

ή διδασκαλία του Δημοκρίτου αντιμάχεται τις μαθηματικές επιστήμες, πού όμως είναι ένα εκ των υστέρων συμπέρασμα και βασίζεται σε όρισμό των μαθηματικών πολύ μεταγενέστερης εποχής²⁹. Έξ άλλου όλόκληρη ή επιχειρηματολογία του Ζήνωνος, πού αποστερεί τα μαθηματικά από κάθε αυτότελεια, επιβεβαιώνει όχι την άποψη του Löbl, ότι ο Δημόκριτος απομακρύνθηκε από τον χώρο των μαθηματικών έπειδή αντίκειντο στην όντολογία του, άλλ' ότι ή όντολογία αποτελούσε τότε πλαίσιο για την εφαρμογή και επαλήθευση των μαθηματικών. Επίσης ή ίδια ή άτομική θεωρία, ως τó κατ' έξοχήν φιλοσοφικό σύστημα συναρτήσεων φανερώνει ότι για τον δημιουργό της ή μαθηματική επιστήμη δέν μπορούσε νά σημαίνει άλλο από έκφραση σχέσεων.

Ο Löbl κλείνει την διατριβή του αναζητώντας στον Άβδηρίτη φιλόσοφο τις καταβολές του Άπειροστικού λογισμού. Άν πραγματικά ή ανάλυση, οί σχέσεις, οί συναρτήσεις, τó άπειροελάχιστο, τó όριο αποτελούν βασικά στοιχεία του λογισμού αυτού, τότε ο παραλληλισμός πού επιχειρεί τροχάδην ο Löbl παύει νά φαντάζη τολμηρός³⁰.

Άθηναι

Άννα Κ. Πόταγα

29. Π.χ. Heronis Metrica, ed. Bruns, Leiden 1964, σ. 11/12 (Löbl, σ. 232). *Η δέ γεωμετρία έξ αφαιρέσεως την διδασκαλίαν έποιήσατο, λαβοῦσα γάρ φυσικόν σῶμα, ὃ έστι τριχῇ διαστατόν, μετά αντιτυπίας, και χωρίσασα τούτον την αντιτυπίαν έποιήσατο τó μαθηματικόν σῶμα, ὃ έστι στερεόν, και αφαιροῦσα κατήντησε επί τó σημείον.*

30. Μέν τó θέμα ασχολήθηκε διεξοδικά ο Luria: *Die Infinitesimaltheorie der ant. Atomisten*, «Quellen und Studien zur Geschichte der Mathematik», Bd. II (1922) σελ. 106-185 (Löbl, 226).

W. D. Goldfare, *Logic in the Twenties: The Nature of the Quantifier*, "The Journal of Symbolic Logic" 44 (1979) 351-368.

Η πολύ ένδιαφέρουσα εργασία του W. Goldfare, πού έγινε ύστερα από πρόσκληση ως όμιλία σε κοινή Σύνοδο των φιλοσοφικών Έταιρειών American Philosophical Association και Association for Symbolic Logic εις ΗΠΑ, και δημοσιεύθηκε στο τελευταίο τεύχος του περιοδικού «The Journal of Symbolic Logic» (Σεπτέμβριος 1979), έχει ως αντικείμενο τη Λογική στη δεκαετία του 1920, ιδιαίτερα τη φύση των ποσοτιστών (άλλιώς ποσοδεικτών, Quantifiers), μιās έννοιας ή όποία αποτελεί βασικό στοιχείο για την κωδικοποίηση των αρχών του λογικού διαλογισμού. Η εργασία αναφέρεται σε μιá σημαντική περίοδο της Ιστορίας της Λογικής, όπου ή Λογική συμπλέκεται στενά μέ προβλήματα θεμελιώσεως των Μαθηματικών. Άκριβώς, ένεκα της μεγάλης σημασίας πού ή θεωρία των ποσοτιστών έχει γενικώτερα και για τη Φιλοσοφία των Μαθηματικών, θεωρήσαμε σκόπιμο νά προβώμε στην παρουσίαση της εργασίας, συνο-



ψίζοντες τὰ κύρια σημεία της, με σκοπὸ νὰ καταστήσωμε αὐτὴν προσιτὴ καὶ στὸ ἐνδιαφερόμενο ἑλληνικὸ κοινό.

Ὅπως εἶναι γνωστό, με τὴν βοήθεια τῶν ποσοτιστῶν, ὡς καὶ ἐκείνη τῶν ὁρῶν καὶ τῶν κατηγορημάτων, εἴμαστε σὲ θέσιν νὰ συμβολίσωμε ὁποιαδήποτε πρόταση στὴν Γλῶσσα τῆς Λογικῆς σὲ τρόπο, ὥστε νὰ καταστήσωμε δυνατὴ τὴν ἀνάλυση τῶν λογικῶν ἰσχυρισμῶν μας. Πλὴν αὐτοῦ, ἡμποροῦμε με τοὺς ποσοτιστὲς νὰ εἰσάγωμε στὶς θεωρήσεις μας τὴν ἔννοια τοῦ ἀπείρου, μιὰ ἔννοια ποὺ ἀποτελεῖ τὴν ρίζα τῶν κυριώτερων δυσκολιῶν. Μὲ τὸν ὅρο ποσοτιστὲς ἐννοοῦμε τὰ σύμβολα $\forall$ καὶ $\exists$, ποὺ ἀντιπροσωπεύουν τοὺς ὅρους «γιά ὅλα», ἀντίστοιχα «γιά μερικά». Πιὸ συγκεκριμένα: γιά τὸ ὄρισμα x , τὸ σύμβολο $\forall(x)$, ἢ ἀπλῶς (x) , σημαίνει «γιά κάθε τιμὴ τοῦ x », καὶ τὸ σύμβολο $\exists(x)$ σημαίνει «ὑπάρχει τιμὴ τοῦ x τέτοια ὥστε». Ὁ $\forall$ λέγεται γενικὸς καὶ ὁ $\exists$ ὑπαρξιακὸς ποσοτιστής, ὁποιοσδήποτε δὲ ἀπὸ αὐτοὺς ἡμπορεῖ νὰ ἐκφρασθῇ με τὸν ἄλλον.

Ἡ ἐργασία τοῦ Goldfard ἀρχίζει με τὴν ἐκθεση τῶν συμπερασμάτων προγενεστέρων ἐρευνητῶν, ποὺ ἀνήκουν σὲ δύο κύριες Σχολές, τὴ Λογικιστικὴ καὶ ἐκείνη τῆς Ἀλγεβρικῆς Λογικῆς, Σχολές ποὺ ἀντιπροσωπεύονται ἢ πρώτη ἀπὸ τοὺς G. Frege (1848-1925) καὶ B. Russell (1872-1970) καὶ ἡ δεύτερη ἀπὸ τὸν E. Schröder (1841-1902). Γιά τοὺς Frege καὶ Russell, στοὺς ὁποίους ὀφείλομε καὶ συμβολισμό γιά τὸν γενικὸ ποσοτιστὴ, ὡς πεδίο ν μεταβολῆς τῶν ποσοτιστῶν λαμβάνεται μιὰ ἐκ τῶν προτέρων ὀρισμένη καὶ ἀμετάβλητη περιοχὴ ἀπὸ πράγματα· ἰδιαίτερα γιά τὸν Frege λαμβάνεται κάθε ἀντικείμενο ἢ κάθε συνάρτηση ἀπὸ ὀρισμένη τάξη, γιά τὸν Russell κάθε «ἄτομο» ἢ κάθε ἀποφαντικὴ συνάρτηση. Ἐξ ἄλλου, καὶ οἱ δύο παρεδέχοντο ὅτι οἱ λογικοὶ τύποι καὶ ἀποφάνσεις δὲν περιέχουν μὴ λογικὰ στοιχεῖα καὶ ὅτι τὰ λογικὰ σημεία ποὺ βρίσκονται σ' αὐτοὺς ἔχουν καθωρισμένη σημασία, δὲν ἐπιδέχονται ὅμως κάποια ἄλλη ἐρμηνεία. Γιά τοὺς ἐρευνητὲς αὐτοὺς οἱ νόμοι τῆς Λογικῆς —μιᾶς Λογικῆς ποὺ ἀφορᾷ στὸν πραγματικὸ κόσμον— εἶναι οἱ πιὸ γενικὲς ἀλήθειες γιά τὸ σύμπαν τῶν λογικῶν ἀποφάνσεων. Ἐκεῖνο ποὺ τοὺς χαρακτηρίζει εἶναι ἡ μὴ χρησιμοποίησις ὁποιασδήποτε μεταλογικῆς ἔννοιας. Τελικὸς σκοπὸς τοὺς ἦταν ν' ἀποδείξουν ὅτι ἀπὸ τὴν Λογικὴ ἡμπορεῖ νὰ συναχθῇ ὁλόκληρη ἡ Μαθηματικὴ ἐπιστήμη. Τὴν θέσιν αὐτὴ ὑπεστήριξε στὴν ἀρχὴ καὶ ὁ L. Wittgenstein (1889-1951) στὸ ἔργο του (1922) *Tractatus Logico-Philosophicus*, ἔργο ποὺ ἄσκησε μεγάλη ἐπίδραση στὸν λεγόμενο «κύκλο τῆς Βιέννης».

Τὴν ἴδια σχεδὸν χρονικὴ περίοδο πραγματοποιήθηκε μιὰ τελείως διάφορη προσπέλασις τῆς Λογικῆς ἀπὸ τὸν ἡγέτη τῆς Ἀλγεβρικῆς Λογικῆς, τὸν Schröder, καὶ τοὺς ὁπαδούς του, προσπέλασις ἡ ὁποία συνέχιζε τὴν παράδοσις ποὺ εἶχε δημιουργηθῇ ἀπὸ τὸν G. Boole (1815-1864)· πρόκειται γιά τὴ Λογικὴ τῶν Τάξεων ποὺ ἡμπορεῖ νὰ ἐρμηνευθῇ καὶ ὡς Λογικὴ τῶν Ἀποφάνσεων. Κατὰ τὸν Schröder, ἡ Ἀλγεβρα τῆς Λογικῆς ἀναπτύσσει ἓνα Λογισμό τῶν σχέσεων· οἱ ποσοτιστὲς ὀρίζονται ὡς ὀρισμένα, ἐνδεχομένως ἄπειρα, λογικὰ ἀθροίσματα καὶ γινόμενα με ὀρίσματα «ἄτομα» εἴτε σχέσεις. Στὴν Ἀλγεβρα αὐτὴ δὲν βρίσκει κανεὶς τυπικὲς (φορμαλιστικὲς) ἀποδείξεις. Ἐπιδίωξις τοῦ Schröder ἦταν ἡ εὕρεσις τῶν νόμων ποὺ ἀφοροῦν στὶς σχέσεις σὲ διάφορους «κόσμους».

Ὁπαδὸς τοῦ Schröder ἡμπορεῖ νὰ θεωρηθῇ ὁ L. Löwenheim (1878-1940), στὸν ὁποῖον ὀφείλεται (1915) τὸ περίφημο θεώρημα, ὅτι κάθε «καλῶς μορφούμενος» τύπος (Zählausdruck) τοῦ περιορισμένου (πρώτης τάξεως) συναρτησιακοῦ Λογισμοῦ, τύπος ποὺ ἡμπορεῖ νὰ πληροῦται σὲ μιὰ περιοχὴ ἀπειρῶν, πληροῦται καὶ σὲ μιὰ περιοχὴ ἀπαριθμητῶν ἀντικειμένων. Γι' αὐτὸν ἓνα «ἄτομο» ἡμπορεῖ νὰ «ἀντιπροσωπεύη» καὶ ὁλόκληρο σύνολο ἀπὸ «ἄτομα».

Στὴν ἐναρξὴ τῆς δεκαετίας τοῦ '20 ἀπλουστεύθηκε καὶ γενικεύθηκε ἡ ἀπόδειξη τοῦ θεωρήματος τοῦ Löwenheim, ἀπὸ τὸν T. Skolem, γιὰ ὁποιοδήποτε σύστημα ἀπαριθμητοῦ πλήθους («καλῶς μορφουμένων») τύπων, ἐφ' ὅσον τὸ σύστημα, ἢ ἓνα ὑποσύστημά του πεπερασμένου πλήθους τύπων, ἡμπορεῖ νὰ πληροῦται σὲ μιὰ ἄπειρη περιοχὴ. Σύμφωνα μὲ τὸ ἀρχικὸ ἀλλὰ καὶ τὸ γενικευμένο θεώρημα, ὁ ὁρισμὸς τοῦ ποσοτιστοῦ $\exists$, ὅτι δηλαδή «ὑπάρχει ὄρισμα ποὺ ἔχει κάποιο κατηγορημα», μετατρέπεται ὡς πρὸς τὴ διατύπωση στὸ ὅτι «κάποια συνάρτηση δέχεται τέτοιο ὄρισμα». Ὁ τρόπος ποὺ ὁ Skolem καὶ οἱ σύγχρονοί του συνέδεσαν τοὺς ποσοτιστὲς μὲ τὶς λεγόμενες συναρτήσεις ἐπιλογῆς, δηλαδή τὶς συναρτήσεις μὲ αὐθαίρετα ἐκλεγόμενες τιμὲς γιὰ τὶς διάφορες τιμὲς τοῦ ὁρίσματος, ἀποτελεῖ χαρακτηριστικὸ γνῶρισμα τοῦ πῶς ἐννοοῦσαν τοὺς ποσοτιστὲς στὴν ἐποχὴ τῆς δεκαετίας τοῦ '20.

Ἰδιαίτερα ἀξιοσημεῖωτο εἶναι τὸ γεγονὸς ὅτι ὁ Skolem, ξεκινώντας ἀπὸ συμπεράσματα τοῦ δικοῦ του θεωρήματος, ἔφθασε στὴν πολὺ σημαντικὴ παρατήρηση, ὅτι προβλήματα τῆς Συνολοθεωρίας ποὺ ἀφοροῦν στὴν πληθικότητα συνόλων, ἐνδέχεται νὰ μὴν εἶναι δυνατόν νὰ συναχθοῦν ἀπὸ τὰ ἀξιώματα ἀφετηρίας. Ἐξέφρασε μάλιστα τὴν ὑπόθεση, ὅτι ἡ παρατήρησή του ἐκείνη ἴσχυε καὶ γιὰ τὴν περίφημη εἰκασία τοῦ G. Cantor (1845-1918) ἀναφορικὰ μὲ τὸ συνεχές. Στὴν Ἱστορία τῆς Λογικῆς, καὶ γενικώτερα τῶν Μαθηματικῶν, ἡ ὡς ἄνω παρατήρηση ἔχει τὸ ἀνάλογό της στὴν ἰδέα ποὺ ὠδήγησε ἄλλοτε στὶς μὴ-Εὐκλείδειες Γεωμετρίες, μὲ ἄλλες λέξεις στὴν ἰδέα ὅτι τὸ αἶτημα τῶν παραλλήλων τοῦ Εὐκλείδου ἦταν ἀνεξάρτητο ἀπὸ ὁποιαδήποτε ἀξιωματικὴ τῆς Εὐκλείδειας Γεωμετρίας. Ἐξ ἄλλου, ὁ Skolem, χρησιμοποιώντας τὸν συμβολισμό τοῦ Schröder, ἐτυποποίησε τὴν Συνολοθεωρία ὡς θεωρία πρώτης τάξεως καὶ ἐχρησιμοποίησε τὶς διαφορὲς ποὺ ὑπάρχουν ἀνάμεσα στὴν τρέχουσα ἐρμηνεία καὶ σ' ὅλες τὶς ἄλλες δυνατὲς ἐρμηνεῖες τῆς τυποποίησης (φορμαλισμοῦ) της.

Ὁ Skolem δὲν ἀνήκει οὔτε στὴ Λογικιστικὴ οὔτε τὴν Φορμαλιστικὴ Σχολή· ἐπρέσβευε ὅτι ὁποιαδήποτε θεμελίωση τῆς Λογικῆς καὶ τῶν Μαθηματικῶν ἔπρεπε νὰ γίνεται μὲ τὸν λεγόμενο «ἀναδρομικὸ τρόπο σκέψεως». Ἀναφορικὰ μὲ τοὺς ποσοτιστὲς, ὁ Skolem δὲν ἐξομοιώνει αὐτοὺς μὲ συζεύξεις (λογικὰ γινόμενα) καὶ διαζεύξεις (λογικὰ ἀθροίσματα), οὔτε δέχεται τὸν προηγούμενο ἀσαφῆ ἀλγεβρικὸ Λογισμό, ποὺ ἴσχυε μέχρι τότε γιὰ τὶς πράξεις αὐτές.

Ὁ συγγραφεὺς τῆς παρουσιαζόμενης ἐργασίας ἐρχεται κατόπιν στὸν D. Hilbert (1862-1943) καὶ τὴ Σχολὴ του. Ἀναφέρει ὅτι ὁ Hilbert δὲν δέχεται πῶς τὰ *Principia Mathematica* (τῶν Russell καὶ Whitehead) περιέχουν λογικὸ σύστημα, ἐπάνω στὸ ὁποῖο θὰ ἡμποροῦσαν νὰ θεμελιωθοῦν ὅλα τὰ Μαθηματικά, θεωρεῖ ὅμως τὰ *Principia* αὐτὰ ὡς πρότυπο γιὰ τὴ δυνα-

τότητα τυποποίησης (φορμαλισμοῦ) τῶν Μαθηματικῶν. Κατὰ τὸν Hilbert, οἱ ποσοτιστὲς ἀποτελοῦν συστατικὸ μέρος τῶν φορμαλιστικῶν συστημάτων, μάλιστα εἶναι τὸ μέρος ἐκεῖνο ποὺ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ μιλάμε γιὰ τὸ ἄπειρον. Κατ' ἀρχὰς ὁ Hilbert ἔστρεψε τὴν προσοχή του στὸ ἐρώτημα: Σὲ ποιό ἄραγε σημεῖο εἰσέρχεται στὴν Ἀνάλυση ὁ «ὑπερπεπερασμένος» (transfinite) διαλογισμός; Ἐτσι, στὴν πρώτη παρουσίαση τῆς ἀξιωματικῆς του συναντοῦμε ἀριθμοθεωρητικὰ καὶ ἀναλυτικὰ συστήματα ἀξιωμάτων σὲ τρόπο, ὥστε νὰ προηγοῦνται τὰ ἀξιώματα ποὺ δὲν περιέχουν καὶ νὰ ἀκολουθοῦν ἐκεῖνα ποὺ περιέχουν ποσοτιστὲς. Ἐκεῖνο ποὺ στάθηκε ἐμπόδιο στὸν Hilbert γιὰ μιὰ πλήρη ἐποπτεία τῆς ποσοτιστικῆς Λογικῆς ἦταν ἡ λεγόμενη «πεπερασμένη θέση» του (finite Einstellung). Ὁ κεντρικὸς ρόλος τῆς Θεωρίας τῶν ποσοτιστῶν στὶς ἐργασίες του πάνω στὴ Λογική, φανερῶνεται στὸ ἔργο *Grundzüge der theoretischen Logik* (1928), ἔργο ποὺ συνέγραψε μαζὶ μὲ τὸν W. Ackermann. Στὸ ἔργο αὐτὸ ἔχομε τὴν πρώτη ἀμιγῆ ποσοτιστοποίηση γιὰ ἓνα φορμαλιστικὸ σύστημα. Ὡστόσο, ὠρισμένα σκοτεινὰ σημεῖα τοῦ ἔργου, ποὺ ἴσως δείχνουν τὴν ὄχι πλήρως συνεπῆ διεξαγωγή μιᾶς ἀμιγοῦς ποσοτιστικῆς θεωρίας, λείπουν γιὰ πρώτη φορὰ ἀπὸ τὴ δεύτερη ἐκδοση (1938). Μὲ τὸν ὅρο ποσοτιστικὴ θεωρία ἐννοοῦμε στὰ παραπάνω τὴ λογικὴ θεωρία ἡ ὁποία, ἐκτὸς ἀπὸ τὴ λογικὴ γλῶσσα καὶ τὰ συνήθη ἀξιώματα, περιέχει καὶ ἀξιώματα γιὰ τοὺς ποσοτιστὲς καὶ τὴ συνεπαγωγή τους, κατάλληλα γιὰ τὴν παραγωγή τῶν συμπερασμάτων μας. Οἱ ἀλήθειες τῆς Λογικῆς αὐτῆς δὲν ἔχουν κανένα εἰδικὸ περιεχόμενο, οὔτε ἀναφέρονται σὲ εἰδικὲς ὀντότητες, ἀλλὰ προσιδιάζουν στὴν ἐκάστοτε ἐρμηνεία τῶν κατηγορημάτων τοῦ ὑπ' ὄψῃ λογικοῦ συστήματος.

Ὅπως ὁ Skolem ἔτσι καὶ ὁ Hilbert ἐκμεταλλεύθηκε τὶς ὁμοιότητες ποὺ ὑπάρχουν ἀνάμεσα στοὺς ποσοτιστὲς καὶ τὶς συναρτήσεις ἐπιλογῆς, συναρτήσεις γιὰ τὶς ὁποῖες μιλήσαμε στὰ προηγούμενα. Γιὰ τὸν σκοπὸ αὐτὸν εἰσάγει ἓνα νέο σύμβολο, τὸ γνωστὸ εὐ σύμβολό του, μὲ τὸ ὁποῖο ὀρίζονται οἱ ποσοτιστὲς. Τὸ σύμβολο αὐτὸ παίζει τὸν ρόλο συναρτήσεως ἐπιλογῆς, μὲ ὀρίσματα ἀποφάνσεις, σὲ τρόπο ὥστε, ἂν A παριστάνῃ ἀπόφαση ποὺ «ἰσχύει» γιὰ κάποια ἀντικείμενα x , τότε $\varepsilon(A)$, ἐκτενέστερα $\varepsilon_x A(x)$, νὰ εἶναι ὁποιοδήποτε ἀπὸ τὰ ἀντικείμενα αὐτά. Κατὰ τὸν Hilbert, σὲ κάθε τυπικὴ ἀπόδειξη πρέπει νὰ παρουσιάζεται πεπερασμένο μόνον πλῆθος ἀπὸ τὰ σύμβολα ε_x .

Μὲ τὴν εἰσαγωγή τοῦ νέου αὐτοῦ συμβολισμοῦ διανοίγεται ὁ δρόμος γιὰ τὴν ἀπόδειξη τοῦ συμβιβαστοῦ, σύμφωνα μὲ τὴν βασικὴ προσπέλαση τοῦ Hilbert. Δηλαδή, σὲ μιὰ ἀποδεικτικὴ πρόβαση προσπαθοῦμε νὰ προσδιορίσωμε διαδοχικὲς τιμὲς στὰ εὐ σύμβολα μὲ τὴν ἐλπίδα, ὅτι ὕστερα ἀπὸ πεπερασμένα κατὰ τὸ πλῆθος βήματα οἱ προσδιορισθεῖσες αὐτὲς τιμὲς μετὰ τρέπουv ὅλα τὰ χρησιμοποιούμενα στὴν ἀπόδειξη εὐ ἀξιώματα, ὡς καὶ τὰ εἰδικὰ ἀξιώματα τοῦ εἰδικοῦ θεωρούμενου συστήματος, σὲ μὴ ἀμφισβητήσιμες πρᾶξεις, πράξεις ἐλεύθερες ἀπὸ ποσοτιστὲς.

Ἡ ἀπόδειξη γιὰ τὸ συμβιβαστὸ τῆς φορμαλιστικῆς Ἀναλύσεως πρέπει νὰ περικλείῃ, κατὰ τὸν Hilbert, καὶ τὴν ἀπόδειξη ὅτι κάθε παραγωγίμος τύπος ποὺ δὲν περιέχει ποσοτιστὲς —καὶ γι' αὐτὸ παρέχει μιὰ ἐνορατικὴ, μὴ τυπικὰ ἀλλὰ μὲ νόημα βεβαίωση τῆς Ἀριθμητικῆς— εἶναι ὀρθός. Κατὰ

τὸν Goldfage, μιὰ τέτοια ἀπόδειξη κρύβει ἓνα βαθύτερο προβληματισμὸ τοῦ Hilbert, προβληματισμὸ ποὺ συνίσταται στὴν ἐξεύρεση τῆς ἐνδότερης σημασίας ποὺ ἔχουν οἱ ποσοτιστὲς στὶς φορμαλιστικὲς ἀποδείξεις.

Γεγονὸς εἶναι, ὅτι ὁ Hilbert ὑποτιμοῦσε τὶς δυσκολίες κατὰ τὴν διεξαγωγή τῆς ὡς ἄνω προσπέλασής του. Πρῶτος ὁ J. von Neumann (1903-1957) ἀπέδειξε (1920) τὴν δυνατότητα ν' ἀχθῇ σὲ πέρας ἡ προσπέλαση Hilbert γιὰ ἓνα ὑποσύστημα τῆς περιορισμένης (πρώτης τάξεως) Ἀριθμοθεωρίας, ὅπου ἡ ἐπαγωγή περιορίζεται σὲ τύπους ποὺ δὲν περιέχουν ποσοτιστὲς. Αὐτὸ καὶ ἐγίνε ἀφορμὴ ὥστε, στὸ τέλος τῆς δεκαετίας τοῦ '20, ὁ Hilbert καὶ οἱ ὁπαδοί του νὰ εἶναι πλήρως πεπεισμένοι πὼς κατεῖχαν ὅλα τὰ οὐσιώδη στοιχεῖα γιὰ μιὰ πλήρη ἀπόδειξη τοῦ συμβιβαστοῦ ὁλόκληρης τῆς Ἀριθμοθεωρίας. Ὅμως, τὴν πεποίθησιν αὐτὴ τὴν ἐκλόνισε βαθειὰ ἓνα κλασσικὸ θεώρημα τοῦ K. Gödel (1906-1977), ποὺ ἀφοροῦσε στὴν ἀντιφατικότητα ἀνάμεσα στὴν π λ η ρ ό τ η τ α καὶ στὴν σ υ μ β ι β α σ τ ό τ η τ α τῶν ἀξιωμάτων σ' ἓνα λογικοαριθμητικὸ παραγωγικὸ σύστημα (1931).

Οἱ δυσκολίες τῆς πλήρους διεξαγωγῆς τοῦ προγράμματος Hilbert παρατηρήθηκε ὅτι βρισκόταν στὴν ἀλλεπάλληλη ἐφαρμογή, ἀλλιῶς στὴν ἀλληλεξάρτηση, τῶν ε συμβόλων κατὰ τὴν ἀκολουθούμενη ἀποδεικτικὴ πρόβαση. Ἡ ὑπερπήδηση τῶν δυσκολιῶν αὐτῶν γιὰ τὴν Ἀριθμοθεωρία ἀποδείχθηκε δυνατὴ ἀργότερα (Ackermann, 1940), ἀλλὰ γιὰ τὴν περίπτωση ποὺ θὰ ἐγκατέλειπε κανεὶς τὴν ἀναφερθεῖσα «πεπερασμένη» θέση· γιὰ τὴν Ἀνάλυση τὸ πρόβλημα παρέμενε ἀνοικτό. Προσπάθεια γιὰ νὰ βρεθῇ κάποια πεπερασμένη ποσοτιστικὴ Λογικὴ καταβλήθηκε στὸ τέλος τῆς δεκαετίας τοῦ '20 ἀπὸ τοὺς Skolem καὶ Herbrand (1908-1931), ποὺ ξεκίνησαν ἀπὸ διαφορετικοὺς δρόμους. Καὶ τῶν δύο τὸ ἐνδιαφέρον ἦταν ν' ἀναλύσουν τὶς ποσοτιστικὲς ἀποφάνσεις μὲ βάση τὴ λεγόμενη ἀ λ η θ ο σ υ ν α ρ τ η σ ι α κ ῆ Λ ο γ ι κ ῆ (Truthfunctional Logic) καὶ μὲ τὴν εἰσαγωγή τῆς ἐννοίας τῆς ε ὕ ρ υ ν σ η ς (expansion). Ἡ ἐννοία αὐτὴ εἶχε χρησιμοποιηθῇ κιόλας (1920) ἀπὸ τὸν Skolem γιὰ ὠρισμένους τύπους, στοὺς ὁποίους οἱ γενικοὶ ποσοτιστὲς προηγοῦνται τῶν ὑπαρξιακῶν. Δυστυχῶς δὲν ἔτυχε τότε τῆς δέουσας προσοχῆς τὸ μέρος ἐκεῖνο τῆς ἐρευνας τοῦ Skolem ποὺ ἀφοροῦσε σὲ μιὰ καθαρὰ ποσοτιστικὴ, στὴ θέση συνολοθεωρητικῆς, θεώρησης. Ἀκολούθησε σειρά ἐργασιῶν, στὶς ὁποῖες ὁ Skolem ἐπέτυχε μεταξὺ ἄλλων μιὰ «κατ' οὐσίαν» ἀπόδειξη τῆς π λ η ρ ό τ η τ α ς γιὰ ἓνα φορμαλιστικὸ σύστημα τῆς ποσοτιστικῆς θεωρίας. Εἶναι περίεργο πὼς σὲ μιὰ σχετικὴ ἐκθεσὶ τοῦ (1938) ὁ ἴδιος δὲν ἀναφέρεται σὲ ἐργασία τοῦ Gödel (1930), ὅπου ὁ τελευταῖος ἀποδεικνύει τὴν πληρότητα τῆς ἀξιωματικοποίησης τῆς ποσοτιστικῆς θεωρίας τῶν Hilbert-Ackermann.

Ἐξ ἄλλου ὁ Herbrand, ἔχοντας ἐντελῶς ἀντίθετο προσανατολισμὸ, ὠδηγήθηκε σὲ κυριολεκτικὰ ἐκπληκτικὰ συμπεράσματα. Μεταξὺ ἄλλων προσπάθησε ν' ἀποδείξῃ, χρησιμοποιώντας «πεπερασμένα» μέσα, ὅτι ἓνας τύπος εἶναι π α ρ α γ ώ γ ι μ ο ς σὲ ἀξιωματικὸ σύστημα τότε καὶ μόνον, ὅταν ἡ ἄρνησή του ἔχει μιὰ ἀληθοσυναρτησιακὰ ἀσυμβίβαστη εὐρύνση. Παρὰ ταῦτα ἡ ἀπόδειξή του δὲν ἦταν ἀπαλλαγμένη ἀπὸ ὠρισμένες ἀστοχίες. Ἄς τονισθῇ ἀκόμη ὅτι σημαντικὴ ὑπῆρξε ἡ συμβολὴ τοῦ Herbrand στὴν διεξαγωγή τοῦ προγράμματος Hilbert ἔτσι, ὥστε ἡ προσπέλαση τοῦ τε-

λευταίου σὲ εἰδικὰ φορμαλιστικὰ συστήματα ν' ἀπλουστεύεται μὲ τὴν ἀνάλυση τῆς ποσοτιστικῆς θεωρίας ἀπὸ τὸν Herbrand. Ἐξ ἄλλου, τὰ λεγόμενα ε θεωρήματα τῶν Hilbert-Bernays ξεκίνησαν ἀπὸ συμπεράσματα ἐργασιῶν τοῦ Herbrand.

Τέλος, ἡ διδακτορικὴ ἐργασία τοῦ Gödel (1930), ὅπως καὶ ἡ ἀμέσως κατόπιν γενόμενη συντομώτερη διατύπωσή της, ὅπου ἀποδεικνύεται ἡ πληρότητα μιᾶς κανονικῆς (standard) ἀξιωματικοποίησης τῆς ποσοτιστικῆς Θεωρίας, ἀποτελοῦν μιὰ πρόσφορη κατάληξη γιὰ τὶς ἐρευνες τῆς Λογικῆς στὴ δεκαετία τοῦ '20. Στὶς ἐργασίες ἐκεῖνες ὁ Gödel διακρίνει τὶς συντακτικὲς ἀπὸ τὶς σημασιακὲς ἔννοιες, ἀλλὰ καὶ διευκρινίζει τὴν ἔννοια τῆς δυνατότητας πληρώσεως, μιὰν ἔννοια ποὺ ἔπαιξε σημαντικὸ ρόλο στὶς περαιτέρω ἐρευνες.

Ἀθῆναι

Φίλων Βασιλείου
τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν

I. Lakatos, *Falsification and the Methodology of Scientific Research Programmes* (1970).*

Στὸ ἔργο αὐτὸ ὁ I. Lakatos ἐπιχειρεῖ νὰ δώσῃ τὶς βάσεις γιὰ τὴν ἐξήγηση τῆς ἐξέλιξης τῶν ἐπιστημονικῶν θεωριῶν καὶ γενικώτερα τῆς ἀνάπτυξης τῆς ἐπιστήμης. Ἡ σημασία του βρίσκεται στὴν προσπάθεια τοῦ Lakatos νὰ ἐπαναφέρῃ τὴν ἀντικειμενικότητα καὶ τὸν ἐπιστημονικὸ ὀρθολογισμό στὰ κριτήρια, μὲ τὰ ὁποῖα ἐπιχειρεῖ κανεὶς νὰ ἐξηγήσῃ τὶς φάσεις ἀπὸ τὶς ὁποῖες περνᾷ ἡ ἐπιστημονικὴ ἐξέλιξη. Τὰ στοιχεῖα τῆς ἀντικειμενικότητας καὶ τοῦ ὀρθολογισμοῦ λείπουν ἐπικίνδυνα κατὰ τὸν Lakatos ἀπὸ τρέχουσες ἱστορικὲς ἐρμηνεῖες τῆς ἐπιστημονικῆς ἐξέλιξης, ὅπως αὐτὴ τοῦ Kuhn.

Τὸ ἰδιαίτερο στοιχεῖο ὅμως στὸν ὀρθολογισμό τοῦ Lakatos, κάτι ποὺ τὸν διακρίνει ριζικὰ ἀπὸ τὸν ὀρθολογικὸ ἀντικειμενιστὴ K. Popper, εἶναι ἡ ἱστορικότητα, τὴν ὁποία ὁ Lakatos προσπαθεῖ νὰ ἐνσωματώσῃ στὸν ὀρθολογισμό του. Ὡς κυριώτερη ἱστορικὴ αἰτία γιὰ τὴν δημιουργία ἀνορθολογικῶν (irrational) «κοινωνικο-ψυχολογικῶν» ἐξηγήσεων γιὰ τὸ φαινόμενο τῆς μεταβολῆς τῶν ἐπιστημονικῶν θεωριῶν, βλέπει ὁ Lakatos τὴν ἀποτυχία τοῦ «ἀποδεικτισμοῦ» (justificationism), δηλαδὴ τῆς γενικῆς ἀπο-

* «Διάψευση καὶ ἡ μεθοδολογία τῶν ἐπιστημονικῶν προγραμμάτων ἐρευνας». Ὁ ἑλληνικὸς ὅρος «διάψευση» ἀντιστοιχεῖ στὸν ὅρο Falsification καὶ σημαίνει κυρίως τὴν διάψευση μιᾶς θεωρίας καὶ ἰδιαίτερα θεωρίας ἐπιστημονικῆς, κάτω ἀπὸ συγκεκριμένες πειραματικὲς συνθῆκες. Τὸ ἔργο τοῦ I. Lakatos περιέχεται στὸν τόμο *Criticism and the Growth of Knowledge* μὲ ἐκδότες τὸν ἴδιο καὶ τὸν A. Musgrave, Cambridge University Press 1970, 91-96.

Ὁ οὐγγρικῆς καταγωγῆς Imre Lakatos δίδαξε Φιλοσοφία τῆς ἐπιστήμης καὶ Λογική, μαζί μὲ τὸν Karl Popper, στὴν London School of Economics. Πέθανε τὸ 1973.