

DEMETRIOS MOUKANOS, Göttingen

DAS PROBLEM DER ERZEUGUNG DER ZAHLEN BEI PLATON

ERLÄUTERUNG VON ARISTOTELES' *METAPHYSIK* A 6, 987 b 33*

Ich werde hier versuchen, mich mit einem Teilaspekt der Theorie der Arithmetik Platons, wie sie von Aristoteles dargestellt wird, konkret auseinanderzusetzen in gleichzeitiger Auseinandersetzung mit der Literatur. Die Stelle *Metaph.* 987 b 33-988 a 1, deren Interpretation dieses Kapitel speziell gewidmet ist, enthält eine besondere Schwierigkeit; sie betrifft die Deutung der Worte: τὸ δὲ δυάδα ποιῆσαι τὴν ἑτέραν φύσιν διὰ τὸ τοὺς ἀριθμοὺς ἔξω τῶν πρώτων εὐφυῶς ἔξ αὐτῆς γεννᾶσθαι ὥσπερ ἐκ τινος ἐκμαγείου, d.h.: «Die Zweiheit führte Platon als anderes Prinzip ein, wegen der bequemen Möglichkeit, aus ihr wie aus einem bildsamen Stoff die Zahlen ἔξω τῶν πρώτων entstehen zu lassen».

Von der Genesis der Zahlen spricht nun dieser Text. Man erwartet, daß Aristoteles hier die platonische Theorie deutlich wiedergibt. Aber er eröffnet das Thema mit einer Schwierigkeit, die den Gedankengang stört. Sie ist mit dem Wort πρώτων verbunden. Von den textlichen Schwierigkeiten muß im weiteren ausführlich die Rede sein.

Aristoteles sagt hier nicht, ob Platon die eidetischen Zahlen oder die mathematischen im Auge hat; damit bleibt die Kernfrage offen, ob an dieser Stelle die eidetischen Zahlen oder die mathematischen gemeint sind. Was den Sinn des Wortes ἐκμαγεῖον betrifft, haben wir übersetzt: bildsamer Stoff. Hier betont Aristoteles die aktive Einwirkung der Zweiheit. Wie es schon von Stenzel gezeigt wurde, ist diese eine Fähigkeit zu formen, durch die die Zahlen geformt werden; aristotelisch gedacht ist sie δυνάμει, nämlich die Fähigkeit, ein Bestimmtes zu werden¹.

* Ein Kapitel meiner Magisterarbeit, die im Wintersemester 1973/74 unter dem Titel «Die Ideen-Zahlen-Theorie und Zahlentheorie Platons in der Darstellung durch Aristoteles und Platons Auffassung über das Mathematische und seine Beziehung zu den Ideen, wie sie sich aus den Dialogen gewinnen läßt» bei der Philosophisch-Historischen Fakultät der Universität Heidelberg vorgelegt wurde.

1. Siehe J. Stenzel, *Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles*, Leipzig-Berlin 1924, 54-56.



An dieser Stelle ist nur von der Zweiheit die Rede, aber aus *Metaph.* M 1081 a 21-23 und 1082 a 13-15 ergibt sich wohl unzweifelhaft, daß die unbestimmte Zweiheit gemeint sei. Aristoteles bezeichnet die Zweiheit als eine φύσις, als ein Erzeugungsprinzip an, von dem gesagt wird, es sei zweimachend (δυοποιός), es verdoppele (bzw. halbiere) alles, was an es heran-gebracht werde. A.E. Taylor meint, daß Aristoteles das Eine und die unbestimmte Zweiheit mit der Zahl 1 und 2 identifiziere². Die platonische Prinzipienlehre wird von Aristoteles heftig kritisiert, aber nirgends ausführlich dargestellt. Die Zahlen gehen aus den beiden Urprinzipien hervor. Das «Eine» wirkt als Ursache der Einheit und Bestimmtheit jeder einzelnen Zahl. Die «Unbestimmte Zweiheit» wirkt dagegen als das Gross-Kleine, als Ursache der Vielheit und Verschiedenheit der Zahlen. Dieses Prinzip sei zweimachend (δυοποιός), was ebenso im Sinne der Verdoppelung wie in dem der Halbierung verstanden werden kann.

Wie sich Aristoteles diese Tätigkeit der unbestimmten Zweiheit denkt, sobald er den platonischen Standpunkt wiedergeben will, zeigt die Stelle 1082 a 13-15 bei der Bildung der Vierzahl: «die unbestimmte Zweiheit ergreift die bestimmte Zweiheit und macht zwei Zweiheiten; denn sie ist die Zweimacherin des Ergriffenen»³. Hier ist die aktive Einwirkung der unbestimmten Zweiheit noch deutlicher ausgedrückt. Alexander, der Aristoteles als Quelle für die platonische Philosophie benutzt, betont auch, daß nach Platon die ἀόριστος δυάς als diaretisches Prinzip wirke, daß aktiv durch fortgesetzte Spaltung die Zahlenreihe hervorbringe: διὸ καὶ δυοποιὸν αὐτὴν ἐκάλει⁴ δις γὰρ ἕκαστον τῶν οἷς προσάγεται ποιοῦσα διαιρεῖ πῶς αὐτό, οὐκ ἔῴσα μένειν ὃ ἦν· ἥτις διαίρεσις γένεσις ἐστὶν ἀριθμῶν (57, 3-6 Hayduck). Beide Prinzipien wirken offenbar, insofern das Eine zur Einheit, die Zweiheit zur Vielheit drängt. Was die Erzeugung der ungeraden Zahlen betrifft, so gibt Alexander die Angaben des Aristoteles (*Metaph.* 1084 a 4-7) wieder, wonach neben die diaretische Verdoppelung die Addition einer Monade treten kann (57,24-28). Die Zweiheit soll deswegen von Platon als Prinzip, wie das Eine, gesetzt worden sein, gemäß dem Bericht des Aristoteles, weil sich aus ihr natürlicherweise die Zahlen hervorbringen liessen. Sie ist das Prinzip der Vervielfältigung⁵.

2. W.D. Ross, *Aristotle's Metaphysics. A rev. Text with Introd. and Commentary*, Oxford I (1924, 1958⁴), 175.

3. Vgl. auch die Stelle 1083 b 35-36.

4. Alexander schließt sich hier dem Bericht des Aristoteles über Platon in 1082 a 15 an.

5. H. Kuhn, *Platon und die Grenze philosophischer Mitteilung* in: *Idee und Zahl. Studien zur platonischen Philosophie*, Heidelberg (Abhandl. Heidelb. Akad. Wiss.) 1968, 160.

Schwieriger wird die Erläuterung der Worte ἔξω τῶν πρώτων. Alexander kommentiert den Ausdruck «außer der ersten» folgendermassen: τὸ δὲ ἔξω τῶν πρώτων εἶπεν ἀντὶ τοῦ ἔξω τῶν περιττῶν. οὐκέτι γὰρ τοῦτον τὸν τρόπον ἢ γένεσις τῶν περιττῶν ἀριθμῶν γίνεται. . . νῦν μέντοι πρώτους λέγοι ἂν πάντας τοὺς περιττοὺς ὡς πρώτους τῶν ἀρτίων ὄντας· οὐδεὶς γὰρ αὐτῶν κατὰ τὸν προειρημένον τρόπον ὑπὸ τῆς δυνάδος γεννᾶται· μονάδος γὰρ προστιθεμένης ἐκάστῳ τῶν ἀρτίων ἀριθμῶν οἱ περισσοὶ γίνονται (57,12-13, 22-25). Die vorgebrachte Deutung Alexanders setzt die ersten Zahlen den ungeraden Zahlen gleich⁶. Gegen die Deutung Alexanders steht die Ansicht O. Beckers, K. v. Fritzs und H.-G. Gadammers, daß unter dem Ausdruck ἔξω τῶν πρώτων in *Metaph.* 987 b 34 die Sonderstellung des Einen und der Zweiheit angedeutet sein könnte. Hier interpretiert Gadamer Prinzipien und nicht ungerade Zahlen, wie Alexander damit meint⁷. Was die Erzeugung der Zahlen durch das Prinzip des Einen und der unbestimmten Zweiheit angeht, meint er, daß das Prinzip des Einen und der Zweiheit die Folge aller Zahlen zu erzeugen vermag. Die ganze Folge der Zahlen, die geraden wie auch die ungeraden, ist so darstellbar.

Was bedeutet hier «außer den ersten»? K. Gaiser meint, daß unter den «ersten Zahlen» nach der sprachlich am nächsten liegenden Erklärung die Primzahlen zu verstehen sind⁸; die Versuche, den Worten eine andere Bedeutung beizulegen, können nur als Notlösungen betrachtet werden. Aber so, sagt er weiter, ist schwerlich damit zu rechnen, daß alle ungerade Zahlen von der Erzeugung ausgeschlossen sein sollten⁹. Die ungeraden Zahlen nämlich könnten nicht aus der Zweiheit erzeugt werden, wenn nicht jedesmal eine Einheit hinzuaddiert werde.

Taylor («Mind» 36 [1927] 22-23) versteht unter τῶν πρώτων die Zahlen 1 und 2; und bei ihm werden alle Zahlen aus der Zweiheit erzeugt, obwohl Aristoteles behauptet, daß die Versuche, irgendeine Zahl außer der Zwei und

6. Speusippos schrieb ἐπεὶ γὰρ πρότερος αἰεὶ ἔστιν ὁ περιττός τοῦ ἀρτίου (fr. 4,24 Lang). Daraus schloß Alexander, daß man unter πρώτων ungerade Zahlen verstehen könne. Kurz danach benutzt Speusippos πρώτος aber auch im Sinne von Primzahl (fr. 4,26 Lang) (siehe H. Cherniss, *Aristotle's Criticism of Plato and the Academy* [1944] 183).

7. *Platons ungeschriebene Dialektik in: Idee und Zahl* 28.

8. Siehe auch Eukl. *Elem.* VII. def. 11: πρῶτος ἀριθμός ἐστιν ὁ μονάδι μόνῃ μετρούμενος.

9. *Platons ungeschriebene Lehre*, Stuttgart 1968², 117. Die gewöhnliche Bedeutung von πρῶτος in der aristotelischen als auch in der griechischen Arithmetik ist Primzahl (siehe Cherniss, *Aristotle's Criticism* 182-183 (Zit. 106).

ihren Vielfachen herzuleiten, gescheitert sind (*Metaph.* 1091 a 9-12)¹⁰. Also Taylor behauptet, Aristoteles identifiziere die Einheit und die unbestimmte Zweiheit mit der Zahl 1 und 2¹¹. H. Cherniss behauptet, Aristoteles benutze das Wort *πρῶτος* als ein Adjektiv zu der Idealzahl zur Unterscheidung von der mathematischen¹². Trendelenburg und Schwegler dachten, daß *πρώτων* Idealzahl meint, wie in *Metaph.* 1080 b 22, 1081 a 4, während C.A. Brandis unter *πρώτων* die idealen ungeraden Zahlen verstand¹³.

Der Erklärung Trendelenburgs, *πρώτων* als Idealzahlen überhaupt, hat sich Schwegler und Zeller angeschlossen. Schwegler meint, diese Erklärung habe jedenfalls die gewöhnliche und verbürgte aristotelische Terminologie für sich. Mit *πρῶτος* bezeichne Aristoteles die Idealzahl wie in 1080 b 22. Die Art, wie die Idealzahlen entstehen, ist verschieden von der Art, wie die anderen Zahlen erzeugt werden. Nur die mathematischen Zahlen werden naturgemäß (*εὐφυῶς*) aus der Zweiheit erzeugt durch einfache Wiederholung der in der Zweiheit gesetzten Einheiten: sie sind deshalb addierbar (*συμβλητοί*); die Idealzahlen dagegen werden dadurch gebildet, daß das ursprüngliche Eins mit dem Grossen und Kleinen eine Reihe qualitativ verschiedener Verbindungen eingeht: sie sind daher jede von jeder qualitativ verschieden und nicht addierbar (*ἀσύμβλητοι*)¹⁴.

Bonitz bespricht in seinem Kommentar zur *Metaphysik* des Aristoteles¹⁵ den Ausdruck *ἔξω τῶν πρώτων*. Er erwähnt die Ansicht Alexanders, daß *πρῶτοι* im mathematischen Sinne interpretiert werden¹⁶, dann die Trendelenburgsche und Schweglersche Ansicht, daß darunter die Idealzahlen zu verstehen seien und die Ansicht von Brandis, daß damit die ungeraden Idealzahlen gemeint seien. Bonitz hat mit Recht darauf hingewiesen, daß diese Auslegung von Brandis in keiner Weise aus den Worten des Aristoteles hervorgehen zu können scheint. Denn *πρῶτοι* muß entweder im mathematischen oder im Sinne von Prinzipien der Zahlen verstanden werden und es kann nicht, wie Brandis meint, zugleich beides umfassen. Trendelenburg und Zeller kann man dies nicht zuschreiben. Es kann bei Aristoteles zu den Zahlen das Adjektiv *πρῶτος* hinzugefügt werden, so daß Idealzahlen von

10. Cherniss, *Aristotle's Criticism* 183 (Zit. 106).

11. Siehe Ross, *Aristotle's Metaphysics* I, 175.

12. Cherniss, *Aristotle's Criticism* 182 (Zit. 106).

13. Ross I, 173.

14. A. Schwegler, *Die Metaphysik des Aristoteles*, Band 3 (1848) 65.

15. S. 94-95.

16. S. 57,16-17: *πρῶτοι δὲ ἀριθμοὶ λέγονται οἱ μονάδι μόνῃ μετρούμενοι ὡς ὁ τρία, ὁ πέντε, ὁ ἑπτά.*

den mathematischen unterschieden werden, wie in 1081 a 4-5. Zeller meint nicht, aus der Zweiheit würden die Idealzahlen erzeugt. Er bezeichnet die $\pi\rho\omega\tau\omicron\iota \acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\omicron\iota$ als Idealzahlen und den Ausdruck $\acute{\epsilon}\xi\omega \tau\omega\nu \pi\rho\omega\tau\omega\nu$ als wahrscheinlich eine Glosse¹⁷. Cherniss meint, Aristoteles benutze das Wort $\pi\rho\omega\tau\omicron\varsigma$ als ein Adjektiv zu der Idealzahl zur Unterscheidung von der mathematischen¹⁸.

Im Gegensatz dazu hat Bonitz die Ansicht vertreten, der Sinn des Satzes könne auf keine Weise sein, daß wir $\pi\rho\omega\tau\omicron\iota \acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\omicron\iota$ an dieser Stelle als Idealzahlen auffassen (S. 95). Die Stelle 987 b 20-22 spricht gegen die Ansicht Trendelenburgs, Schweglers und Zellers, daß die Idealzahlen nicht aus der Zweiheit erzeugt werden und daß die Art, wie die Idealzahlen entstehen, verschieden ist von der Art, wie die anderen Zahlen erzeugt werden. Diese Stelle lautet: «aus dem Grossen und Kleinen gehen, durch Teilhabe an dem Einen, die Ideen als Zahlen hervor»¹⁹, wobei Alexander auch der Meinung ist, daß unter dem Grossen und Kleinen ($\acute{\epsilon}\xi \acute{\epsilon}\kappa\epsilon\acute{\iota}\nu\omega\nu$) die unbestimmte Zweiheit zu verstehen ist²⁰. Durch den Ausdruck Alexanders $\epsilon\acute{\iota}\pi\omega\nu \delta\acute{\epsilon} \tau\acute{\alpha} \epsilon\acute{\iota}\delta\eta \pi\rho\omicron\sigma\acute{\epsilon}\theta\eta\kappa\epsilon \tau\omicron\upsilon\varsigma \acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\omicron\upsilon\varsigma$ (53, 9-10) wird meiner Überzeugung nach das Wort in Klammern ($\tau\omicron\upsilon\varsigma \acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\omicron\upsilon\varsigma$) in der Ausgabe W. Jaegers gerechtfertigt. Alexander fügt noch hinzu, die Ideen seien von den Platonikern eidetische Zahlen genannt worden²¹.

Für O. Toeplitz bereiten die Worte $\acute{\epsilon}\xi\omega \tau\omega\nu \pi\rho\omega\tau\omega\nu$ keine Schwierigkeit mehr. Man hat bisher übersetzt: «mit Ausnahme der ersten Zahlen» (ohne dem irgendeinen mathematischen Sinn beilegen zu können) oder «mit Ausnahme der Primzahlen» indem man sich erinnerte, daß $\pi\rho\omega\tau\omicron\iota \acute{\alpha}\rho\iota\theta\mu\omicron\iota$ bei Euklid die Primzahlen bedeutet. Man hat vergessen, sagt Toeplitz, daß $\pi\rho\omega\tau\omicron\varsigma$ bei Euklid noch in einem anderen Sinne auftritt: zwei Zahlen heissen «zueinander $\pi\rho\omega\tau\omicron\iota$ » wenn sie gegeneinander gekürzt sind. Toeplitz betont: *Verwendet man an unserer Stelle diese Bedeutung, so ist alles völlig klar; 2:4, 3:6, usw. erscheinen alle als Stempelabdrücke des gekürzten Paares, nach dessen Bild sie geformt sind, 1:2*²².

17. *Die Philosophie der Griechen* II, 1, 681.

18. *Aristotle's Criticism* 182, Zit. 106. Vgl. die Stellen 1080 b 21-22, 1081a 4-5.

19. Cherniss ist auch der Meinung, daß es sich an dieser Stelle um die Erzeugung der Idealzahlen handelt (S. 182, Zit. 106).

20. 53,3-4.

21. 53,9.

22. *Das Verhältnis von Mathematik und Ideenlehre bei Platon* (1929) = (*Zur Geschichte der griech. Mathematik*, Darmstadt, Wege der Forschung, Bd. 33 [1965], 64).

K. v. Fritz²³ denkt bei den Worten ἔξω τῶν πρώτων an die Prinzipien selbst, von denen in der Tat gesagt werden könnte, daß sie nicht erzeugt werden²⁴. Das ist Beckers Interpretation. Becker versteht unter dem πρώτοι das Eine und die unbestimmte Zweiheit, wobei er ἔξω τῶν πρώτων mit «über die ersten hinaus» übersetzt²⁵. Das Eine und die unbestimmte Zweiheit sind Urprinzipien, die nicht erzeugt werden, sondern im Gegenteil die übrigen eigentlichen Zahlen erzeugen. Als Urprinzipien sind sie πρώτα und für Aristoteles sind sie in gewisser Weise auch Zahlen, so daß der Ausdruck «außer den ersten» in Bezug auf sie vom aristotelischen Standpunkt aus ganz einwandfrei ist. Zugleich bemerkt K. v. Fritz, diese Interpretation habe den Vorzug, inhaltlich unzweifelhaft richtig zu sein, wie immer auch die Erzeugung der Idealzahlen aus dem ἓν und der ἀόριστος δυάς ausgesehen haben mag. Die ἀόριστος δυάς ist das unbestimmte Prinzip der Vervielfältigung. Sie bringt in gewisser Weise alle Mannigfaltigkeiten und damit auch alle Zahlen hervor. Sobald aber auf diese Weise eine bestimmte Zahl erzeugt worden ist, stellt diese eine Einheit dar, so daß wieder das Prinzip des ἓν wirksam wird.

Gadamer übernimmt die Ansicht von Becker, so daß er der Deutung Alexanders und der anderen, deren Deutungen wir vorhin entwickelt haben, widerspricht. Nach Gadamer könnte unter dem Ausdruck ἔξω τῶν πρώτων die Sonderstellung des Einen und der Zweiheit angedeutet sein. Darunter versteht Gadamer Prinzipien und nicht ungerade Zahlen, wie Alexander meinte²⁶. Was die Erzeugung der Zahlen angeht, glaubt er, daß das Prinzip des Einen und der Zweiheit die Folge aller Zahlen zu erzeugen vermag. Die ganze Folge der Zahlen, die geraden wie auch die ungeraden ist so darstellbar²⁷.

Ich kann dieser Beckerschen und Gadamerschen Deutung nicht zustimmen. Wenn aus dem Einen und der Zweiheit die Folge aller Zahlen erzeugt wird, und wenn unter ἔξω τῶν πρώτων Prinzipien zu verstehen sind, dann kommen wir zu der Frage, warum hier Aristoteles nur von der Zweiheit als erzeugendes

23. In der Rezension von O. Beckers Abhandlung *Zum Problem der platonischen Idealzahlen*, «Gnomon» 33 (1961) 11.

24. Gaiser dazu: *Doch wäre eine solche Angabe in dem aristotelischen Satz überflüssig, so daß auch diese Interpretation nicht befriedigen kann (Platons ungeschr. Lehre 365).*

25. Siehe: *Zum Problem der platonischen Idealzahlen (Eine Retraktation)* in *Zwei Untersuchungen zur Antiken Logik*, Wiesbaden (Klassisch-Philologische Studien 17) 1957, 9-10.

26. Siehe *Idee und Zahl* 28.

27. *Idee und Zahl* 28.

Prinzip spricht und nicht auch von dem Einen. In *Metaph.* 1092 a 23-24 wird ausdrücklich gefragt, in welcher Weise die Zahl aus den Prinzipien hervorgehe. Es ist nach Platon unmöglich, die Zahl auf andere Weise als aus dem Einen und der unbestimmten Zweiheit zu erzeugen (1091 a 4-5)²⁸. Warum wird an der Stelle 987 b 33 als erzeugendes Prinzip nur die Zweiheit erwähnt und nicht das Eine? Die Erzeugung der Zahl «Zwei» ist aus den Prinzipien geworden. Die unbestimmte Zweiheit durch das Eine bestimmt erzeugt die Zweiheit innerhalb der Zahlen (Alex. 55,20-56, 35)²⁹. Die Zweiheit ist die erste gerade Zahl und jede gerade Zahl enthält die Verdoppelung und die Halbierung³⁰. Eine wichtige Stelle noch in der *Metaphysik*, 1087 b 7-9, lautet, daß die Zahlen für die einen aus der ungleichen Zweiheit des Grossen und des Kleinen erzeugt werden, für den anderen aus der Menge; für beide aber aus dem Wesen des Einen³¹. Darum scheint mir weder die Becker'sche noch die Gadamer'sche Deutung in sich schlüssig zu sein.

Außerdem führt uns eine genauere Analyse der Stelle 987 b 33 ff. zu folgendem: das Wort τῶν πρώτων bezieht sich nicht auf das Wort δυνάδα, sondern auf das Wort ἀριθμούς. Ein Bezug τῶν πρώτων auf die δυνάδα ist grammatisch nur durch den Ausdruck ἔξω αὐτῆς, wie weiter im Text das Wort αὐτῆς erwähnt wird, gedacht. Aristoteles müßte hier sagen ἔξω αὐτῆς, wenn er damit die Prinzipien meinte. Wenn wir die Beckersche und Gadamersche Deutung verteidigen wollen, dann müßten wir den Ausdruck ἔξω τῶν πρώτων nicht nach platonischer, sondern nach aristotelischer Auffassung interpretieren. Vom aristotelischen Standpunkt aus sind die zwei platonischen Urprinzipien auch Zahlen. Aber dann hätten wir mit dem Problem zu tun, was platonisch und was aristotelisch an der Stelle ist.

An der wichtigen Stelle 1091 a 23-24 wird gesagt: «Von der ungeraden Zahl sagen (die Platoniker), gibt es keine Erzeugung», woraus klar folgt, daß es von der geraden Zahl eine Erzeugung gibt³². Vielleicht könnte diese Stelle durch 1084 a 36 (διὸ τὸ ἐν τὸ περισσὸν) erklärt werden.

Ich würde vielmehr auf Grund dessen, was ich oben entwickelt habe, der Deutung Alexanders zustimmen. Unter ἔξω τῶν πρώτων sind hier die ungeraden Zahlen gemeint. Ich glaube nicht, daß die ungeraden Zahlen in dieser

28. Siehe auch Alexander 817,35-38.

29. Siehe K. Gaiser, *Testimonia Platonica*, 22 B, S. 479, Nr. 60, S. 541 und *Metaph.* 1081 a 21-22.

30. Gaiser, *Test. Plat.* 23 B, S. 483.

31. Dazu noch *Metaph.* 1081 a 14: ὁ γὰρ ἀριθμὸς ἐστὶν ἐκ τοῦ ἐνὸς καὶ τῆς δυνάδου τῆς ἀορίστου.

32. Vgl. Ross II, 484.

Weise, wie die Stelle 987 b 33-988 a 1 betont, erzeugt werden. Die ungeraden Zahlen werden durch die Addition einer Monade zu den geraden Zahlen erzeugt (Alex. 57,22-25). Die Deutung Alexanders setzt die ersten Zahlen den ungeraden Zahlen gleich. Die Ableitung der ungeraden Zahlen geschieht aus der Einheit und Zweiheit. Die ἀόριστος δυάς wirkt als diairetisches Prinzip, das aktiv durch fortgesetzte Spaltung die Zahlenreihe der geraden Zahlen hervorbringt. Deshalb wird sie zweimachend (δυοποιός) genannt. Alexander bezeichnet diese Wirkung der Erzeugung der Zahlen als διαίρεσις (57,3-6). Eine genau ähnliche Erzeugung beschreiben die Stellen 1081 b 21-22 und 1082 a 13-15.

Gegen die Ansicht, daß unter ἔξω τῶν πρώτων die Primzahlen zu verstehen seien, könnte eingewandt werden, daß z.B. die Zahl 15 keine Primzahl ist und sich trotzdem nicht nur durch die Zweiheit erklären läßt. Die Primzahl läßt sich mit Hilfe der Einheit erklären, genau wie die ungerade Zahl. Die Primzahl ist durch Eins und sich selbst teilbar. Außerdem könnten wir sagen, daß alle Primzahlen das Charakteristikum der ungeraden Zahl in sich haben, daß sie eine Teilklasse der ungeraden Zahlen bilden, alle Primzahlen sind also ohnehin ungerade. So kommen wir zu der Deutung Alexanders, daß unter τῶν πρώτων ungerade Zahlen zu verstehen sind. Sie lassen sich mit Hilfe der Einheit erklären. Außerdem—und das ist bemerkenswert—könnte niemand ein Erzeugungsschema aus der Einheit und der Zweiheit rekonstruieren, bei dem gerade die Primzahlen allein von der Erzeugung ausgeschlossen werden.

Die hier vertretene Lösung des Problems, die die «protoi»-Zahlen den ungeraden Zahlen gleichsetzt, ist in der altgriechischen Mathematik nicht belegt. Man liest im 7. Buch der *Elemente* Euklids³³ Definition 11: «Primzahl ist eine Zahl, die sich nur durch die Einheit messen läßt» und Def. 13: «Zusammengesetzt ist eine Zahl, die sich durch irgend eine andere Zahl messen läßt». Auf Grund dessen, was wir oben entwickelt haben, müßte man bei der aristotelischen Stelle *Metaph.* 987 b 33-988 a 1 an singulären Sprachgebrauch des Terminus «protoi» denken. «Protoi» wird hier für «ungerade Zahlen» gebraucht.

33. Der Inhalt dieses Werkes verteilt sich auf 13 Bücher. Die Bücher 1 bis 6 und 10 bis 13 machen mit den Grundlagen der Geometrie vertraut, während die Bücher 7 bis 9 die Zahlentheorie behandeln. Man findet also in den *Elementen* Euklids alles, was für den Aufbau der mathematischen Wissenschaft unentbehrlich ist. In den 13 Büchern der *Elemente* gibt es absolut keine Zahlenrechnung. Die Zahlenrechnung hat im Unterschied zur Zahlentheorie mit der Wissenschaft und der Erziehung des Menschen nichts zu tun. Sie ist eine Sache des täglichen Bedürfnisses und blieb im Altertum den Sklaven und den Schulmeistern der Anfänger überlassen.

An der Stelle 1084 a 3-7 wird ausdrücklich von Aristoteles gesagt, daß die Erzeugung der Zahlen immer Erzeugung einer ungeraden oder geraden Zahl ist. Wenn das Eine auf die gerade Zahl fällt, entsteht die ungerade, wenn die Zwei in sie einfällt, entsteht eine Zahl, die vom Einen aus verdoppelt ist; treffen wiederum ungerade Zahlen dazu, so entsteht eine andere Art von gerader Zahl.

Zunächst ist klar, daß in der zweiten und in der dritten Erzeugungsregel im griechischen Text «auf die gerade Zahl» zu ergänzen ist, in der dritten außerdem «treffen zu = ἐμπίπτόντων». W. Bröckers Meinung nach muß πίπτειν die Addition, ἐμπίπτειν die Multiplikation meinen. Wir haben dann 1. die Addition der 1 zu geraden Zahlen, 2. die Multiplikation der 2 mit geraden Zahlen, 3. die Multiplikation ungerader Zahlen mit geraden. Im ersten Fall entstehen ungerade, in den beiden anderen Fällen gerade Zahlen. Aristoteles will hier beweisen, daß bei jeder Erzeugung von Zahlen notwendigerweise entweder eine gerade oder eine ungerade Zahl entsteht. Um das zu zeigen, müßte er alle Erzeugungsarten aufzählen³⁴. Alexander bestätigt die Angaben des Aristoteles, wonach neben die diairetische Verdoppelung die Addition einer Monade treten kann (57,24-28).

Stenzel hatte in seinem Buch *Zahl und Gestalt bei Platon und Aristoteles*, S. 31 den Versuch gemacht, zu zeigen, in welcher Weise Platon die Zahlen aus der Einheit und der Zweiheit hervorgehen ließ. Indem Stenzel die aristotelische Stelle 987 b 33-988 a 1 mit der Methode der Diairesis in Platons *Sophistes* und *Politikos* in Verbindung bringt, kommt er zu folgendem Ergebnis: Die Erzeugung beruht auf einer fortgesetzten Verdoppelung der Zahl, jeweils gefolgt von der Hinzufügung der Einheit, worauf die so entstandene Zahl wieder verdoppelt und dann durch die Hinzufügung einer Einheit vergrößert wird. Ich glaube, daß dieses Stenzel'sche Schema der Erzeugung der Zahlen keine Erklärung gibt, was unter ἐξω τῶν πρώτων an unserer entscheidenden Stelle zu verstehen ist. Wenn damit die zwei Urprinzipien gemeint sind, dann ist gemäß dem Schema von Stenzel unerklärlich, warum das Eine an der Stelle 987 b 33 ff. nicht als erzeugendes Prinzip erwähnt wird. Die Erzeugung der 3 durch diese Stelle ist unerklärlich, weil sie sich nicht nur durch die Zweiheit erklären läßt. Auf der anderen Seite interpretiert das Stenzel'sche Schema der Erzeugung der Zahlen und stellt genau den Sinn der Stelle 1081 a 14 dar: «Die Zahl wird aus dem Einen und der unbestimmten Zweiheit erzeugt».

34. Bröcker bearbeitet ausführlich die Stelle; siehe *Plato über das Gute* (1949) in: *Das Problem der ungeschriebenen Lehre Platons*, Darmstadt (Wege der Forschung Bd. 186) 1972, 230-32.

Was den Rekonstruktionsversuch der Erzeugung der Zahlen durch die diairetische Methode anbetrifft, die das Grundprinzip Stenzels ist, scheint mir, daß dieser Versuch Stenzels nicht ganz das Richtige trifft, weil dort die geraden Zahlen nicht eigentlich durch Diairesis, sondern durch Verdoppelung, die ungeraden Zahlen außer der Eins aber gar durch Hinzufügung der Einheit zu den geraden Zahlen erzeugt werden.

Auf Grund der Stellen 1081 a 21-22, 1081 b 21-22, in denen davon die Rede ist, daß die erste Zweiheit aus dem Einen und der unbestimmten Zweiheit, die Vierheit aus der ersten Zweiheit und der unbestimmten Zweiheit entstehe, kommt O. Becker³⁵ zu einem neuen Versuch über die Interpretation der Erzeugung der Zahlen. Vor allem sollten wir feststellen: An der ersten der beiden zitierten Stellen, 1081 a 21-22, ergibt sich mit Sicherheit aus der Stelle 1082 a 13-15, daß die Negation οὐ aristotelisch ist, d.h. die Unmöglichkeit zum Ausdruck bringt, die zitierte platonische Lehre unter den von Aristoteles angenommenen Voraussetzungen aufrecht zu erhalten. Nach Beckers Auffassung ist die ursprüngliche Zahl durch ihre Spaltung aufgehoben worden, d.h. wenn z.B., wie es an der Stelle 1081 b 21-22 heißt, die unbestimmte Zweiheit und die erste eine Vierheit machen, dann ist die erste Zweiheit zugleich als solche aufgehoben, insofern sie in der erzeugten Vierheit steckt. Aber so werden in dieser Auffassung nur die Potenzen von Zwei erzeugt. Wir haben keine Erklärung für die Erzeugung der ungeraden und der Primzahlen. Die Verbindung zwischen der platonischen Diairesis und der Erzeugung der Zahlen aus dem Einen und der unbestimmten Zweiheit (1081 a 14) ist also doch nicht eng³⁶.

Gegen die Erklärung K. Gaisers für die Stelle 987 b 33-988 a 1, daß hier die Zahlen (der Dekas) außer den Primzahlen 5 und 7 gemeint sind, könnte eingewandt werden, daß auch 3 und sogar 2 als erste Zahlen gelten. Gaiser erwähnt eine andere Erklärungsmöglichkeit: Die Zahlen über die ersten vier Zahlen hinaus. Er versteht unter den ersten vier Zahlen der Tetraktys den Ausdruck ἔξω τῶν πρώτων³⁷. Die Dekas konnte deshalb als vollkommene Zahl verstanden werden, weil sie als Summe der ersten vier Zahlen ($1 + 2 + 3 + 4 = 10$) die ganze Tetraktys zusammenfaßt und so besonders auch nach Gaiser den Dimensionszusammenhang (Einheit - Länge

35. Zum Problem der platonischen Idealzahlen 7, wo gesagt wird: *alle Zahlen entstehen durch die unbegrenzte Anwendung der beiden dyadischen Operationen Verdoppelung und Halbierung.*

36. Siehe Besprechung des Beckerschen Buches *Zwei Untersuchungen zur antiken Logik* von K. v. Fritz in «Gnomon» 33 (1961) 8-13.

37. *Platons ungeschr. Lehre* 365.

- Breite - Tiefe) in ursprünglicher Form enthält³⁸. Daher können diese Zahlen grundsätzlich als Ideen verstanden werden. Hier kann eingewandt werden, daß diese ersten vier Zahlen zu Zehn zusammenzuzählen in Widerspruch mit der Natur der «asymbletoi» - Zahlen, die unvereinbar sind, stehen würde. Aber die Angaben bei Aristoteles lassen darauf schließen, daß Platon darüber keine in allen Einzelheiten fertige Lehre vertreten hat. Was bei Aristoteles ausdrücklich steht, ist nur, daß sich alle Zahlen ἔξω τῶν πρώτων aus dem ἓν und der ἀόριστος δυάς bequem erzeugen lassen, daß die erste Zweiheit aus dem ἓν und der ἀόριστος δυάς und die erste Vierheit aus der bestimmten Zweiheit und der ἀόριστος δυάς entsteht, und daß dieser letztere Vorgang so vor sich geht, daß die ἀόριστος δυάς die bestimmte Zweiheit ergreift und zwei Zweiheiten daraus macht. Es ist durchaus zweifelhaft, ob Aristoteles wesentlich mehr über den Vorgang der Erzeugung der Zahlen gewußt hat als die drei oder vier Stellen, die wir erwähnt haben, und ob die Theorie wesentlich weiter ausgeführt war. Außerdem darf als sicher gelten, daß bei den Pythagoreern die Tetraktys der ersten Zahlen, die Dimensionenfolge und die harmonischen Verhältnisse eine besondere Rolle spielten und zueinander in Beziehung gesetzt wurden. Gaiser schließt daraus, daß Platon selbst in der pythagoreischen Mathematisierung der Realität eine besonders wichtige Voraussetzung seiner eigenen Philosophie sieht³⁹.

Die Erzeugung der Zahlen aus der Zweiheit des Ungleichen durch das Wesen des Einen (*Metaph.* 1087 b 7-9).

Platon identifizierte nach den Berichten des Aristoteles das Ungleiche und die Zweiheit des Großen und Kleinen (1087 b 10-11). An der Stelle 1087 b 4-12 werden die Begriffe ἄνισον und πλῆθος eingeführt. Aristoteles spricht hier von dem Gegensatz des ἓν und des ἄνισον. Das ἄνισον ist nach Platon das Wesen des πλῆθος (b 5-6). Die Erzeugung der Zahlen kommt zustande aus der Zweiheit des Ungleichen, des Großen und Kleinen, nach der einen Ansicht (ἐκ τῆς τοῦ ἀνίσου δυάδος τοῦ μεγάλου καὶ μικροῦ), aus der Menge nach der anderen⁴⁰, nach beiden aber durch das Wesen des Einen erzeugt (καὶ ἐκ τοῦ πλῆθους, ὑπὸ τῆς τοῦ ἑνὸς δὲ οὐσίας ἀμφοῖν [b 7 - 9]). Ich verstehe hier unter ἄνισον das qualitative Charakteristikum der unbestimmten Zweiheit und unter πλῆθος die quantitative Bestimmungslosigkeit,

38. *Platons ungeschr. Lehre* 122.

39. *Platons ungeschr. Lehre* 296.

40. Nach Alexander ist die erste Ansicht von Platon und die zweite von Pythagoras vertreten (797,7-12).

aus welcher auch durch das Eine die Zahlen erzeugt werden. Es ist diese Erklärung zu machen, daß sich hinter dem ἄνισον das πλῆθος verberge. Alexander meint in diesem Zusammenhang mit Recht, daß unter ἄνισον Hyle zu verstehen sei (796, 15), und dies die Meinung Platons sei (23-24). Die Pythagoreer auf der anderen Seite haben nach Alexander das πλῆθος als Gegenteil zum Einen gesetzt (32-33).

Für die Ungleichheit gibt es eine wichtige Stelle in der *Metaphysik* 1091 a 24-27. «Einige (nämlich Pythagoreer oder Xenokrates (Alexander 819, 28 und 820, 3) lassen die erste gerade Zahl aus dem Ungleichen hervorgehen, indem das Große und das Kleine gleichgemacht werden. Diese Dinge also mußten, bevor sie gleichgemacht werden, die Ungleichheit in sich haben. Wenn sie aber immer gleichgemacht wären, so wären sie vorher nicht ungleich gewesen».

An der Stelle 1083 b 23 ff. fragt Aristoteles, ob jede Einheit aus dem Groß- und - Kleinen durch Gleichwerden hervorgehen soll, oder die eine aus dem Kleinen, die andere aus dem Großen. Aristoteles spricht auch vom Ausgleich des Groß- Kleinen in 1081 a 25 zur ersten geraden Zahl, womit wohl die Begrenzung der unbegrenzten Zweiheit durch das ἓν zur Zahl Zwei gemeint ist.

ANHANG I

SPUREN EINER THEORIE DER ΑΟΡΙΣΤΟΣ ΔΥΑΣ IN DEN PLATONISCHEN DIALOGEN

Die unbestimmte Zweiheit tritt in Form von Gegensatzpaaren des «mehr-weniger» (μᾶλλον - ἥττον) auf⁴¹. Dieses Gegensatzpaar unterliegt in seinem Wirkungsbereich Schwankungen ohne Grenze und ohne Ende und gehört so zu der Gattung des Unbegrenzten, da seine Bestandteile, weil «unvollendet» (ἄτελῃ), «ganz und gar unbegrenzt» bleiben (*Philebos* 24 b).

Im *Philebos* 24 a-b wird gesagt: «Zuerst an dem Wärmeren und Kälteren siehe doch, ob du eine Grenze bemerken könntest, oder ob nicht das Mehr und Weniger, welches diesen Gattungen einwohnt, so lange es ihnen einwohnt, gar kein Ende entstehen läßt; denn sobald ein Ende entstände, wäre es selbst auch zu Ende». Das Ergebnis dieser Untersuchung führt dazu, daß das Mehr und Weniger sowohl in dem Wärmeren als auch in dem Kälteren drin ist. Außerdem haben diese Beiden (τὸ μᾶλλον καὶ ἥττον) kein

41. Vgl. *Phaid.* 93 d.

Ende, und da sie also ohne Ende seien, sind sie doch auf alle Weise unbegrenzt (24 b)⁴². Die beiden Glieder des Paares, das Mehr und Weniger, die unter den verschiedensten Erscheinungsformen auftreten können, entstammen selbst der Welt des Unbegrenzten. Das Wärmere und Kältere ist das Beispiel, in diesen beiden wohnt das Mehr und Weniger; sie haben in sich kein Ziel und Ende, griechisch in dem einen Wort τέλος (24 b) gegeben.

Das zweite Beispiel ist das «Gar sehr» (σφόδρα) und das Gegenteil, das ἡρέμα⁴³. Sie haben das Mehr und Weniger ebenfalls in sich; sie haben kein «Wieviel», sondern sie bringen in alles das Mehr und Weniger, im zählenden Sinne diesmal gefaßt als πλέον καὶ τὸ ἔλαττον. Indem diese beiden (das Große und Kleine) im Anspannen und Nachlassen vorschreiten, bleiben sie nicht stehen, sondern schreiten fort zum Unbegrenzten der Unendlichkeit. Deshalb wurde diese Zweiheit von Aristoteles und der Überlieferung «unbestimmte» genannt, weil keins von beiden, weder das Mehr noch das Weniger, soweit es nur dies ist, begrenzt ist, sondern unbegrenzt und unendlich. Das Große und Kleine gehört in der Tat nach Platon zu Klasse des Apeiron, das als «all das, was ein Mehr und Weniger in sich enthält» definiert wird (24 e-25 a). So alle Gegensätze überhaupt (kalt-warm, trocken - feucht usw.) werden unter diesem platonischen Oberbegriff «Mehr - Weniger» zusammengefaßt und dann dem Prinzip des «Unbegrenzten» gleichgesetzt.

Die Theorie der unbestimmten Zweiheit, nämlich das Zuviel und das Zuwenig, kommt auch im *Politikos* 283 c-e vor. Zuerst wird darauf aufmerksam gemacht, was Übermaß und Mangel ist; und die Rede geht auf solche Dinge, wie Länge und Kürze, jedes Hervorragen oder Zurückbleiben. Auf alles dies geht aber doch gemäß der obigen Stelle die Meßkunst. Das Größere werde dadurch erklärt, daß man sagen müsse, das Größere sei als nichts anderes größer denn nur als das Kleinere; und das Kleinere wiederum kleiner als das Größere und als nichts anderes (283 d). Hier wird die unbestimmte Zweiheit diskutiert in Beziehung auf das Problem des rechten Maßes. Diese Zweiheit vertritt das Grenzenlose, das Ungeordnete, und sozusagen alles, was an sich keine Gestalt hat. Sie schließt das Große und Kleine in sich ein. Das Zweifache der ἀόριστος δύαξ wird also hier in der relativen Größe oder Kleinheit gegenüber dem Maß gesehen, wohl aber in der doppelten Möglichkeit der Variation, der Zu- und Abnahme. Diese Grundbegriffe Platons sind mit Recht in der modernen Plato-Forschung, die von seiner Lehrtätigkeit in der Akademie ausgeht, besonders eingehend erörtert worden

42. Vgl. auch *Phileb.* 25 c-d.

43. *Phileb.* 24 b-c.

und stehen mit der Ausprägung des sogenannten zweiten platonischen Prinzips, nämlich der ἀόριστος δυάς, wie es von Aristoteles genannt wurde, in engster Verbindung⁴⁴. Die aristotelischen und die doxographischen Berichte über die unbestimmte Zweiheit sollten auf diese *Politikos*-Stelle hin, wie auch diese von ihr aus eigens interpretiert werden. Daß aber die unbestimmte Zweiheit des Groß - und - Kleinen als Prinzip in den Dialogen Platons dargestellt wird, dies läßt sich nicht nachweisen.

ANHANG II

DIE ERZEUGUNG DER ZAHLEN KATA ΠΡΟΣΘΕΣΙΝ UND NICHT AUS DEM EINEN UND DER UNBESTIMMTEN ZWEIHEIT. DIE EINWÄNDE DES ARISTOTELES GEGEN DIE ANNAHME EINER «ZWEIHEIT AN SICH»

Gemäß der Stelle 1081 b 14 ff. kommt die Erzeugung der Zahlen nach Aristoteles durch Addition zustande. Die Dreiheit werde durch Addition aus der Zweiheit erzeugt, und so sei die Zweiheit ein Teil der Dreiheit und die Dreiheit ein Teil der Vierheit usw. (18-20). Nach Platon sei eine andere Weise der Erzeugung der Zahlen als aus dem Einen und der unbestimmten Zweiheit unmöglich (1091 a 4-5)⁴⁵.

Die Hauptabsicht der Untersuchungen Platons nach dem Bericht des Aristoteles solle darin bestehen, den Sinn der Unbestimmtheit, der in der «unbestimmten Zweiheit» gemeint sei, so klar wie möglich abzugrenzen und ihn dem Sinn der Bestimmtheit, die in dem anderen Grundprinzip, dem «Einen» gemeint sei, gegenüberzustellen. Es ist klar, daß diese zwei Prinzipien in ihrem Bedeutungsgehalt in strenger gegenseitiger Wechselbeziehung stehen müssen.

Die Platoniker erzeugen nach Aristoteles die Zahlen aus diesen zwei Prinzipien, dem Einen und der unbestimmten Zweiheit. Woher stammen nun, fragt Aristoteles, die zwei Einheiten, die in der Zweiheit an sich enthalten sind? (31 - 992 a 1). Jede derselben müßte ja konsequenterweise aus einer früheren Zweiheit abgeleitet werden, was nach Aristoteles unmöglich ist.

Die aristotelische These gegen Platon über die Erzeugung der Zahlen wird in 1081 b 12-31 ausgeführt. Eine Zahl werde aus den Einheiten nur durch Addition, z.B. 2 aus $1 + 1$, 3 durch Zusatz einer weiteren Einheit, und so fort gebildet. Zwei und drei macht fünf. Das bedeutet, daß zwei beliebige Einheiten plus drei der beliebigen Einheiten fünf Einheiten sind,

44. Vgl. auch E. Wyller, *Der späte Platon* (Tübinger Vorlesungen 1965), Hamburg 1970, 86f.

45. Siehe auch Alexander, 817,35-38.

während nach den Platonikern die ideale Zweiheit nicht zwei Einheiten, sondern nur eine ist, die ideale Dreiheit nicht drei Einheiten, sondern nur eine andere darstellt und diese Einheiten zugleich voneinander und von dem idealen Einen gänzlich verschieden sind. Die $\delta\upsilon\acute{\alpha}\varsigma$ ist nach Aristoteles aus der Eins und noch einer Eins erzeugt. Gibt man dies zu, so sei die unbestimmte Zweiheit beseitigt, und man stehe ganz auf dem Boden der mathematischen Betrachtungsweise, wonach die Zahlen $\kappa\alpha\tau\grave{\alpha}$ $\pi\rho\acute{o}\sigma\theta\epsilon\sigma\iota\nu$ entstehen, und alle Einheiten *symbletoi* sind. Also sei es nicht möglich, daß das eine Element für die Erzeugung der Zahlen die unbestimmte Zweiheit sei (1081 b 24-26).

Das Ergebnis dieser Ausführungen ist, daß es keine Zweiheit an sich und keine Dreiheit an sich gibt. Diese Ansichten der Platoniker über Zahlen-Ideen sind laut Aristoteles unmöglich und folglich willkürliche Erdichtung, da frei erfunden (1081 b 27-31). Die aristotelische Kritik wird nun in Zeile 32-33 zusammengefaßt und epigrammatisch ausgedrückt: «Wenn aber die sich daraus ergebenden Folgen unmöglich sind, dann ist es auch unmöglich, daß diese Prinzipien existieren». Unter Prinzipien sind an dieser Stelle das Eine, die unbestimmte Zweiheit und die Zahlen - Ideen zu verstehen.

An der Stelle 1082 a 15-26 greift Aristoteles wieder die Annahme einer Zweiheit oder einer Dreiheit an sich auf. Es sei nicht möglich, daß neben den zwei Einheiten die Zweiheit eine selbständige Wesenheit sei, und so die Dreiheit außer den drei Einheiten. Das Argument, das er hier bringt, lautet, daß, wie die zwei Menschen nicht eine Eins außer beiden einzelnen sein können, daß diese Zweiheit als solche eine von ihnen gesonderte Existenz hat, dies so notwendig auch bei den Einheiten der Fall sein müsse (22-24). Also die Zweiheit sei nicht etwas anderes außer den beiden Einheiten selbst (25-26). Sie existiere nicht außer ihnen, sondern sie habe ihr Sein eben im Sein der zwei Einheiten. Sei die erste Zweiheit eine Idee, so würden auch die anderen Zweiheiten bei den übrigen Zahlen (Vierzahl, Achtzahl usw.) Ideen sein (28-32), was nach Aristoteles unmöglich ist. Dieser Gedanke ist insofern merkwürdig, als er auf die Bedeutung von $\pi\rho\acute{o}\tau\epsilon\rho\nu$ und $\upsilon\sigma\tau\epsilon\rho\nu$ bei Platon hinweist. *Proteron* sei das Produzierende, *hysteron* das Produzierte. Die Zweiheit an sich z.B. sei früher als die zwei Zweiheiten der Vierheit. Die zwei Zweiheiten der Vierzahl seien früher als die Zweiheiten der Achtzahl (28-30). *Proteron* und *hysteron* bezeichnen somit das Verhältnis von Faktor und Produkt. Dieses Verhältnis ist entscheidend für die Charakterisierung der Zahlen - Ideen im Gegensatz zu den mathematischen Zahlen, die durch Addition gewonnen werden. Die Zahlen - Ideen werden bezeichnet als Zahlen, bei denen es ein «Vor» und «Nach» gibt.

Der Einwand des Aristoteles gegen die unbestimmte Zweiheit als Prinzip lautet, daß das Große und Kleine vielmehr Affektionen und Akzidenzen



als Substrate für Zahlen und Größen sind. Die Antwort auf die Frage nach der unbestimmten Zweiheit läßt sich von Aristoteles so formulieren: «Nichts ist groß und klein, viel oder wenig, überhaupt hat Nichts eine Relationsbestimmung an sich, ohne daß es etwas anderes wäre» (1088 a 27-29). Das Viel oder Wenig bezieht sich, wie Alexander mit Recht betont, auf das Quantum (802,5-6); und an der Stelle 1089 b 34 sagt Aristoteles, daß die Zahl ein Quantum bezeichnet. Das Mehr und Weniger ist also das Mehr und Weniger der Zahl; dies besagt ausdrücklich die Stelle 1088 a 15-19.

Aristoteles greift besonders die Annahme der unbestimmten Zweiheit des Großen und Kleinen als der Materie der Zahlen im ersten Kapitel des Buches N der *Metaphysik* (1088 a 15 ff.). Nach Platon ist eine andere Weise der Erzeugung der Zahlen als aus dem Einen und der unbestimmten Zweiheit unmöglich (1091 a 4-5). Aristoteles reagiert hierauf an der Stelle 1091 a 8-12 mit Spott: «Wie die Sklaven, wenn sie nichts Vernünftiges mehr zu sagen wissen, macht man ein langes Gerede darum, wobei doch nichts herauskommt. Auch die Elemente selbst, das Große und das Kleine, scheinen zu schreien, wie sie hin und her gezogen werden. Denn sie sind keinesfalls imstande, die Zahl zu erzeugen». Aristoteles sieht im Wesen der Eins das Prinzip der Zahl. Gemäß der Stelle 1016 b 17-21 ist das erste Maß das Prinzip. Die Eins sei immer das Prinzip der Zahlen und das Maß, durch welches die Quantität als Gezählte erkannt wird (Vgl. *Metaph.* 1021 a 12-13: τὸ δ' ἐν τοῦ ἀριθμοῦ ἀρχὴ καὶ μέτρον. Vgl. auch 1052 b 18-24: μέτρον γάρ ἐστιν (τὸ ἐν) ὃ τὸ ποσὸν γινώσκεται...). Über den Maß-Charakter der Eins vgl. auch 1053 b 4-5, 1072 a 33, 1087 b 33-34.

ΤΟ ΠΡΟΒΛΗΜΑ ΤΗΣ ΑΡΙΣΤΟΤΕΛΙΚΗΣ ΜΑΡΤΥΡΙΑΣ ΠΕΡΙ ΤΗΣ ΠΑΡΑΓΩΓΗΣ ΤΩΝ ΑΡΙΘΜΩΝ ΚΑΤΑ ΠΛΑΤΩΝΑ

Π ε ρ ί λ η ψ η.

Ἡ ἀνωτέρω μελέτη ἀποτελεῖ ἓνα κεφάλαιο ἀπὸ τὴν Magisterarbeit, τὴν ὁποίαν ὑπέβαλα στὸ τέλος τοῦ χειμερινοῦ ἑξαμήνου 1973/74 στὴν Φιλοσοφικὴ Σχολὴ τοῦ Πανεπιστημίου τῆς Χαϊδελβέργης καὶ ἡ ὁποία εἶχε ὡς θέμα τὴν πλατωνικὴ θεωρία τῶν εἰδητικῶν ἀριθμῶν. Τὸ θέμα τοῦ κεφαλαίου αὐτοῦ εἶναι πολὺ συγκεκριμένο, ἀναφέρεται στὸ χωρίο 987 b 33-988 a 1 τῶν *Μετὰ τὰ Φυσικὰ* τοῦ Ἀριστοτέλους, καὶ κυρίως σὲ ὠρισμένες λέξεις αὐτοῦ τοῦ χωρίου, οἱ ὁποῖες ἀπετέλεσαν ἓνα δύσκολο πρόβλημα γιὰ ὅσους μέχρι τώρα προσεπάθησαν νὰ τὶς ἐρμηνεύσουν. Ἡ προσπάθειά μου

εἶναι νὰ παρουσιάσω καὶ νὰ λάβω κριτικὴ στάση ἀπέναντι σὲ ὅλες αὐτὲς τὶς ἐρμηνεῖες. Τὸ χωρίο λέγει: *Τὸ δὲ δυνάδα ποιῆσαι τὴν ἑτέραν φύσιν διὰ τὸ τοὺς ἀριθμοὺς ἔξω τῶν πρώτων εὐφυῶς ἐξ αὐτῆς γεννᾶσθαι ὥσπερ ἔκ τινος ἐκμαγείου*. Οἱ λέξεις - πρόβλημα εἶναι: *ἔξω τῶν πρώτων*. Ὁ Ἀριστοτέλης παρουσιάζει ἐδῶ μία θεωρία τοῦ Πλάτωνος, τὴν ὁποία δὲν γνωρίζομε ἀπὸ τοὺς διαλόγους. Λέγει, ὅτι ὁ Πλάτων ἐξέλαβε τὴν «δυνάδα» ὡς «φύσιν», ὅπως καὶ τὸ «ἓν», διότι τὴν ἐθεώρησε ὡς ἀρχὴν τῆς παραγωγῆς τῶν ἀριθμῶν. Ἦδη ἐμφανίζεται ἐδῶ μία θεωρία ἀρχῶν εἰς τὸ πρόβλημα τῆς γενέσεως τῶν ἀριθμῶν, τὴν ὁποία δὲν συναντοῦμε εἰς τοὺς διαλόγους. Ποῖοι εἶναι ὅμως οἱ «πρῶτοι ἀριθμοί», οἱ ὅποιοι δὲν παράγονται ἀπὸ τὴν «δυνάδα»;

Ὁ H.- G. Gadamer καὶ ὁ K. v. Fritz δέχονται τὴν γνώμην τοῦ O. Becker, ὅτι πρῶτοι ἀριθμοὶ εἰς τὸ χωρίο αὐτὸ εἶναι τὸ «ἓν» καὶ ἡ «δυνάς» ὡς ἀρχαὶ τῶν ἀριθμῶν. Ἡ ἐρμηνεία ὅμως αὐτὴ δὲν ἐξηγεῖ, διατὶ ἐδῶ ὡς ἀρχὴ τῆς γενέσεως τῶν ἀριθμῶν τονίζεται μόνον ἡ «δυνάς» καὶ ὄχι τὸ «ἓν». Ἄρα πρόκειται ἐδῶ μόνον περὶ τῆς παραγωγῆς ἐκείνων τῶν ἀριθμῶν, οἱ ὅποιοι παράγονται ἀπὸ τὴν «δυνάδα». Ὅπωςδήποτε ἄλλοι ἀριθμοὶ παράγονται ἀπὸ τὴν «δυνάδα» καὶ ἀπὸ τὸ «ἓν». Ἐκτὸς αὐτοῦ, ἂν προσέξωμε περισσότερον τὸ χωρίο, θὰ ἔπρεπε, γιὰ νὰ δικαιωθῇ ἡ ἐρμηνεία αὐτή, τὸ κείμενό μας νὰ λέγῃ *ἔξω αὐτῆς* δηλαδὴ τῆς δυνάδος (ὅπως παρακάτω βλέπομε νὰ ὑπάρχῃ ἡ ἑκφραση αὐτὴ στὸ ἴδιο κείμενο), ἐνῶ ἀκριβῶς ἡ λέξη *τῶν πρώτων* σχετίζεται μὲ τὴν λέξη *ἀριθμῶν*.

Ἡ ἄποψη τοῦ K. Gaiser, ὅτι πρόκειται ἐδῶ περὶ τῶν πρώτων ἀριθμῶν τῆς ἀριθμητικῆς, δὲν ἐξηγεῖ, πῶς μόνον ἐκ τῆς δυνάδος κατὰ τὸ χωρίο παράγονται οἱ περιττοὶ ἀριθμοί, π.χ. ὁ 15, ὁ ὅποιος δὲν εἶναι πρῶτος ἀριθμός. Ὁ H. Cherniss δέχεται παλαιότερες ἐρμηνεῖες τῶν Trendelenburg καὶ Schwegler, κατὰ τὶς ὁποῖες «πρῶτοι» εἶναι εἰς τὸ χωρίο αὐτὸ οἱ εἰδητικοὶ ἀριθμοί. Ἡ ἄποψη αὐτὴ ὅμως δὲν ἔμπορεῖ νὰ ἀποδειχθῇ ἀπὸ τὸ χωρίο 987 b 20-22 τῶν *Μετὰ τὰ Φυσικά*, τὸ ὅποιον τονίζει ἀκριβῶς τὸ ἀντίθετον, ὅτι δηλαδὴ ἀπὸ τὴν «δυνάδα» (*μέγα - μικρόν*) καὶ τὸ «ἓν» παράγονται οἱ εἰδητικοὶ ἀριθμοί.

Ὁ Ἀλέξανδρος Ἀφροδισιεὺς δέχεται, ὅτι πρῶτοι ἀριθμοὶ ἐδῶ εἶναι οἱ περιττοὶ ἀριθμοί, καὶ τὸ ἐπιχείρημά του εἶναι, ὅτι οἱ περιττοὶ εἶναι οἱ *πρῶτοι τῶν ἀρτίων*. Οὐδεὶς ἀπὸ τοὺς περιττοὺς ἀριθμοὺς παράγεται ἀπὸ τὴν «δυνάδα», διότι ἀκριβῶς προστίθεται πάντοτε μία μονάς (*Εἰς τὰ Μετὰ τὰ Φυσικά* 57,12-13, 22-25). Ἡ ἐρμηνεία αὐτὴ τοῦ Ἀλεξάνδρου φαίνεται νὰ εἶναι ἡ καλυτέρα δυνατὴ. Ἐκτὸς τούτου ὅλοι οἱ πρῶτοι ἀριθμοὶ ἔχουν ἀκόμη τὸ χαρακτηριστικὸν τοῦ περιττοῦ ἀριθμοῦ, εἶναι δηλαδὴ καὶ αὐτοὶ σὺν τοῖς ἄλλοις περιττοί.

Τέλος πρέπει νὰ θεωρηθῇ μὴ πειστικὴ ἡ προσπάθεια τοῦ J. Stenzel νὰ ἐρμηνεύσῃ τὸ χωρίον 987 b 33 ἐπ. μὲ τὴν μέθοδο τῆς διαιρέσεως, διότι

ἀκριβῶς γὰρ τὴν γένεσιν τῶν ἀριθμῶν ρόλον παίζει ἐδῶ ὁ διπλασιασμός καὶ ἡ πρόσθεσις.

Ὅσον ἀφορᾷ τὴν «δυάδα» (μέγα - μικρόν), ὁ Πλάτων τὴν ἐταύτισε κατὰ τὴν μαρτυρίαν τοῦ Ἀριστοτέλους μετὰ τὴν ἔννοιαν «ἄνισον» (1087 b 10-11). Ὁ Ἀλέξανδρος δέχεται, ὅτι ἄνισον ἐδῶ σημαίνει ὕλην (796,15). Εἰς τοὺς πλατωνικοὺς διαλόγους ὑπάρχουν ὠρισμένες, ἐλάχιστες βεβαίως, ἐνδείξεις γὰρ μία θεωρία τῆς δυάδος ὑπὸ τὴν μορφήν «τὸ μᾶλλον καὶ ἥττον», ὅπως ἀναπτύσσομε εἰς τὸ τέλος τῆς μελέτης μας. Πιθανὸν τοῦτο νὰ ὀδηγῇ εἰς τὴν θεωρίαν τῆς δυάδος, ὅπως τὴν γνωρίζομε ἀπὸ τὴν ἄγραφον διδασκαλίαν τοῦ Πλάτωνος, ἓνα μέρος τῆς ὁποίας ἄλλωστε εἶναι καὶ τὸ χωρίο, τὸ ὁποῖον ἐρμηνεύσαμε. Τὸ ἄλμα ὅμως ἀπὸ τὸ «μᾶλλον καὶ ἥττον» τῶν διαλόγων εἰς τὴν δυάδα ὡς ἀρχὴν τῶν ἀριθμῶν καὶ τῶν ὄντων ἀπάντων (πρβλ. Ross, *Aristot. Fragm.* 115, 117) τῆς προφορικῆς διδασκαλίας τοῦ Πλάτωνος εἶναι μεγάλο.

Göttingen

Δημήτριος Μούκανος