ D. Hilbert: «Ἡ θεωρία τοῦ Cantor εἶναι ἓνας παράδεισος, ἀπὸ τὸν ὅποιον κανεὶς δὲν ἤμπορεῖ νὰ μᾶς ἐκδιώξῃ»¹⁶.

γιὰ πολλὰς συζητήσεις (στὶς ἀρχὲς περίπου τοῦ αἰῶνα μας). Ὁ H. Weyl λέγει γιὰ τὸ ἀξίωμα αὐτό : «Ἡ ἀρχὴ τῆς ἐπιλογῆς εἶναι τὸ αἶτημα τοῦ κατασκευασίμου ἑνὸς ὑπαρξιακῶς προσδιοριζομένου συνόλου» (Ὑπάρξιακῶς προσδιοριζόμενα σύνολα εἶναι τὰ ὀριζόμενα μὲ βάση τὸ ἀξίωμα τῆς συμπτύξεως). Τὸ ἀξίωμα ἐπιλογῆς θεωρεῖται, ἀπὸ μερικοὺς, ὡς ἰσοδύναμο μὲ τὴν γνωστὴ πρότασις (τῆς Θεωρίας τῶν Συνόλων) τῆς *καλῆς διατάξεως*.

15. Κατὰ τὸν K. Goedel, ὁ ρόλος τῆς ἀξιοματικοποιήσεως μιᾶς μαθηματικῆς θεωρίας εἶναι περισσότερο ἐπεξηγηματικὸς παρὰ πραγματιστικὸς, παρόμοια μὲ ὅ,τι συμβαίνει στὴν σύγχρονη Φυσικὴ, ὅπου ἡ πραγματικὴ χρῆσις τῶν ὑποθέσεων (ἀλλιῶς ἀξιωμάτων), ποὺ ἐμφανίζονται σὲ μιὰ φυσικὴ θεωρία, σκοπὸν ἔχει τὴν ἐπεξηγήσιν τῶν φαινομένων τῆς θεωρίας καὶ ὄχι αὐτὴν τὴν ἴδια τὴν θεμελίωσιν τῆς θεωρίας. Βλ. H. Mehlberg *The Present Situation in the Philosophy of Mathematics*, «Synthesis» 12 (1960).

16. D. Hilbert, *Die Grundlagen der Mathematik*, δημοσιευμένο στὸ βιβλίο τοῦ ἰδίου *Grundlagen der Geometrie*, Leipzig-Berlin 1930.

Ἡ κατασκευὴ καὶ ἄλλων συστημάτων ἀπὸ ἀξιώματα, ὅπως ἐκεῖνα τῶν μαθηματικῶν J. von Neumann (1903 - 1957), P. Bernays, K. Goedel κ.ἄ., εἶχεν ὡς ἀφορμὴ ἐκτὸς ἀπὸ τὴν ἀναφερθεῖσα βασικὴ ἀρχὴ καὶ πρόσθετους λόγους, οἱ ὁποῖοι ὁμῶς ἐκφεύγουν ἀπὸ τὸ πλαίσιον τῆς παρούσης μελέτης. Σὲ ἄμεση συνάφεια μὲ τὰ νέα αὐτὰ συστήματα ἀξιωμάτων βρίσκεται κι ἓνα σύστημα ἀπὸ ἀξιώματα τῆς Λογικῆς ὀφειλόμενο στὸν W.V. Quine.

10. Παρὰ τὸ γεγονὸς ὅτι ἡ ἀξιοματικὴ Θεωρία τῶν Συνόλων περιώρισε τὴν πλατωνιστικὴ θέση, ὁμῶς ἡ ἐπίδραση τῆς τελευταίας ἀκόμη καὶ ὑπὸ τὴν στενώτερη ἔννοια στὴν ἀνάπτυξη τῆς Φιλοσοφίας τῶν Μαθηματικῶν δὲν ἔπαυσε νὰ εἶναι σημαντικὴ. Ἡ ἀναθεωρηθεῖσα ἀρχὴ τῆς συμπτύξεως, στὴν ὁποία ὁδηγεῖ ἓνα σύστημα ἀξιωμάτων, ἔδωκε ἀκόμα καὶ τὴν δυνατότητα τῆς ἀποφυγῆς τῶν λεγομένων μὴ κατηγορικῶν ὀρισμῶν¹⁷. Μὴ κ α τ η γ ο ρ ι κ ὸ ς ὀ ρ ι σ μ ὸ ς γιὰ μιὰ τάξη ἢ ἓνα σύνολον εἶναι ἐκεῖνος ὁ ὀρισμός, σύμφωνα μὲ τὸν ὁποῖον ἡ τάξη ἢ τὸ σύνολον ὀρίζονται, ἢ εἶναι ὀριστέοι, σὲ ἀναφορὰ μὲ κάποια ὀλότητα, στὴν ὁποίαν ἀνήκει ἡ ἴδια ἡ τάξη, ἀντιστοιχῶς τὸ σύνολον. Ἡμπορεῖ ἀκόμη νὰ εἰπῇ κανεὶς, ὅτι μὴ κατηγορικὸς ὀρισμός, γραμμένος μὲ σύμβολα ἐνὸς συνόλου, εἶναι ἐκεῖνος ποὺ ὀρίζει τὸ ἐν λόγω σύνολον, ἐνῶ τοῦτο εἶναι μία ἀπὸ τὶς τιμὲς δεσμευμένης μεταβλητῆς, ποὺ εἰσέρχεται στὸν τύπον, ὁ ὁποῖος ὀρίζει τὸ σύνολον.

Ὡς παράδειγμα ἄς θεωρήσωμε τὸ σύνολον μὲ τὴν εὐρεῖα ἔννοια ὅλων τῶν συνόλων, ποὺ δὲν περιέχουν τὰ ἴδια τὰ σύνολα ὡς στοιχεῖα — σύνολον ποὺ συναντήσαμε στὴν ἀντινομία Russell. Μὲ τὴν γενόμενη πρὸ πάνω διάκριση μεταξὺ τάξεως καὶ συνόλου, ἡ διατύπωση τοῦ παραδείγματος αὐτοῦ πρέπει νὰ τροποποιηθῇ σὲ τρόπο, ὥστε ἀντὶ «τὸ σύνολον κτλ.» νὰ εἰπωθῇ «ἡ τάξη ὅλων τῶν συνόλων ποὺ δὲν περιέχουν τὰ ἴδια ὡς στοιχεῖα κτλ.» Ὁ μὴ κατηγορικὸς ὀρισμός ἐμφανίζεται ἀκριβῶς τότε, ὅταν ἡ ὑπ' ὄψῃ τάξη δὲν εἶναι σύνολον καὶ συνεπῶς δὲν ἀνήκει στὴν ὀλότητα τῶν συνόλων, τὰ ὁποῖα διατρέχει ἡ δεσμευμένη μεταβλητὴ, οὔτε ἄρα ἔχομε μὴ κατηγορικὸ ὀρισμό.

Ἡ ἀποφυγὴ τῶρα μὴ κατηγορικῶν ὀρισμῶν μὲ τὴν εἰσαγωγὴ ἐνὸς ἀξιώματος, σύμφωνα μὲ τὸ ὁποῖον μία τάξη θὰ ἡμπορῇ νὰ συμπτυχθῇ σὲ σύνολον τότε μόνον ὅταν ἡ τάξη αὐτὴ δὲν ὀρίζεται (ἢ εἶναι ὀριστέα) ἀπὸ δεσμευμένη μεταβλητὴ διατρέχουσα ὡς τιμὲς σύνολα, — ἂν καὶ ἀπὸ πρώτη ἀντιμετώπιση φαίνεται εὐλόγος — δὲν κρίνεται ὁμῶς σκόπιμος· καὶ τοῦτο λόγῳ τῆς σὲ μεγάλη κλίμακα περιοριστικῆς συνθήκης ποὺ διατυπώνεται μὲ τὸ ὑπ' ὄψῃ ἀξίωμα. Ἐξ ἄλλου, ὁ ἰσχυρισμός ὅτι ἡ ἔκφραση «δεσμευμένη μεταβλητὴ διατρέχουσα ὡς τιμὲς σύνολα» ἐνέχει ἀπροσδιοριστία, κατὰ τὴν

17. Φ. Βασιλείου, *Φιλοσοφία τῶν Μαθηματικῶν*, 55. Ἐδῶ οἱ μὴ κατηγορικοὶ ὀρισμοὶ ἀποδίδονται μὲ τὸν ὅρον «αὐτοκατηγορικοί».

πλατωνιστική θέση δεν εϋσταθεῖ, γιατί κατὰ τὴν θέση αὐτὴν τὰ θεωρούμενα σύνολα ὑπάρχουν καθ' ἑαυτὰ καὶ δὲν προσδιορίζονται κάθε φορά ὡς κάτι τὸ νέον πὺ προσθέτει κανεῖς σὲ μιὰ περιοχὴ συνόλων, περιοχὴ ἐκ τῶν προτέρων καθωρισμένη. Ἔτσι, κατὰ τὴν πλατωνιστικὴ τοποθέτηση ἡ σύμπτυξη μιᾶς τάξεως, ὅταν ἡ σύμπτυξη αὐτὴ καθορίζεται ἀπὸ ἓνα σύστημα ἀξιωμάτων ὅπως τὸ ἀναφερόμενο, δὲν φαίνεται νὰ δημιουργῇ προβλήματα ἀναφορικὰ μὲ τοὺς μὴ κατηγορικοὺς ὁρισμούς.

11. Ἄν θελήσωμε τώρα νὰ παραβάλωμε τὴν πλατωνιστικὴ μὲ τὴν ὀνοματοκρατικὴ ἄποψη, θὰ παρατηρήσωμε σημαντικὲς διαφορές, πὺ χωρίζουν τὶς δύο αὐτὲς φιλοσοφικὲς τάσεις στὰ Μαθηματικά. Ὅπως τονίσαμε κιόλας στὰ προηγούμενα, τὴν ὀνοματοκρατικὴ τάση χαρακτηρίζει ἡ ἀντίθεσή της μὲ ὁποιαδήποτε ὄντολογικὴ τοποθέτηση, ἐνῶ ἀντίθετα στὴν πλατωνιστικὴ προσιδιάζει ἡ προσήλωσή της σὲ μιὰ καθαρὰ ὄντολογικὴ θέση. Εὐλογον εἶναι λοιπὸν νὰ ἐρωτήσῃ κανεῖς, ποῖα εἶναι ἡ ὀνοματοκρατικὴ ἀντιμετώπιση ἐνὸς πλατωνιστικοῦ συστήματος ἀξιωμάτων γιὰ τὸν περιορισμὸ τῆς ἐννοίας τοῦ συνόλου καὶ γιὰ τὸν ἀποκλεισμὸ τῶν μὴ κατηγορικῶν ὁρισμῶν. Παρατηρήσαμε κιόλας στὰ προηγούμενα, ὅτι ἡ ἀντίθεση τῆς ὀνοματοκρατικῆς ἀπόψεως ἀπέναντι στὸν Πλατωνισμὸ δὲν βασίζεται τόσο στὴν σύμπτυξη τάξεων σὲ μιὰ νέα ὄντοτητα, ὅσο στὴν παραδοχὴ τῆς ὄντοτητος αὐτῆς ὡς τιμῆς δεσμευμένης μεταβλητῆς¹⁸. Καὶ τοῦτο γιατί, ἀπὸ τὸ ἓνα μέρος ἡ ὄντοτης πὺ προέρχεται ἀπὸ σύμπτυξη ἡμπορεῖ, κατὰ τοὺς ὀνοματοκρατικούς, νὰ θεωρηθῇ ἐπὶ τέλους ὡς μιὰ ἀπλὴ ὀνομασία, ἐνῶ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος ἡ οὐσιαστικότης πὺ ἀποδίδομε στὴν συμπτυχθεῖσα τάξη εἶναι κάτι, πὺ κανεῖς συνειδητὸς ὀνοματοκράτης δὲν εἶναι δυνατόν νὰ παραδεχθῇ¹⁹. Γιὰ τὸν λόγον αὐτὸν ἓνα ὀνοματοκρατικὸ σύστημα ἀξιωμάτων, ἀναφορικὰ μὲ τὴν συνθήκη συμπτύξεως μιᾶς τάξεως σὲ σύνολον, διαφέρει οὐσιαστικὰ ἀπὸ τὸ ἀνάλογο πλατωνιστικὸ σύστημα. Καὶ ἡ οὐσιαστικὴ διαφορὰ δὲν πρέπει νὰ ζητηθῇ τόσο στὴν διατύπωση τῶν ἀξιωμάτων ὅσο στὴν ἴδια τὴν ἐρμηνεία τους. Ἄλλωστε, εἶναι ἀξιοσημεῖωτο τὸ γεγονὸς, ὅτι μιὰ τέτοια διάφορη τῆς πλατωνιστικῆς ἐρμηνεία εἶναι ἐφικτή. Αὐτὸ ὀφείλεται μάλιστα σὲ ἰδέες τοῦ K. Goedel, τοῦ ὁποῖου ἡ ἀπόκλιση στὸν Πλατωνισμὸ ὀμολογεῖται ἀπὸ αὐτὸν τὸν ἴδιον. Μιὰ τέτοια ἐρμηνεία ξεκινᾷ ἀπὸ τὸ αἶτημα, ὅτι ὅλες οἱ ὄντοτητες, πὺ ὑπείσέρχονται στὸ ἐρμηνευόμενον σύστημα, ἡμποροῦν νὰ θεωρηθοῦν ὡς συγκεκριμένα ἀντικείμενα²⁰.

18. E. W. Beth, *The Foundations of Mathematics*, Amsterdam, North-Holland Publ. Co 1968, 471 - 472.

19. E. W. Beth, ὁ.π. 472.

20. W. Stegmüller, *Das Universalienproblem*, Darmstadt 1967 (ἀπὸ τὸ «Archiv für Philosophie» 6 [1956] 192 - 225).

Πρέπει στὸ σημεῖο αὐτὸ νὰ τονισθῇ, ὅτι ἐνῶ ὁ ὑπὸ στενὴν ἔννοια Πλατωνισμὸς βρίσκεται σὲ στενὴ σύνδεση μὲ τὴν παλαιότερη πλατωνιστικὴ ὄντολογία, ἡ σύγχρονη Ὀνοματοκρατία διαφέρει οὐσιαστικὰ ἀπὸ τὴν παραδοσιακὴν.

12. Γεννιέται ὁμως καὶ τὸ ἄλλο εὖλογον ἐρώτημα, ἂν δηλαδὴ καθετὶ ποὺ συνάγεται σύμφωνα μὲ τὴν πλατωνιστικὴ ἄποψη ἀπὸ ἓνα πλατωνιστικὸ σύστημα ἀξιωμάτων ἡμπορῇ νὰ συναχθῇ ἀπὸ τὸ ἴδιο σύστημα ἐρμηνευόμενο ὀνοματοκρατικά, καὶ φυσικὰ τὸ ἀντίστροφον. Μὲ πιὸ σύντομη διατύπωση: Καθετὶ ποὺ λέγεται στὴν πλατωνιστικὴ γλῶσσα ἡμπορεῖ νὰ εἰπωθῇ στὴν ὀνοματοκρατικὴ, καὶ τὸ ἀντίστροφον; Ἐφ' ὅσον ὁ Πλατωνισμὸς κάνει χρῆση μεταβλητῶν, ποὺ διατρέχουν ἀφηρημένα ὄντα (ὅπως σύνολα, κατηγορήματα, σχέσεις κτλ.), πρᾶγμα ποὺ δὲν συμβαίνει στὴν Ὀνοματοκρατία, εἶναι ἐπόμενο νὰ τελευταία ἄποψη νὰ εἶναι λιγώτερο πλούσια σὲ ἀρχὲς ξεκινήματος ἀπὸ τὴν πρώτη. Ἄρα, ἡ ἀπάντηση στὸ εὐθὺ μέρος τῶν πιὸ πάνω ἐρωτημάτων πρέπει σὲ πρώτη ἀντιμετώπιση νὰ εἶναι ἀρνητικὴ, ἐνῶ πρέπει νὰ εἶναι θετικὴ στὸ ἀντίστροφον μέρος. Ἀλλὰ καὶ ἀπὸ βαθύτερη ἐξέταση διαπιστώθηκε ὅτι, παρὰ τὶς ὡς τώρα γενόμενες προσπάθειες καὶ παρὰ τὴν ἐπέκταση ποὺ δόθηκε ὁλοένα στὶς ὀνοματοκρατικὲς παραδοχές, δὲν ἡμπορεῖ κανεὶς ν' ἀπαντήσῃ κατὰ διαφορετικὸ τρόπο στὰ ἐρωτήματα ποὺ θέσαμε πιὸ πάνω. Ὅπωςδὴποτε, ἓνας σοβαρὸς λόγος ποὺ ἡ πλατωνιστικὴ ὄντολογία —ποὺ ὡς τὴν ἐποχὴ τῆς αὐστηρῆς θεμελιώσεως τῶν Μαθηματικῶν θεωρήθηκε ὡς ἓνα χρήσιμο καὶ ἄνετο μέσον γιὰ τὴν ἀνάπτυξή τους— προκάλεσε ἓνα αἶσθημα ἀνησυχίας καὶ ἀβεβαιότητος, ἦταν, ὅπως πολλές φορές τονίσαμε στὰ προηγούμενα, οἱ ἀντινομίες. Ἀπ' ἐδῶ ξεκίνησαν οἱ φιλοσοφικὲς ἀπόψεις ποὺ συμπληρώνουν τὸν Πλατωνισμὸ σ' ἓνα τρίπτυχο λογικῶν δυνατοτήτων· εἶναι ἀκριβῶς ἡ Ὀνοματοκρατία καὶ ἡ μνημονευθεῖσα πρὶν Ἐννοιοκρατία. Ὅμως καὶ ἄλλοι πρόσθετοι λόγοι, ἐκτὸς ἀπὸ τὶς ἀντινομίες, ὑπῆρξαν ἡ ἀφορμὴ γιὰ τὴν προσφυγὴ στὶς νέες ἀπόψεις, λόγοι ὀφειλόμενοι σὲ δυσεπίλυτα προβλήματα ποὺ ἐμφανίσθηκαν κατὰ τὴν πρόοδο τῆς θεμελιώσεως τῶν Μαθηματικῶν. Καὶ οἱ νέες αὐτὲς ἀπόψεις δὲν στάθηκαν εὐτυχέστερες τῆς πρώτης γιὰ τὴν ὀριστικὴν ἐπίλυση τῶν προβλημάτων ποὺ τὶς ἐγέννησαν.

13. Ὅπως εἶπαμε κιόλας, ἡ Ἐννοιοκρατία ἀντιπροσωπεύει τὴν ἄποψη ὅτι τὰ καθόλου εἶναι δημιουργήματα τοῦ νοῦ. Ἀνάλογα μὲ τὴν Ὀνοματοκρατία ἐξελίχθηκε καὶ ἡ Ἐννοιοκρατία σὲ τρόπο, ὥστε καὶ γι' αὐτὴν νὰ παρίσταται ἀνάγκη κάποιας διακρίσεως σὲ σύγκριση μὲ τὴν παλαιότερη. Τόσον ὁμως ἡ Ἐννοιοκρατία ὅσον καὶ ὁ κλάδος τῆς, ἡ κατασκευαστικὴ Ἐννοιοκρατία, εἶναι, ὅπως εἶπαμε, περισσότερο παραλλαγὴ τοῦ Πλατωνισμοῦ.

Κατὰ τοὺς A. Fraenkel καὶ Y. Bar Hillel «οἱ ἐννοιοκρατικοὶ ἰσχυρίζονται ὅτι κατανοοῦν τί εἶναι σύνολον, ἂν καὶ ἡ μεταφορικὴ ἔννοια ποὺ προτιμοῦν εἶναι περισσότερον ἢ ἔννοια τῆς κατασκευῆς (ἢ τῆς ἐπινοήσεως) παρὰ τῆς ἐπιλογῆς (ἢ τῆς ἀνακαλύψεως), ποὺ εἶναι ἀρεστὴ στοὺς πλατωνιστές. Οἱ μεταφορικὲς αὐτὲς ἔννοιες τῆς κατασκευῆς καὶ ἐπιλογῆς ἀντικαθιστοῦν τὴν παλαιότερη ἀντίθεση ἀνάμεσα στὶς ἐκφράσεις: ὕπαρξη στὸν νοῦν καὶ ὕπαρξη ἔξω ἀπὸ τὸν νοῦν (σ' ἓνα πραγματικὸ ἢ ἰδεατὸ κόσμον). Εἶναι πρόθυμοι (οἱ ἐννοιοκρατικοί) νὰ παραδεχθοῦν, ὅτι κάθε καθωρισμένη καὶ σαφὴς συνθήκη προσδιορίζει πραγματικὰ ἓνα ἀντίστοιχο σύνολον—ἀφοῦ εἶναι σὲ θέση, στὴν περίπτωσιν αὐτή, νὰ κατασκευάσῃ τὸ σύνολον αὐτὸ μέσα ἀπὸ ἓνα πλῆθος συνόλων, ἢ ὕπαρξη τῶν ὁποίων ἢ εἶναι ἐνορατικῶς φανερὴ ἢ τὰ ὁποῖα ἔχουν ἐνωρίτερα κατασκευασθῇ—δὲν εἶναι ὅμως πρόθυμοι νὰ παραδεχθοῦν ἀξιώματα ἢ θεωρήματα, τὰ ὁποῖα τοὺς ἀναγκάζουν νὰ δεχθοῦν τὴν ὕπαρξη συνόλων, ποὺ δὲν εἶναι κατασκευαστικῶς χαρακτηριστέα²¹. Γι' αὐτὸ δὲν παραδέχονται σύνολα, ποὺ ἀντιστοιχοῦν σὲ μὴ κατηγορικὲς συνθήκες (ἐκτὸς ἂν, ἐννοεῖται, οἱ συνθήκες αὐτὲς εἶναι ἀποδεικτικὰ ἰσοδύναμες μὲ κατηγορήματα), καὶ ἀπορρίπτουν τὴν ἰσχὺν τοῦ θεωρήματος τοῦ G. Cantor (τῆς δυναμικότητος) στὴν ἀπλοϊκὴ, ἀπόλυτη ἐρμηνεία, ἐπειδὴ δίνει στὸ σύνολον δυναμικότητος δοθέντος συνόλου ἓνα μεγαλύτερο πληθικὸν ἀριθμὸν ἀπὸ ἐκεῖνον τοῦ ἴδιου τοῦ συνόλου. Θεωροῦν οἱ ἐννοιοκρατικοὶ ὅτι ἀπόλυτη μὴ ἀριθμησιμότης στερεῖται νοήματος, μολονότι ἓνα ἄπειρον σύνολον εἶναι δυνατόν νὰ μὴ ἡμπορῇ ν' ἀριθμηθῇ μὲ ὠρισμένα διδόμενα μέσα».

Πρέπει νὰ προστεθῇ, ὅτι παλαιότεροι καὶ σύγχρονοι ὁπαδοὶ τῆς Ἐννοιοκρατίας ὅχι μόνον ἀπορρίπτουν τὴν μόρφωση κάθε εἵδους μὴ κατηγορικῶν ἐννοιῶν καὶ ὀρισμῶν, ἀλλὰ ἀκόμα ἀπορρίπτουν καὶ τὴν μόρφωση τῆς εὐρύτερης κατηγορίας τῶν κατὰ Cantor ἀπροσδιορίστων ἐννοιῶν²². Πρόκειται, μὲ ἄλλες λέξεις, περὶ τῶν ἐρευνητῶν ἐκείνων ποὺ δὲν παραδέχονται τὴν χρῆσιν συμβολικῆς γλώσσης μὲ ἀπεριόριστο πλῆθος ποσοδεικτῶν. Μεταξὺ τῶν ὑπ' ὄψιν ὁπαδῶν πρέπει νὰ καταταχθοῦν, πλὴν τῶν L.S.J. Brouwer (1881-) καὶ L. Wittgenstein (1889-1951), καὶ οἱ νεώτεροι S. Scolem, R.I. Goodstein. Τὴν ὥς ἄνω ἀπόρριψή τους στηρίζουν οἱ ὁπαδοὶ αὐτοὶ τῆς Ἐννοιοκρατίας στὸ γεγονὸς, ὅτι δὲν ὑπάρχουν μέθοδοι ἀποκρίσεως γιὰ τὴν ἀλήθεια προτάσεων ποὺ περιέχουν ἀπεριόριστο πλῆθος ποσοδεικτῶν καὶ ὅτι, γιὰ τὸν λόγον αὐτόν, πρέπει οἱ προτάσεις αὐτὲς νὰ θεωροῦνται στερούμενες ὁποιουδήποτε νοήματος.

21. E. W. Beth, *L'existence en mathématiques*, Paris - Louvain 1956, 41 ἐπ.

22. A. Fraenkel - Y. Bar Hiller, *Foundations of Set-Theory*, Amsterdam, North - Holland Publ. Co 1968, 340.

14. Εἶναι ἀδύνατον, με ὁποιαδήποτε ἀποδεικτικά ἢ καὶ ἐμπειρικά μέσα, ν' ἀποφανθῇ κανεῖς γιὰ τὴν ὁρθότητα αὐτῆς ἢ ἐκείνης τῆς φιλοσοφικῆς τάσεως στὰ Μαθηματικά, ἐφ' ὅσον σὲ καμιά ἀπὸ τὶς τάσεις αὐτὲς δὲν ἐπετεύχθηκε ὁ ἀντικειμενικὸς σκοπός, πού σὲ τελευταία ἀνάλυση εἶναι αὐτὴ ἡ ἐδραίωση τῶν Μαθηματικῶν. Διάφοροι παράγοντες, ἰδιαίτερα παράγοντες νοοτροπίας καὶ ιδιοσυγκρασίας, ὁδηγοῦν τὸν μαθηματικὸ στὶς φιλοσοφικὲς τοῦ πεποιθήσεις πού, ὅπως εἶπαμε κιόλας, δὲν μένουν πολλὲς φορὲς ἀναλλοίωτες σ' ὅλη τὴ διάρκεια τοῦ ἐρευνητικοῦ βίου ἐνὸς ἐπιστήμονος. Στὶς γενικὲς παρατηρήσεις πού ἀκολουθοῦν στὴν μεθεπόμενη παράγραφο, θὰ ἐκτεθοῦν συνοπτικὰ τὰ πλεονεκτήματα ἀλλὰ καὶ οἱ ὑστερήσεις καθεμιᾶς τῶν ἀπόψεων πού ἐξετάσθησαν.

Ἄν ἀναζητήσῃ λοιπὸν κανεῖς ἓνα χαρακτηριστικὸ ὑπόστρωμα, αὐτὸ πού ὁ A. Beth ὀνομάζει ὑποκειμένη πραγματικότητα²³, καταλήγει στὰ ἑξῆς: Γιὰ τὴν Ὄνοματοκρατία τὸ πραγματικὸ ὑπόστρωμα εἶναι φυσικό, ὑπὸ τὴν ἔννοια ὅτι ἀποτελεῖται ἀπὸ ἓνα (ἀπεριόριστο) πλῆθος ἀτόμων ἢ, στὴν στενότερη ἐκδοχή, ἀπὸ ἓνα πλῆθος ὅσονδήποτε μεγάλο φυσικῶν ἀντικειμένων. Γιὰ τὸν Πλατωνισμό, τὸ ὑπόστρωμα εἶναι μεταφυσικό (ὑπερβατικό), ἀποτελούμενο ἀπὸ ἰδεατὰ ὄντα καθ' ἑαυτὰ ὑπαρκτὰ σ' ἓναν κόσμον ἔξω ἀπὸ τὴν σφαῖρα τοῦ ἐπαισθητοῦ, ἀλλὰ καὶ ἔξω ἀπὸ τὴν σφαῖρα τῶν δημιουργημάτων τοῦ νοῦ. Τὰ ὄντα αὐτὰ ὑπενθυμίζουν τὶς ἰδέες τοῦ Πλάτωνος. Κατὰ πόσον ὅμως ὁ Πλάτων θὰ ἐταύτιζε πραγματικὰ τὰ ὑπ' ὅψη ὄντα με τὶς ἰδέες του, αὐτὸ εἶναι κάτι τὸ συζητήσιμο. Τέλος γιὰ τὴν Ἐννοιοκρατία ἡ ὑποκειμένη πραγματικότητα εἶναι κάτι τὸ ἔμφυτο, ἅμεσα σχετιζόμενο με τὴν ἀνάλυση τῆς ἴδιας τῆς σκέψεως, ἀφοῦ ὁ νοῦς εἶναι τώρα ὁ δημιουργὸς τοῦ κόσμου τῶν ἐννοιῶν. Κάθε μεταφυσικὸ στοιχεῖον εἶναι γιὰ τὴν Ἐννοιοκρατία παντελῶς ἀπορριπτέο, καὶ πραγματικὸ εἶναι μόνον ὅ,τι, πλὴν τῆς ἐπαισθήσεως, δίνει ἢ ἐν ὁρασῇ.

15. Μεταξὺ τῶν τριῶν φιλοσοφικῶν κατευθύνσεων πού ἐξετάσαμε ὁ Πλατωνισμός διακλαδίζεται ἀνάλογα με τὰ εἶδη ἀφηρημένων ἀντικειμένων πού διατρέχουν οἱ μεταβλητές. Ἔτσι διακρίνομε Πλατωνισμό ἰδιοτήτων, σχέσεων, προτάσεων κτλ., ὅπως καὶ συνδυασμούς των. Ἀλλὰ ἀναφορικὰ καὶ με τὶς δύο λογικὲς ἔννοιες, τὴν ἔνταση καὶ τὴν ἑκταση (γιὰ τὶς ὁποῖες ἔγινε λόγος στὴν δεύτερη παράγραφο), διακρίνομε πλατωνιστικὰ συστήματα πού συνδέονται με τὶς ἔννοιες αὐτές²⁴. Ἐξ ἄλλου, ἔχουν μορφωθῇ διάφορα ὀνοματοκρατικὰ συστήματα, με ἰσχυρὲς μεταξὺ τους ἀποκλίσεις, τὰ γνωστότερα τῶν ὁποίων ὀφείλονται στοὺς L. Chwistek (1884 - 1945) καὶ

23. E. W. Beth, *Mathematical Thought*, Dordrecht, Reidel Publ. Co 1965, 170.

24. W. Stegmüller, *Das Universalienproblem* 54.

P. Lorenzen. 'Ακόμα και για την 'Εννοιοκρατία διακρίναμε κιόλας την κατασκευαστική της παραλλαγή.

Συσχετίζοντας τώρα κανείς τις κατευθύνσεις αυτές με τις τρεις κύριες μαθηματικές Σχολές, την Φορμαλιστική, την Λογικιστική και την 'Ενορατική, παρατηρεί ότι από τις Σχολές αυτές μόνον ή τελευταία ανήκει αποκλειστικά σε ώρισμένη φιλοσοφική θέση, την 'Εννοιοκρατία· από τις δύο άλλες Σχολές, ή Λογικιστική, μολονότι έχει γενικά πλατωνιστικό χαρακτήρα, όμως δεν παύει να επικαλύπτεται και με τις δύο απομένουσες φιλοσοφικές θέσεις, και ή Φορμαλιστική, που έχει στενή συγγένεια με την 'Ονοματοκρατία, τρέπεται με τὰ Μεταμαθηματικά της προς την 'Εννοιοκρατία.

16. Σε μιὰ τέλος κριτική ανασκόπηση τῶν ὡς ἄνω φιλοσοφικῶν κατευθύνσεων, δὲν πρέπει νὰ παραβλέψη κανεὶς τὸ γεγονὸς ὅτι οἱ κατευθύνσεις αὐτὲς ξεκίνησαν καὶ ἀναπτύχθηκαν ἀπὸ ἓνα καὶ τὸ αὐτὸ πρόβλημα πού, σὲ τελευταία ἀνάλυση, ἀφορᾷ στὴν ἐδραίωση τῶν Μαθηματικῶν. Τὸ ἐν λόγῳ πρόβλημα στάθηκε ἀδύνατον νὰ ἐπιλυθῇ σ' αὐτὸ τοῦτο τὸ πλαίσιο τῆς ἐπιστήμης τῶν Μαθηματικῶν· ἔτσι ἡ προσφυγὴ στὴν Φιλοσοφία φάνηκε ἀπαραίτητη. Ἡ εὕρεση λοιπὸν ἑνὸς ἀσφαλοῦς κριτηρίου γιὰ τὴν κριτικὴ ἀποτίμηση τῶν ὑπ' ὄψῃ κατευθύνσεων πρέπει νὰ ζητηθῇ στὴν πληρέστερη προσπέλαση, ἂν ὅχι στὴν ὀριστικὴ ἐπίλυση, τοῦ προβλήματος πού ἐξετάζομε. Μὲ τὸ πνεῦμα αὐτὸ θεωρούμενες οἱ ἐκτεθεῖσες τρεῖς φιλοσοφικὲς κατευθύνσεις ὁδηγοῦν στὶς ἐπόμενες κρίσεις: Ἀναμφισβήτητη εἶναι ἡ μεγάλη ἐπίδραση τοῦ Πλατωνισμοῦ γενικὰ στὴν Φιλοσοφία τῶν Μαθηματικῶν. Αὐτὸ δὲν πρέπει νὰ μᾶς ἐκπλήσσει, ἂν λάβωμε ὑπ' ὄψῃ τὴν τεράστια σημασία πού εἶχε ὁ Πλατωνισμός, εὐθὺς ἀπὸ τὴν ἀρχή, σ' αὐτὴν τὴν ἴδια τὴν μαθηματικὴ σκέψη. Αὐτὸς εἶναι καὶ ὁ λόγος πού μεγάλοι δημιουργοὶ στράφηκαν στὴν διδασκαλία τοῦ Πλάτωνος καὶ ἐπηρεάσθηκαν ἀπ' αὐτήν.

Παρ' ὅλην ὅμως τὴν μεγάλη συμβολὴ στὴν ἀνάπτυξη τῶν Μαθηματικῶν, ὁ Πλατωνισμός ἔχασε ἓνα σημαντικὸ μέρος τοῦ κύρους του ἀπὸ τὴν ἐποχὴ πού ἐμφανίσθηκαν οἱ ἀντινομίες τόσο στὴν Λογικὴ ὅσο καὶ στὴν Θεωρία τῶν Συνόλων. Ἡ 'Ονοματοκρατία ἀναζήτησε νὰ παρακάμψῃ τὸν σκόπελο τῶν ἀντινομιῶν μὲ τὴν παραδοχὴ μιᾶς ἀρχῆς. Σὲ συντομία, ἡ ἀρχὴ αὐτὴ ἐκφράζει ὅτι ἓνα σύνολον δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο παρὰ ἓνας τ ρ ὁ π ο ς τ ο ὕ λ έ γ ε ι ν. Οἱ δυσκολίες καὶ τῆς θεωρήσεως αὐτῆς φάνηκαν ἀπὸ τὴν στιγμή πού ζητήθηκε νὰ ἐρμηνευθοῦν στὴν ὀνοματοκρατικὴ γλῶσσα ὅλα τὰ ἐξαγόμενα τῶν κλασσικῶν Μαθηματικῶν. Ὡς σήμερα οἱ δυσκολίες αὐτὲς δὲν ἔχουν ὑπερπηδηθῇ, οὔτε ὑπάρχουν γι' αὐτὸ μεγάλες ἐλπίδες. Ἐτσι ἡ 'Ονοματοκρατία ἡμπορεῖ νὰ χαρακτηρισθῇ ὡς ἓνα μ ε ρ ι κ ὸ σύστημα, κατὰ τὴν ἰδρυση τῶν Μαθηματικῶν, κι αὐτὸ γιὰ τὴν ἀπώλεια ἑνὸς μεγάλου μέρους τῶν παραδοσιακῶν θεωριῶν. Γιὰ ὅσους πάλιν δὲν παραδέχονται

παρὰ τὴν περατοκρατικὴ ἄποψη τῆς Ὄνοματοκρατίας — ἐκείνους δηλαδὴ γιὰ τοὺς ὁποίους τὸ Σύμπαν ἀποτελεῖται ἀπὸ πεπερασμένο πλῆθος στοιχεῖα— ἡ εἰσδοχὴ μὴ πεπερασμένων κατὰ τὸ πλῆθος στοιχείων ἀποτελεῖ μιὰ κ α τ' ἐ κ δ ο χ ῆ ν ὑπαρξή, δηλαδὴ ἓνα «τρόπον τοῦ λέγειν». Τὴν στιγμή ὅμως ποὺ εἰσάγει κανεὶς κατ' ἐκδοχὴν παραδοχές, ἡ ἀπόσταση ἀπὸ ἓναν ὀρθόδοξο Πλατωνισμό δὲν φαίνεται πιά νὰ εἶναι καὶ τόσο μεγάλη.

Τέλος, ἡ Ἐννοιοκρατία ἔχει δύο ὄψεις, τὴν ψυχολογική καὶ τὴν κατασκευαστική. Ἡ πρώτη ἐκφεύγει ἀπὸ τὸ πλαίσιο τῆς καθαρὰ μαθηματικῆς θεωρήσεως, γι' αὐτὸ καὶ δὲν ἔγινε στὰ προηγούμενα λόγος γι' αὐτήν. Ἡ δεύτερη, ποὺ βρίσκεται σήμερα στὸ προσκήνιο, εἶναι σὲ ἄμεση ἀντίθεση πρὸς τὸν Πλατωνισμό ὑπὸ εὐρείαν ἔννοια. Σχετικὰ μὲ τὸν Πλατωνισμό ὑπὸ στενὴν ἔννοια ἡ διαφορὰ μὲ τὴν Ἐννοιοκρατία δὲν εἶναι καθ' ὅλοκληρίαν ἀγεφύρωτη· ἀπ' ἐναντίας ὑπάρχει μεταξύ τους μιὰ κάποια ἐκλεκτικὴ συγγένεια, σὲ τρόπο ὥστε πολλοὶ βλέπουν τὴν Ἐννοιοκρατία ὡς ἀπλὴ παραλλαγὴ τοῦ Πλατωνισμοῦ.

NOMINALISM, CONCEPTUALISM AND PLATONISM IN MATHEMATICS

S u m m a r y.

This paper has been motivated by an article of A. Fotinis under the title *A Critical Evaluation of Universals in Nominalism*, published in this Yearbook (3/1973, 382 - 404). My aim is a critical evaluation of universals, particularly in mathematics where universals play a significant role.

In the philosophy of mathematics, where instead of universals we speak about classes and sets, we find the well-known alternatives of nominalism, conceptualism, and Platonism. In this paper I understand nominalism and Platonism in the modern meaning of these terms, not in the traditional sense. No confusion is to be feared on account of this restriction, since their respective classical versions are out of consideration.

The influence of Platonism in the philosophy of mathematics, even in mathematics itself, remains remarkable to our own day, in spite of the appearance of the antinomies that has diminished its former prestige. On the other hand, nominalistic language has proved unable to translate all classical mathematics.

The disagreement, however, of constructive conceptualism with Platonism has not proved so big, and the gap between the two alternatives can be

bridged over. For many philosophers and mathematicians there exists a certain eclectic affinity between these two alternatives, which makes it possible to regard the first as a variation of the second.

I also consider, as seems necessary, the correlation between the three above mentioned philosophical alternatives, on the one hand, and the principal mathematical schools, namely formalism, intuitionism and logicism, on the other.

Athens

Philon Vassiliou