ΦΙΛΩΝ ΒΑΣΙΛΕΙΟΥ, τῆς Ἀκαδημίας Ἀθηνῶν

Η ΠΡΟΒΛΗΜΑΤΙΚΗ ΤΗΣ ΜΟΝΑΔΙΚΟΤΗΤΑΣ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

1

Χαρακτηριστικὸ γιὰ τὴν ἐξέλιξη τῆς μαθηματικῆς σκέψης εἶναι τὸ γεγονὸς ὅτι, παρόλο ποὺ ἡ σκέψη αὐτὴ ξεκίνησε ἀπὸ καθαρὰ πρακτικὲς διαπιστώσεις τῆς ἄμεσης ἐμπειρίας, δὲν ἄργησε ν' ἀναχθεῖ σὲ ὄργανο αὐστηροῦ θεωρητικοῦ διαλογισμοῦ. Ἡ πραγματοποίηση τῆς ἀναγωγῆς αὐτῆς ὑπῆρξε τὸ θαυμαστὸ ἐπίτευγμα τοῦ ἀρχαίου ἑλληνικοῦ πνεύματος, ἐπίτευγμα ποὺ βρῆκε τὸ ἀριστοτεχνικό του πρότυπο εἰς τὰ *Στοιχεῖα* τοῦ Εὐκλείδου.

Παρὰ τὴν ἐξιδανίκευση ὅμως τοῦ φυσικοῦ κόσμου, ποὺ ἀποτέλεσε τὴν οὐσία τῆς ἀφηρημένης μαθηματικῆς σκέψης, τόσο στὴν ἀρχαιότητα ὁ Εὐκλείδης (330;-273;) ἀκολουθώντας τὴ διδασκαλία τοῦ Πλάτωνος (429;-348;), ὅσο στοὺς νεότερους χρόνους ὁ I. Kant (1784-1804) καὶ πρὶν ἕνα περίπου αἰώνα ὁ G. Cantor (1845-1918), πίστευαν σταθερά, ὅτι τὰ μαθηματικὰ (Γεωμετρία, Ἀριθμητική, Συνολοθεωρία) περιγράφουν αὐτὴ τὴ δομὴ τῆς ἐμπειρικῆς (φυσικῆς) πραγματικότητας.[1]

Γιὰ νὰ κλονισθεῖ ἡ πεποίθηση στὴν πραγματικότητα τῆς Εὐκλείδειας

---

1. Πρέπει νὰ τονισθεῖ ὅτι μὲ τὸν ὅρο ἐμπειρικὴ πραγματικότητα ἀναφερόμαστε, στὴν παροῦσα ἐργασία, στὶς φυσικὲς καὶ ὄχι στὶς πνευματικὲς (ἱστορικὲς) ἐπιστῆμες. Ὡς γνωστό, ὁ H. Rickert (1863-1936) διακρίνει τὴν πραγματικότητα τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν ἀπὸ ἐκείνη τῆς ἄμεσης ἐμπειρίας. Γιὰ τὴ διάκριση αὐτὴ τοῦ Rickert ὁ I. N. Θεοδωρακόπουλος (1900-1981), στὸ Κεφάλαιο Heinrich Rickert τοῦ τελευταίου βιβλίου του *Ἀγαπημένη μου Χαϊδελβέργη* (1980), γράφει: «Ἡ πραγματικότης τῶν φυσικῶν ἐπιστημῶν δὲν εἶναι τίποτε ἄλλο, παρὰ ἕνα σύστημα ποσῶν ποὺ συλλαμβάνομε μὲ τὴ διάνοιά μας, ἐνῶ ἡ πραγματικότης τῆς ἄμεσης ἐμπειρίας εἶναι μιὰ συνεχὴς ἀκολουθία καταστάσεων καὶ ἀντιστοίχων βιωμάτων μέσα μας. Ἡ φυσικὴ ἐπιστήμη παραμερίζει τὴν ἐποπτικὴ ποικιλία τῶν φαινομένων καὶ τοῦ κόσμου ἐν γένει καί, ἀντὶ αὐτῆς, εἰσάγει συστήματα ἀριθμητικῶν σχέσεων». Ἐξάλλου, ἀναφορικὰ μὲ τὴ φύση τοῦ ἐποπτικοῦ χώρου (§ 2), ὁ F. Klein (1849-1925) γράφει ὅτι «μὲ τὴν ἔκφραση αὐτὴν ἐννοοῦμε κυρίως δύο διακεκριμένες πηγὲς γνώσης, πρῶτα τὴν ἄμεσα αἰσθητηριακή, τὴν ἐμπειρικὴ ἐποπτεία τοῦ χώρου, ποὺ μποροῦμε νὰ τὴν ἐλέγξουμε μὲ τὴ μέτρηση, καὶ ἔπειτα τὴ διάφορη ἀπ' αὐτή, τὴν ἐξιδανικευμένη ἐσωτερικὴ ἐποπτεία, τὴν ἰδέα τοῦ χώρου, ποὺ εἶναι πέρα ἀπὸ τὴν ἀνακρίβεια τῆς αἰσθητηριακῆς ἀντίληψης». Ἀνάλογη διάκριση κάνει ὁ Klein καὶ γιὰ τὴν ἔννοια τοῦ ἀριθμοῦ ὡς ποσότητας. (F. Klein, *Elementarmathematik vom höheren Standpunkte aus*, Berlin, Springer Verlag, «Die Grundlehren der Math. Wiss.», Bd. 14, 38).

Γεωμετρίας καὶ ἀργότερα σ' ἐκείνη τῆς θεωρίας τοῦ Cantor, ἀπαιτήθηκαν ἀπὸ τὸ ἕνα μέρος ἡ ἀπόδειξη τοῦ ἀ ν ε ξ ά ρ τ η τ ο υ, ἀπὸ τὰ λοιπὰ ἀξιώματα τῆς Γεωμετρίας, τοῦ περίφημου πέμπτου α ἰ τ ή μ α τ ο ς τ ῶ ν π α ρ α λ λ ή λ ω ν καὶ ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος ἡ ἀπόδειξη τοῦ ἀνεξάρτητου, ἀπὸ τ' ἄλλα ἀξιώματα τῆς Συνολοθεωρίας, τῆς λεγόμενης καντοριανῆς ὑ π ό θ ε σ η ς τ ο ῦ σ υ ν ε χ ο ῦ ς (§ 4). Ἔτσι, οἱ διαφορετικὲς διακλαδώσεις, ποὺ ἔφεραν σὲ φῶς οἱ ἔρευνες γιὰ ἕνα καὶ τὸν ἴδιο μαθηματικὸ κλάδο, γένηκαν ἀφορμὴ στὸ νὰ τεθεῖ τὸ ἐρώτημα: Εἶναι δυνατὸ κάποια ἢ κάποιες ἀπὸ τὶς διακλαδώσεις αὐτὲς νὰ ἰ σ χ ύ ο υ ν στὴν ἐμπειρικὴ πραγματικότητα καί, στὴν περίπτωση θετικῆς ἀπάντησης, γιὰ ποιάν ἢ γιὰ ποιές ἀπὸ τὶς διακλαδώσεις συμβαίνει αὐτό; Μιλώντας γιὰ τὴν ἰσχὺ διακλάδωσης στὴν ἐμπειρικὴ πραγματικότητα, ἐννοοῦμε μιὰ ὁρισμένη ἰ σ ο μ ο ρ φ ί α ἀνάμεσα στὶς γεωμετρικὲς σχέσεις τῆς διακλάδωσης καὶ στὶς σχέσεις τῶν ἀντίστοιχων ἐμπειρικῶν δεδομένων.

Πρέπει βέβαια νὰ τονισθεῖ ἐξ ἀρχῆς, ὅτι ἀ φ η ρ η μ έ ν η μ α θ η μ α τ ι κ ὴ θ ε ω ρ ί α καὶ ἐ μ π ε ι ρ ι κ ὴ π ρ α γ μ α τ ι κ ό τ η τ α εἶναι δύο τελείως διαφορετικὰ πράγματα. Ἕνα γεωμετρικὸ σχῆμα εἶναι κάτι ποὺ δὲν ὑποπίπτει στὴν αἰσθητηριακή μας ἐμπειρία, κάτι γιὰ τὸ ὁποῖο δὲν ἔχουμε παρὰ μιὰ ἀρκετὰ ἀτελὴ εἰκόνα. Ὅμως, μέσα στὸ πλαίσιο μιᾶς ἀνεκτῆς ἀπόκλισης, ποὺ καθορίζουν κάθε φορὰ οἱ πρακτικὲς προσεγγιστικές μας ἀνάγκες, ἡ ἀτελὴς αὐτὴς εἰκόνα μπορεῖ νὰ θεωρηθεῖ πὼς «ταυτίζεται» μὲ τὸ ἀκριβὲς ἀρχέτυπό της.

Στὴν περίπτωση τώρα ὅπου ἀκριβῶς μ ι ὰ ἀπὸ τὶς ὑπόψη διακλαδώσεις ἰσχύει στὸν φυσικὸ κόσμο, μιλᾶμε γιὰ τὴ μ ο ν α δ ι κ ὰ ἀ λ η θ ι ν ὴ διακλάδωση καὶ τὸ πρόβλημα εὕρεσής της τὸ λέμε πρόβλημα μ ο ν α δ ι κ ό τ η τ α ς τῆς διακλαδομένης θεωρίας[2]. Ἂν πάλι συμβαίνει αὐτὸ γιὰ περισσότερες ἀπὸ μιὰ διακλαδώσεις, χωρὶς νὰ ὑπάρχει καὶ οὐσιαστικὸς τρόπος διάκρισης ἀνάμεσά τους, τότε ἡ ἐκλογὴ ἀληθινῆς διακλάδωσης εἶναι ζήτημα ἁπλῆς σ ύ μ β α σ η ς ἢ σ υ μ φ ω ν ί α ς. Στὴ θέση τῆς ἐμπειρικὰ διαπιστούμενης μοναδικότητας, τ ῆ ς ἐ μ π ε ι ρ ι κ ό τ η τ α ς, ἀντιπαρατάσσεται τότε ἡ σ υ μ β α τ ι κ ό τ η τ α, ἄποψη κατὰ τὴν ὁποίαν ἀντὶ ἡ ἐμπειρία νὰ εἶναι ἐκείνη ποὺ καθορίζει ποιὰ ἀπὸ τὶς διακλαδώσεις ἰσχύει στὴν πραγματικότητα, ἡ ἐκλογὴ ἀνάμεσά τους νὰ εἶναι ἐκ τῶν προτέρων ἐλεύθερη. Μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν ἡ συμβατικότητα ἐμφανίζεται ὡς ἡ ἀ ν τ ί θ ε σ η τῆς ἐμπειρικότητας, βρίσκεται δηλαδὴ σὲ διαμετρικὰ ἀντίθετη θέση ἀπὸ ἐκείνη τῆς ἐμπειρικότητας.

Ἡ ἄποψη τῆς συμβατικότητας ἔπαιξε ὄχι ἀσήμαντο ρόλο στὴν ἐπι-

---

2. S. Körner, *What is Philosophy*? London, Allen Lane Press, 1969 καὶ σὲ γερμανικὴ μετάφραση μὲ τὸν τίτλο *Grundlagen der Philosophie*, München, Paul List Verlag, 1970, 93.

στήμη τῶν Μαθηματικῶν, ἰδιαίτερα στὴ Γεωμετρία· μάλιστα ὑποστηρίχθηκε καὶ ἀπὸ κορυφαίους ἐρευνητές, ἐκείνους γιὰ τοὺς ὁποίους ἡ διαπίστωση γιὰ τὴν ἰσχὺ μαθηματικῆς θεωρίας στὴν ἐμπειρικὴ πραγματικότητα δὲν εἶναι δυνατὴ μὲ καθαρὰ ἐμπειρικὸ τρόπο. Εἶναι ἀλήθεια, ὅτι ἡ διαλεύκανση μερικῶν λεπτῶν σημείων ποὺ ἐνυπάρχουν, ἐκείνων πρώτιστα ποὺ ἀφοροῦν στὴ διάκριση μεταξὺ καθαρῆς καὶ ἐφαρμοσμένης μαθηματικῆς θεωρίας (§ 5), δείχθηκε ἀπαραίτητη γιὰ τὴ διάλυση τῆς σύγχυσης ποὺ κυριάρχησε σχετικὰ στὸ παρελθόν. Τὴν τελικὴ ὀρθὴ ἀπάντηση στὸ ἐρώτημα «ποιά ἀπὸ τὶς δύο ἀπόψεις, ἐκείνη τῆς ἐμπειρικότητας ἢ τῆς συμβατικότητας, εἶναι ἡ ἐπικρατοῦσα;», δὲν μποροῦσε νὰ τὴ δώσει παρὰ ἡ διαπίστωση τοῦ ποιὸ ἀπὸ τὰ δύο μέρη τοῦ διλήμματος ποὺ ἀκολουθεῖ εἶναι βάσιμο. Τὸ δίλημμα ἔχει ὡς ἑξῆς: Μὲ τὴν ἀπόδοση ἐμπειρικοῦ περιεχομένου στοὺς ἀρχικοὺς ὅρους τῶν διακλαδώσεων καθαρῆς μαθηματικῆς θεωρίας, ἀπόδοση ποὺ μετατρέπει τὰ μαθηματικὰ θεωρήματα σὲ προτάσεις τοῦ φυσικοῦ κόσμου, ἀλλὰ καὶ μὲ τὴ χρησιμοποίηση πειράματος (μέτρησης) πάνω στὰ φυσικὰ αὐτὰ μαθηματικά, εἶναι ἢ ὄχι δυνατὴ ἡ ἐκλογὴ ἐκείνης ἀπὸ τὶς διακλαδώσεις ποὺ τυχὸν ἰσχύει στὴν ἐμπειρικὴ πραγματικότητα;

Ἂς προστεθεῖ, ὅτι ἐναλλακτικὲς διακλαδώσεις παρουσιάζονται καὶ σὲ μαθηματικὲς θεωρίες ποὺ δὲν ἐμφανίζουν ἄμεση σχέση μὲ τὸν ἐμπειρικὸ κόσμο. Γιὰ παράδειγμα, τέτοια θεωρία εἶναι τὸ μέρος τῆς Συνολοθεωρίας ποὺ ἀναφέρεται σὲ σύνολα δυναμικότητας μεγαλύτερης ἀπὸ ἐκείνη τοῦ συνεχοῦς (§ 4). Πρόκειται γιὰ τὶς διακλαδώσεις στὶς ὁποῖες ὁδηγεῖ ἡ λεγόμενη γενικευμένη ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς[3]. Παρόλο ποὺ οἱ δυναμικότητες τοῦ ἀριθμήσιμου (§ 4) καὶ τοῦ συνεχοῦς ἀποτελοῦν ἐξιδανίκευση τῆς ἐμπειρικῆς πραγματικότητας, ὅμως καὶ γιὰ τὸν ἴδιο τὸ δημιουργό τους οἱ δυναμικότητες ἀνώτερης τάξης δὲν ἀνταποκρίνονται παρὰ σὲ μιὰ μεταφυσικὴ πραγματικότητα.

2

Στὴν ἀρχαιότητα οἱ Ἕλληνες φιλόσοφοι καὶ μαθηματικοὶ δὲν ἀντιμετώπιζαν παρόμοιο πρόβλημα μοναδικότητας. Γιατί, ἀπὸ τὸ ἕνα μέρος ὁ Πλάτων ἐπρέσβευε τὴ μὴ ἐμπειρικὴ ἀντίληψη, ὅτι τὰ Μαθηματικὰ ἀπεικονίζουν μιὰν ἀπόλυτη πραγματικότητα, ποὺ ἦταν γι᾽ αὐτὸν ὁ κόσμος τῶν Ἰδεῶν του· ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος ὁ Ἀριστοτέλης (384-322) θεωροῦσε πὼς ἡ δομὴ τοῦ ἐποπτικοῦ χώρου[1] —ποὺ ἀποτελοῦσε γι᾽ αὐτὸν τὸ ἀντικείμενο τῆς Γεωμετρίας— εἶναι ἕνα αἰσθητὸν κοινόν, ποὺ μπορεῖ νὰ

3. D. Martin, *Hilbert's first problem: The continuum hypothesis*, Proceedings of Symposia in pure Mathematics, Vol. 28 (1976) 81-92. Ἐπίσης K. Gödel, *What is Cantor's continuum problem?*, «American Math. Monthly» 54 (1947) 515-525.

περιγραφεῖ μὲ ὀλιγάριθμο πλῆθος ἀπὸ ὅρους καὶ ἀρχές. Στὶς αἰώνιες καὶ ἀπόλυτες ἀλήθειες, ποὺ ἦταν γιὰ τὸν Πλάτωνα οἱ Ἰδέες, περιέχονται τὰ μαθηματικὰ ὄντα ὡς ἀκριβῆ εἴδωλα τῶν Ἰδεῶν. Κατ' αὐτόν, ἡ σπουδὴ τῶν μαθηματικῶν ὄντων ἀποτελεῖ θείαν ἀναγκαιότητα καὶ τοῦτο γιατὶ ἐξοικειώνει τὸν νοῦ μὲ τὴ θέαση τῆς καθαρῆς ἀλήθειας καὶ ὑψώνει τὸν ἄνθρωπο πάνω ἀπὸ τὸν ὑλικὸ κόσμο. Τὰ Μαθηματικὰ εἶναι ἀκριβῶς ἡ γνώση γιὰ τὸ αἰώνιον Ὄν, ὅπως ρητῶς ἀναφέρεται στὸν πλατωνικὸ διάλογο *Πολιτεία*[4]. Ἐξάλλου, γιὰ τὸν Ἀριστοτέλη τὰ Μαθηματικὰ δὲν ἀσχολοῦνται μὲ τὴν ὕλη, ἀλλὰ μὲ τὶς Μορφές, ποὺ μποροῦν ἐννοιολογικὰ νὰ χωρισθοῦν ἀπὸ αὐτήν. Αὐτὰ θεωροῦν σχέσεις καὶ ἰδιότητες ὄχι σχετικὰ μὲ τὸ τί εἶναι πραγματικό, ἀλλὰ μὲ τὸ τί εἶναι δυνατὸ νὰ γίνει[5]. Ἔτσι, λόγου χάρη, οἱ ἄπειρες τὸ πλῆθος διαιρέσεις σ' ἕνα εὐθύγραμμο τμῆμα εἶναι, κατὰ τὸν Ἀριστοτέλη, μόνο δυνατὲς ἐνῶ ἡ ἔννοια τοῦ ἐνεργείᾳ ἀπείρου εἶναι ἔννοια ἀνύπαρκτη[6].

Πολὺ ἀργότερα τὴ μοναδικότητα τῶν (καθαρῶν) Μαθηματικῶν τὴ βάσιζε ὁ G. Leibniz (1646-1716) στὴν ἀρχή, ὅτι ἡ ἐπιστήμη αὐτὴ ἀπορρέει ἀπ' αὐτὴ τὴ Λογική. Μιὰ ἀληθὴς μαθηματικὴ πρόταση (θεώρημα), παράλληλα μὲ ὅ,τι συμβαίνει μὲ μιὰ λογικὴ πρόταση (ἀπόφανση), ἀληθεύει γιατὶ ἡ ἄρνησή της δὲν εἶναι λογικὰ δυνατή, μὲ ἄλλες λέξεις εἶναι ἀντίθετη στὴ λογικὴ ἀρχὴ τῆς ἀντίφασης. Μάλιστα καὶ οἱ ἄλλες λογικὲς ἀρχές, ἡ ἀρχὴ τῆς ταυτότητας καὶ ἡ ἀρχὴ τοῦ ἀποκλειομένου τρίτου, καλύπτονται, κατὰ τὸν Leibniz, ἀπὸ τὴν ἀρχὴ τῆς ἀντίφασης. Ἐξάλλου, ὁ ἴδιος δεχόταν πὼς μιὰ πρόταση ἢ ἀληθεύει σὲ κάθε δυνατὸ κόσμο, ἄρα καὶ στὸν πραγματικό, ἢ ἀληθεύει στὸν πραγματικὸ χωρὶς ἡ ἀλήθειά της νὰ ἰσχύει καὶ σὲ κάθε δυνατὸ κόσμο. Διέκρινε, ἔτσι, τὶς λογικὲς ἀπὸ τὶς πραγματολογικὲς ἀλήθειες[7]. Τὰ μαθηματικὰ θεωρήματα ἀνήκουν λοιπὸν γιὰ τὸν Leibniz στὴν κατηγορία τῶν λογικῶν προτάσεων.

Ἡ μοναδικότητα τῶν Μαθηματικῶν δὲν ἀμφισβητήθηκε φυσικὰ οὔτε

4. *Πολιτεία* 527 B5.

5. Σύμφωνα μὲ τὸν K. Reidemeister, *Das exakte Denken der Griechen*, Darmstadt, Wiss. Buchgesell. 1972, 13: «Γιὰ τὸν Ἀριστοτέλη ὁ πραγματικὸς χῶρος περιέχει τὸν μαθηματικὸ χῶρο κατὰ δυνατότητα ἤ, μὲ ἄλλες λέξεις, ὁ μαθηματικὸς χῶρος περιγράφει ὁρισμένα περιστατικὰ τὰ ὁποῖα περιέχονται στὸν πραγματικὸ κατὰ τὴ δυνατότητα».

6. *Φυσικὰ* 206 a7.

7. Πρόκειται γιὰ τὴ διαφορὰ τῶν ἀναγκαίων καὶ τῶν συμπτωματικῶν ἀληθειῶν. «Ἡ μία, ποὺ τὸ ἀντίθετό της περικλείει ἀντίφαση, εἶναι ἀπολύτως ἀναγκαία... ὅπως εἶναι οἱ ἀλήθειες τῆς Γεωμετρίας· ἡ ἄλλη, δὲν εἶναι ἀναγκαία παρὰ μόνον ἐξ ὑποθέσεως, καὶ θὰ ἔλεγα «κατὰ συμβεβηκός»... ἀφοῦ τὸ ἀντίθετό της δὲν περικλείει ἀντίφαση». Βλ. G. W. Leibniz, *Discours de Métaphysique* (*Die philosophischen Schriften von G. W. Leibniz*, C. J. Gerhardt, Berlin 1875 καὶ σὲ ἑλληνικὴ μετάφραση μὲ σχόλια τοῦ Π. Καϊμάκη, Θεσσαλονίκη, ἐκδ. Ἐγνατία, 1975, 63).

ἀπὸ τὸν πρόδρομο τῶν ἐμπειριστῶν, τὸν D. Hume (1711-1776). Ὡστόσο, ἐνῶ γιὰ τὸν Πλάτωνα καὶ τὸν Leibniz πηγὴ τῶν φιλοσοφικῶν τους ἐμπνεύσεων ἦταν σὲ μεγάλο βαθμὸ τὰ Μαθηματικά, γιὰ τὸν Hume, ὅπως καὶ τὸν Ἀριστοτέλη, οἱ φιλοσοφικές τους θεωρίες προέρχονταν κυρίως ἀπὸ τὶς φυσικὲς ἐπιστῆμες. Κατὰ τὸν Hume, ποὺ πολὺ λίγα πράγματα ἔγραψε γιὰ τὰ Μαθηματικά, οἱ ἀντιλήψεις μας διαιροῦνται σὲ ἐντυπώσεις καὶ σὲ ἰδέες. Ἐντύπωση εἶναι ὅ,τι προσφέρεται στὸ νοῦ, μέσω τῶν αἰσθημάτων καὶ τῶν συναισθημάτων, ἢ ὅ,τι ἀπασχολεῖ τὴ σκέψη καὶ τὸ λογισμό. Ἰδέα εἶναι ἡ ἀντίληψη ποὺ ἔχουμε, ὅταν συλλογιζόμαστε γιὰ κάτι «ἐν ἀπουσία» του. Ἔτσι, ἐντυπώσεις εἶναι οἱ ἰσχυρὲς καὶ ἰδέες οἱ ἀσθενεῖς ἀντιλήψεις. Οἱ ἰδέες παράγονται ἀπὸ τὶς ἐντυπώσεις· κανεὶς δὲν μπορεῖ νὰ σκεφθεῖ γιὰ κάτι ποὺ δὲν ἔχει δεῖ ἔξω του ἢ ποὺ δὲν ἔχει αἰσθανθεῖ μέσα του. Κάθε ἰδέα φανερώνεται πρῶτα σὲ ἀντίστοιχη ἐντύπωση. Οἱ ἐντυπώσεις εἶναι τόσο σαφεῖς καὶ φανερές, ὥστε νὰ μὴν ἐπιδέχονται ἀμφισβήτητη, ἐνῶ πολλὲς ἀπὸ τὶς ἰδέες εἶναι τόσο σκοτεινές, ὥστε νὰ μὴν εἶναι δυνατὸν οὔτε μὲ τὸν νοῦν, ὅπου μορφώνονται, νὰ πεῖ κανεὶς μὲ ἀκρίβεια γιὰ τὴ φύση καὶ σύνθεσή τους. Κατὰ ταῦτα, ὅταν μιὰ ἰδέα εἶναι ἀμφιλεγόμενη, καταφεύγει κανεὶς στὴν ἐντύπωση ποὺ τὴν κάνει σαφὴ καὶ ἀκριβή[8].

Παράλληλα μὲ τὸν Leibniz καὶ ὁ Hume χωρίζει τὶς προτάσεις σὲ ἀναλυτικὲς καὶ πραγματολογικές, καὶ δέχεται ὅτι οἱ ἀληθεῖς μαθηματικὲς προτάσεις, τὰ θεωρήματα, ἀνήκουν στὴν πρώτη κατηγορία. Κατ᾽ αὐτόν, a priori ἀληθεῖς ἀποφάνσεις εἶναι μόνον ἐκεῖνες ποὺ ἀναφέρονται σὲ λογικοεννοιολογικὲς σχέσεις, δηλαδὴ σὲ ἀναλυτικὲς προτάσεις.

Ἀλλὰ καὶ ὁ I. Kant (1724-1804) ἦταν ὀπαδὸς τῆς μοναδικότητας τῶν Μαθηματικῶν. Ὡς γνωστό, γιὰ τὸν Kant ἡ μαθηματικὴ γνώση δὲν εἶναι μόνον ἀποτέλεσμα λογικῆς διεργασίας, ἀλλ᾽ εἶναι καὶ ἀποτέλεσμα μιᾶς διυποκειμενικῆς ἱκανότητας τοῦ ἀνθρώπου σχετικὰ μὲ τὴ θεώρηση τοῦ χώρου καὶ τοῦ χρόνου — ἱκανότητας ποὺ λέμε συνήθως ἐνόραση. Γιὰ τὸν Kant, χῶρος καὶ χρόνος εἶναι καθαρές, μὴ ἐμπειρικές, μορφὲς ποὺ ἐνυπάρχουν a priori στὸ νοῦ ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὴν ἐμπειρία. Ἔτσι, μιὰ πρωταρχικὴ γεωμετρικὴ ἀλήθεια ὅτι, λόγου χάρη, ἡ εὐθεία γραμμὴ εἶναι ὁ συντομότερος δρόμος ἀνάμεσα σὲ δύο σημεῖα, πηγάζει ἀπὸ μιὰν a priori κρίση τῆς νόησης καὶ πρέπει γι᾽ αὐτὸ νὰ γίνεται ἀποδεκτὴ χωρὶς ἀπόδειξη. Τέτοιες μαθηματικὲς ἀλήθειες εἶναι καὶ ὅλα τὰ ἀξιώματα τῶν *Στοιχείων* τοῦ Εὐκλείδου.

Κατὰ τὸν Kant τὰ μαθηματικὰ θεωρήματα, σὲ ἀντιδιαστολὴ πρὸς τὶς

8. D. Hume, *Treatise of Human Nature*, New York, Washington Square Press, 1969, 14-15.

λογικὲς ἀποφάνσεις ποὺ εἶναι ἀναλυτικές[9], ἀνήκουν στὶς μὴ ἀναλυτικές, δηλαδὴ στὶς συνθετικὲς προτάσεις. Οἱ συνθετικὲς προτάσεις διακρίνονται πάλι σὲ ἐμπειρικές, ἀλλιῶς a posteriori, καὶ σὲ μὴ ἐμπειρικές, ἀλλιῶς a priori[10]. Ἀλλὰ καὶ οἱ τελευταῖες προτάσεις χωρίζονται στὶς ἐνορατικὲς καὶ στὶς μὴ ἐνορατικές. Τὰ μαθηματικὰ ἀξιώματα εἶναι ἀκριβῶς ἐκεῖνες οἱ συνθετικὲς προτάσεις ποὺ εἶναι μαζὶ a priori καὶ ἐνορατικές· γιατί, ἐνῶ ἡ ὕλη τῶν ἀντικειμένων γίνεται αἰσθητὴ ἀπὸ τὴν ἐμπειρία, τὴ μορφή της τὴ συλλαμβάνουμε μὲ τὴν ἐνόραση, μακρυὰ ἀπὸ κάθε αἰσθητηριακὴ ἐμπειρία.

3

Ὕστερα ἀπὸ ὁλόκληρους αἰῶνες ἀκλόνητης πίστης στὴ μοναδικότητα τῆς Γεωμετρίας, τὸ πρῶτο πλῆγμα ποὺ δέχθηκε ἡ πίστη αὐτὴ προῆλθε ἀπὸ τὴν ἐπινόηση, στὸ πρῶτο μισὸ τοῦ περασμένου αἰώνα, καὶ ἄλλων Γεωμετριῶν ἐκτὸς ἀπὸ τὴν Εὐκλείδεια ὡς καὶ ἀπὸ τὴν ἐφαρμογὴ αὐτῶν, ἕνα περίπου αἰώνα ἀργότερα, στὸ φυσικὸ κόσμο. Ἡ ἐπινόηση αὐτὴ ἔλαβε ἀφορμὴ ἀπὸ τὶς μακρὲς καὶ ἄκαρπες προσπάθειες γιὰ τὴν ἀπόδειξη τοῦ πέμπτου αἰτήματος τῶν *Στοιχείων* τοῦ Εὐκλείδου. Τὸ αἴτημα αὐτὸ διατείνεται ὅτι ἐὰν εἰς δύο εὐθείας ἐμπίπτουσα εὐθεῖα τὰς ἐντὸς καὶ ἐπὶ τὰ αὐτὰ μέρη γωνίας δύο ὀρθῶν ἐλάσσονας ποιῇ, ἐκβαλλομένας τὰς δύο εὐθείας ἐπ' ἄπειρον συμπίπτειν, ἐφ' ἃ μέρη εἰσὶν αἱ τῶν δύο ὀρθῶν ἐλάσσονες.

Ὅλες οἱ προσπάθειες τῶν ἐρευνητῶν γιὰ νὰ συμπεράνουν τὸ ἐν λόγῳ αἴτημα ἀπὸ τ' ἄλλα ἀξιώματα τῶν *Στοιχείων* —προσπάθειες δύο περίπου χιλιετιῶν— κατέληγαν πάντοτε στὴν ἀντικατάσταση τοῦ αἰτήματος αὐτοῦ μὲ ἄλλο ἰσοδύναμο αἴτημα. Μιὰ τέτοια ἰσοδύναμη μὲ τὸ πέμπτο αἴτημα πρόταση εἶναι, λόγου χάρη, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν εὐθύγραμμου τριγώνου ἰσοῦται μὲ δύο ὀρθὲς γωνίες.

Ἡ ἀντικατάσταση τώρα τῆς τελευταίας αὐτῆς πρότασης μὲ τὴν πρόταση, ὅτι τὸ ἐν λόγῳ ἄθροισμα δὲν εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ δύο ὀρθές, ἄνοιξε

9. Ὁ Kant στὴν *Κριτικὴ τοῦ καθαροῦ Λόγου* (Εἰσαγωγὴ παράγρ. 4 καὶ 5) γράφει, ὅτι ἀναλυτικὴ (ἁπλή) κρίση εἶναι ἐκείνη, ὅπου τὸ κατηγόρημα ἀνήκει στὸ ὑποκείμενο ὡς κάτι ποὺ καλύπτεται (ἐννοιολογικά) ἀπὸ τὴν ἔννοια τοῦ ὑποκειμένου.

10. Τὴν ἀναγνώρισή του, ἀναφορικὰ μὲ τὴ διάκριση ποὺ ἔκανε ὁ Kant τῶν προτάσεων (κρίσεων) σὲ ἀναλυτικὲς καὶ συνθετικές, ἐκφράζει ὁ G. Frege (1848-1925) ὡς ἑξῆς: «Μὲ τὸ νὰ ὁρίσει ὁ Kant τὶς γεωμετρικὲς ἀλήθειες ὡς συνθετικὲς a priori, ἀπεκάλυψε τὴν ἀληθινή τους οὐσία. Ἂν αὐτὸς πλανήθηκε σχετικὰ μὲ τὴν Ἀριθμητική, τοῦτο δὲν ἀναιρεῖ, νομίζω, τίποτε ἀπὸ τὴν ἀξία του. Ὅ,τι ἐνδιαφέρει αὐτὸν εἶναι, πῶς πρέπει νὰ ὑπάρχουν συνθετικὲς a priori κρίσεις· τὸ ἂν αὐτὲς παρουσιάζονται μόνο στὴ Γεωμετρία ἢ καὶ στὴν Ἀριθμητική, εἶναι ζήτημα ποὺ ἔχει μικρὴ σημασία. Βλ. τὸ ἔργο τοῦ G. Frege, *Grundlagen der Arithmetik*, Breslau 1884, 67-104 καὶ 115-119.

γιὰ πρώτη φορὰ τὸ δρόμο γιὰ τὴ λύση τοῦ ὑπὸ συζήτηση προβλήματος, λύση ποὺ κατορθώθηκε μὲ τὸν ἀκόλουθο τρόπο: Μὲ τὴν παραδοχὴ ὅτι τὸ ὑπόψη ἄθροισμα δὲν εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ δύο ὀρθές, δύο περιπτώσεις εἶναι δυνατές· ἢ τὸ ἄθροισμα αὐτὸ νὰ εἶναι ἴσο ἢ νὰ εἶναι μικρότερο ἀπὸ δύο ὀρθές. Παρατηρήθηκε ὅμως, ὅτι ὁποιαδήποτε ἀπὸ τὶς δύο δυνατότητες καὶ ἂν πάρει κανεὶς ὡς αἴτημα, μαζὶ καὶ μὲ τ' ἄλλα ἀξιώματα τῶν *Στοιχείων*, δὲν ὁδηγεῖται σὲ ἀντιφάσεις, σὲ τρόπο ὥστε νὰ προκύπτουν δύο ἐξίσου παραδεκτὲς Γεωμετρίες, ἡ μία τῶν ὁποίων εἶναι φυσικὰ ἡ Εὐκλείδεια (Παραβολική) καὶ ἡ ἄλλη εἶναι ἡ λεγόμενη Ὑπερβολικὴ Γεωμετρία.

Ἀκριβῶς τὸν δρόμον αὐτὸν ἀκολούθησε ὁ Ν. Lobatschewski (1793-1856), καὶ ἡ δημοσίευση τῆς σχετικῆς ἐργασίας του χρονολογεῖται τὸ 1829[11]. Ἡ ὀνομασία ποὺ ὁ ἴδιος ἔδωκε στὴ νέα του ἐπινόηση ἦταν **Φανταστικὴ Γεωμετρία**. Μετὰ τρία χρόνια δημοσιεύθηκαν καὶ οἱ ἔρευνες τοῦ J. Bolyai (1802-1860), ποὺ ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὸν Lobatschewski ἔφθασε νωρίτερα στὸ αὐτὸ ἀποτέλεσμα. Ὡστόσο, ὁ πρίγκηψ τῶν μαθηματικῶν, ὁ C. F. Gauss (1777-1853), εἶχε συλλάβει ἤδη ἀπὸ τὸ 1792 τὴν ἰδέα μιᾶς νέας Γεωμετρίας, ὡς συνάγεται τοῦτο ἀπὸ τὴ διασωθεῖσα ἀλληλογραφία του μὲ τὸν ἀστρονόμο F. W. Bessel (1784-1846), δὲν δημοσίευσε ὅμως τίποτε σχετικὰ φοβούμενος, ὡς ἔλεγε, τὶς φωνασκίες τῶν Βοιωτῶν[12].

Λίγο ἀργότερα, ὁ B. Riemann (1826-1866) παρατήρησε ὅτι, ἂν ἀναχωρήσει κανεὶς ἀπὸ τὸ αἴτημα, ὅτι τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν (εὐθύγραμμου) τριγώνου εἶναι μεγαλύτερο ἀπὸ δύο ὀρθὲς καί, ἂν τροποποιήσει κατάλληλα τὰ λεγόμενα ἀξιώματα διατάξεως (σύμφωνα μὲ ὁρισμένη Ἀξιωματικὴ τῶν *Στοιχείων*), ἔτσι ὥστε οἱ εὐθεῖες νὰ εἶναι κλειστὲς γραμμές, τότε φθάνει σὲ ἄλλη μὴ Εὐκλείδεια Γεωμετρία ποὺ φέρει τὸ ὄνομα Σφαιρικὴ Γεωμετρία[13].

Ἀναφορικὰ μὲ τὸ ἐρώτημα, ἂν στὶς νέες αὐτὲς Γεωμετρίες δὲν συναντᾶ κανεὶς ἀντιφατικὲς προτάσεις, ὅσο κι ἂν προχωρήσει στὴν παραγωγὴ προτάσεων σ' αὐτές, τὸ ἐρώτημα δηλαδὴ κατὰ πόσο οἱ νέες Γεωμετρίες εἶναι συμβιβαστές, αὐτὸ διερευνήθηκε κάπως ἀργότερα, τὸ 1871, ἀπὸ τὸν

11. Ἡ ἐργασία τοῦ Lobatschewski, γραμμένη στὰ ρωσσικά, ἔχει τίτλο «Γιὰ τὰ Θεμέλια τῆς Γεωμετρίας» καὶ ὑποβλήθηκε στὸ Πανεπιστήμιο τοῦ Καζὰν τὸν Φεβρουάριο τοῦ 1826. Ἡ ἀργοπορία γιὰ τὴ δημοσίευσή της (1829) ὀφείλεται στὸ γεγονός, ὅτι ἔπρεπε προηγουμένως νὰ ἐγκριθεῖ ἀπὸ τὴν ἁρμόδια Σχολὴ τοῦ ὡς ἄνω Πανεπιστημίου.

12. Φ. Βασιλείου, *Ἐπὶ τῆς Οὐσίας τῶν Μαθηματικῶν*, Ἀθῆναι 1965, 76-82.

13. Μιὰ δεύτερη Σφαιρικὴ Γεωμετρία παίρνει κανεὶς ἂν θεωρήσει, ὅτι τὰ δύο σημεῖα ὅπου κόβουνται οἱ εὐθεῖες Riemann ταυτίζονται καὶ ὅτι κάθε εὐθεία μὲ μὴ ἄπειρο μῆκος δὲν χωρίζει τὸ ἐπίπεδο ὅπου κεῖται σὲ δύο χωριστὰ μέρη. Καὶ στὰ δύο εἴδη Γεωμετριῶν, τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν (εὐθύγραμμου) τριγώνου εἶναι μεγαλύτερο τῶν δύο ὀρθῶν καὶ ἀπὸ σημεῖο ἔξω ἀπὸ εὐθεία δὲν ὑπάρχει εὐθεία παράλληλη πρὸς αὐτήν.

F. Klein (1849-1925). Ἡ σχετικὴ ἔρευνα κατέδειξε ὅτι, ἂν οἱ μὴ Εὐκλείδειες Γεωμετρίες παρουσίαζαν ποτὲ ἀντίφαση, τότε ἀνάλογη ἀντίφαση θὰ ἔπρεπε νὰ παρουσιασθεῖ καὶ στὴν Εὐκλείδεια Γεωμετρία· καὶ τοῦτο γιατί, ὅπως ἀποδείχθηκε, κάθε ἀξίωμα τῶν νέων Γεωμετριῶν μετατρέπεται σὲ θεώρημα τῆς Εὐκλείδειας Γεωμετρίας, ἀρκεῖ νὰ ἑρμηνεύσει κανεὶς κατάλληλα τοὺς ἀρχικοὺς ὅρους τῶν Γεωμετριῶν ἐκείνων (βλ. καὶ τὴν § 5). Ἔτσι, οἱ νέες Γεωμετρίες εἶναι συμβιβαστὲς ἐφόσον συμβιβαστὴ εἶναι καὶ ἡ Εὐκλείδεια.

Γιὰ τὴν ἔρευνα τέλος τοῦ συμβιβαστοῦ τῆς Εὐκλείδειας Γεωμετρίας χρειάσθηκε πρῶτα ἡ αὐστηρὴ ἀξιωματικὴ ἵδρυσή της, ἀπαλλαγμένη ἀπὸ τὰ κενὰ καὶ τὶς ἀτέλειες ποὺ παρουσιάζουν τὰ *Στοιχεῖα*, πράγμα ποὺ ἐπιτεύχθηκε ἀπὸ τὸν D. Hilbert (1862-1943) στὶς ἀρχὲς τοῦ αἰώνα μας. Ἔπειτα μετατοπίσθηκε ἀπὸ τὸν ἴδιο τὸ συμβιβαστὸ τῆς ἀξιωματικῆς τῆς Εὐκλείδειας Γεωμετρίας στὸ ἀντίστοιχο πρόβλημα συμβιβαστοῦ γιὰ κατάλληλη περιοχὴ πραγματικῶν ἀριθμῶν, περιοχὴ ὅπου ἰσχύουν σχέσεις μεταξὺ τῶν στοιχείων της ἀνάλογες μ' ἐκεῖνες τῶν γεωμετρικῶν ἀξιωμάτων. Μὲ τὴν τελευταία ὅμως αὐτὴ ἀναγωγή, τὸ πρόβλημα τοῦ συμβιβαστοῦ τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, ἄλυτο μέχρι σήμερα στὴν ὁλότητά του, ἀποτελεῖ μιὰν ἀπὸ τὶς κύριες ἐπιδιώξεις τῆς σύγχρονης ἔρευνας γιὰ τὴ Θεμελίωση τῶν Μαθηματικῶν, ἔρευνας ποὺ συνεχίζεται ἀκόμη.

Ἐκτὸς ἀπὸ τὴν ἀξιωματικὴ προσπέλαση τῆς Γεωμετρίας, ποὺ ἐκθέσαμε ἐν συντομίᾳ, ὑπάρχουν καὶ ἄλλοι γενικότεροι τρόποι προσπέλασης. Ἕνας ἀπ' αὐτοὺς εἶναι ἡ λεγόμενη μετρική, ὀφειλόμενη στὸν F. Klein, ποὺ ἐπιτρέπει τὴν ἔνταξη σὲ μιὰ Γενικὴ Γεωμετρία τόσο τῆς Εὐκλείδειας ὅσο καὶ τῶν μὴ Εὐκλείδειων Γεωμετριῶν, μὲ κατάλληλη εἰσαγωγὴ μέτρου ἢ ἀπόστασης γιὰ κάθε ζεῦγος σημείων. Ἡ γενικὴ αὐτὴ Γεωμετρία δὲν εἶναι ἄλλο ἀπὸ τὴ γνωστὴ ὡς Προβολικὴ Γεωμετρία.

Ἀλλὰ καὶ ὁ ἴδιος ὁ Klein ἦταν εἰσηγητὴς μιᾶς γενικῆς ἀρχῆς —τοῦ γνωστοῦ ὡς προγράμματος Erlangen— στὴν ὁποίαν ἐντάσσονται οἱ πιὸ πάνω ἐξετασθεῖσες Γεωμετρίες. Πρόκειται γιὰ τὸ σύνολο τῶν ἰδιοτήτων γεωμετρικῶν σχημάτων ποὺ μένουν ἀναλλοίωτα σχετικὰ μὲ κατάλληλη ὁμάδα μετασχηματισμῶν, τὴ λεγόμενη ὁμάδα τῆς Γεωμετρίας. Μὲ ἀνάλογο τρόπο ὁρίζεται καὶ ὁ χῶρος τοῦ Klein ὡς τὸ σημειοσύνολο μέσα στὸ ὁποῖο δίνεται ὁμάδα μετασχηματισμῶν, μὲ στοιχεῖα τὶς ἀμφιμονοσήμαντες ἀπεικονίσεις[14] σὲ ἑαυτὸ

---

14. Ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία δύο συνόλων σημαίνει: Σὲ κάθε στοιχεῖο (ἀρχέτυπο) τοῦ ἑνὸς συνόλου ἀντιστοιχεῖ (κατὰ τὴν ὑπόψη ἀντιστοιχία) μονοσήμαντα στοιχεῖο (εἰκόνα) τοῦ ἄλλου συνόλου, σὲ τρόπο ὥστε σὲ διαφορετικὰ ἀρχέτυπα ν' ἀντιστοιχοῦν διαφορετικὲς εἰκόνες καὶ κάθε στοιχεῖο τοῦ τελευταίου συνόλου νὰ εἶναι εἰκόνα κάποιου ἀρχέτυπου.

τοῦ θεωρούμενου σημειοσυνόλου. Παραδείγματα ἔχουμε τοὺς ἀκόλουθους χώρους Klein: τὸν Εὐκλείδειο (ἢ Παραβολικό), τὸν Ὑπερβολικό, τὸν Σφαιρικό, τὸν Ψευδοσφαιρικὸ καὶ τὸν Ἐλλειπτικό.

Τὴν ὁμάδα μετασχηματισμῶν τοῦ Προβολικοῦ χώρου Klein ἀποτελοῦν οἱ μετασχηματισμοὶ ποὺ ἀπεικονίζουν ἐπίπεδο σχῆμα πάλι σὲ ἐπίπεδο, μὲ προβολὴ ἀπὸ σταθερὸ σημεῖο, τὸ κ έ ν τ ρ ο τῆς προβολῆς.

4

Ἀνάλογη μὲ τὸ Εὐκλείδειο αἴτημα τῶν παραλλήλων εἶναι, ὅπως ἀναφέραμε, καὶ ἡ ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς τοῦ G. Cantor (§ 1). Γιὰ τὴ διατύπωση τῆς ὑπόθεσης (ἢ εἰκασίας) αὐτῆς εἶναι ἀνάγκη νὰ προτάξει κανεὶς τὴν ἔννοια τῆς δ υ ν α μ ι κ ό τ η τ α ς ἢ τοῦ π λ η θ ι κ ο ῦ ἀ ρ ι θ μ ο ῦ γιὰ ἕνα ὁποιοδήποτε σύνολο· ἀλλὰ καὶ οἱ ἔννοιες αὐτὲς βασίζονται πάλι στὴν ἔννοια τῆς ἰ σ ο δ υ ν α μ ί α ς. Δύο σύνολα τὰ λέμε ἰσοδύναμα, ὅταν μπορεῖ νὰ βρεθεῖ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοιχία μεταξὺ τῶν στοιχείων τους (§ 3). Ὡς δυναμικότητα ἢ πληθικὸς ἀριθμὸς ὁρίζεται ἡ κλάση τῶν μεταξύ τους ἰσοδυνάμων συνόλων. Εἰδικότερα, ἀ ρ ι θ μ ή σ ι μ ο λέγεται κάθε σύνολο ποὺ ἔχει τὴ δυναμικότητα τοῦ συνόλου τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν (ἀκεραίων καὶ θετικῶν) καὶ σ υ ν ε χ ὲ ς λέγεται ἕνα σύνολο ποὺ ἔχει τὴ δυναμικότητα τοῦ συνόλου ὅλων τῶν πραγματικῶν ἀριθμῶν, δυναμικότητα ποὺ διαφέρει, ὡς ἀποδεικνύεται, ἀπὸ ἐκείνη τοῦ ἀριθμήσιμου.

Ἡ σύγκριση τῶν πληθικῶν ἀριθμῶν, ποὺ γίνεται μὲ πρόδηλο τρόπο[15], ὁδηγεῖ στὶς ἔννοιες τοῦ μ ι κ ρ ό τ ε ρ ο υ ἢ τοῦ μ ε γ α λ ύ τ ε ρ ο υ ἀνάμεσα σὲ δύο πληθικούς. Ἀποδεικνύεται, ὅτι γιὰ κάθε σύνολο ὑπάρχει ἄλλο μεγαλύτερου πληθικοῦ ἀριθμοῦ καὶ ὅτι ἀπὸ δύο διαφορετικοὺς πληθικοὺς ὁ ἕνας εἶναι πάντοτε μεγαλύτερος ἀπὸ τὸν ἄλλον.

Ἕνα τώρα πρόβλημα ποὺ ἄμεσα γεννιέται εἶναι τὸ ἀκόλουθο: Ὑ π ά ρ χ ε ι π λ η θ ι κ ὸ ς μ ε γ α λ ύ τ ε ρ ο ς ἀ π ὸ ἐ κ ε ῖ ν ο ν τ ο ῦ ἀ ρ ι θ μ ή σ ι μ ο υ κ α ὶ μ ι κ ρ ό τ ε ρ ο ς ἀ π ὸ ἐ κ ε ῖ ν ο ν τ ο ῦ σ υ ν ε χ ο ῦ ς;

Ὁ δημιουργὸς τῆς Συνολοθεωρίας ἐξέφρασε, τὸ 1884, τὴν εἰκασία —καὶ αὐτὴ ἀποτελεῖ τὴν ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς— ὅτι τέτοιος πληθικός, τὴν ὕπαρξη τοῦ ὁποίου ζητᾶ ἡ πιὸ πάνω ἐρώτηση, εἶναι ἀδύνατο νὰ ὑπάρχει. Μάλιστα, γιὰ τὴν ἀπόδειξη τῆς εἰκασίας του αὐτῆς ὁ Cantor κατέβαλε μακρὲς κι ἐπίμονες προσπάθειες ποὺ τὸν ἔφεραν στὸ χεῖλος τῆς κατάρρευσης, ἀλλὰ ποὺ εἶχαν μείνει ὅλες χωρὶς θετικὸ ἀποτέλεσμα.

Ὡστόσο, ἐνῶ ἡ ἀπόδειξη, ὅτι τὸ αἴτημα τῶν παραλλήλων δὲν συνάγεται ἀπὸ τ' ἄλλα ἀξιώματα τῶν *Στοιχείων*, χρειάσθηκε δύο καὶ πλέον χι-

15. A. Fraenkel, *Einleitung in die Mengenlehre*, Berlin, Springer (Grundlehre d. math. Wiss., Bd. 9) 1928³, 76.

λιετίες, ἡ ἀντίστοιχη ἀπόδειξη γιὰ τὴν ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς, στὸ σύστημα ἀξιωμάτων τῶν E. Zermelo (1871-1953) καὶ A. Fraenkel (1891-1967), ἐπιτεύχθηκε σὲ χρόνο λιγότερο ἀπὸ μία ἑκατονταετία. Ἀποδείχθηκε δηλαδή, τὸ 1963, ἀπὸ τὸν P. J. Cohen[16] ὅτι ἡ ἄρνηση τῆς ὑπόθεσης τοῦ συνεχοῦς (καὶ μάλιστα τῆς γενικευμένης[17]) εἶναι συμβιβαστὴ μὲ τὰ λοιπὰ ἀξιώματα ποὺ χρησιμοποιοῦνται γιὰ τὴν ἀξιωματικοποίηση τῆς Συνολοθεωρίας. Ὅτι, συνεπῶς, ἡ ἐν λόγω ὑπόθεση ἀποτελεῖ πρόταση (αἴτημα) ἀνεξάρτητη ἀπὸ τ' ἀξιώματα ἐκεῖνα —σὲ τέλεια ἀναλογία μὲ ὅ,τι συνέβη προτήτερα μὲ τὴν ἄρνηση τοῦ Εὐκλείδειου αἰτήματος τῶν παραλλήλων.

Ἐκεῖνο ποὺ μᾶς ἐνδιαφέρει ἐδῶ εἶναι, ὅτι μὲ τὴν ἀπόδειξη τοῦ Cohen ὁδηγεῖται κανεὶς σὲ διακλαδώσεις τῆς Συνολοθεωρίας —στὶς λεγόμενες μὴ καντοριανὲς Συνολοθεωρίες— ὅπως νωρίτερα, μὲ τὶς ἀποδείξεις τῶν Gauss, Lobatschewski, Bolyai, ὁδηγηθήκαμε στὶς μὴ Εὐκλείδειες Γεωμετρίες.

Ἂς σημειωθεῖ, ὅτι θὰ μποροῦσε κανεὶς νὰ σκεφθεῖ νὰ περιλάβει τὴν ὑπόθεση τοῦ συνεχοῦς μαζὶ μὲ τ' ἄλλα ἀξιώματα τῆς Συνολοθεωρίας. Καὶ τότε, σύμφωνα μ' ἕνα περίφημο θεώρημα τοῦ K. Goedel (1906-1978;), τὸ συμπληρωμένο σύστημα ἀξιωμάτων, ἐφόσον εἶναι συμβιβαστό, δὲν μπορεῖ νὰ εἶναι πλῆρες μὲ τὸ νόημα, ὅτι καὶ πάλι θὰ ὑπάρχουν προτάσεις τῆς Συνολοθεωρίας ποὺ μαζὶ μὲ τὴν ἄρνησή τους δὲν θὰ εἶναι ἀποδείξιμες. Ὕστερα ἀπὸ αὐτὰ ἡ ἀξιωματικοποίηση τοῦ συνόλου ὅλων τῶν ἀληθῶν συνολοθεωρητικῶν προτάσεων εἶναι κάτι τὸ ἀνέφικτο.

5

Ὅπως τονίσαμε καὶ στὴν § 3, ἡ ἐπινόηση τῶν μὴ Εὐκλείδειων Γεωμετριῶν γένηκε ἀφορμὴ γιὰ τὴν αὐστηρὴ ἀξιωματικὴ ἵδρυση τῆς Εὐκλείδειας Γεωμετρίας καθώς, γενικότερα, καὶ πολλῶν ἄλλων μαθηματικῶν κλάδων. Ἰδιαίτερα, ἕνα πλῆρες σύστημα ἀξιωμάτων τῶν *Στοιχείων* δόθηκε τὸ 1902 ἀπὸ τὸν D. Hilbert[18]. Κατὰ τὴν Ἀξιωματικὴν αὐτήν, οὔτε οἱ ἀρχικοὶ ὅροι (ἔννοιες) δίνονται ἐκφρασμένα μὲ (ἄμεσους) ὁρισμούς, οὔτε οἱ μεταξὺ τῶν ὅρων αὐτῶν σχέσεις θεωροῦνται ὡς προφανεῖς. Τ' ἀξιώματα εἶναι ἐκεῖνα ἀκριβῶς ποὺ χρησιμεύουν ὡς ἔμμεσοι ὁρισμοὶ τῶν ἀρχικῶν ὅρων καὶ ἀποτελοῦν προτάσεις καθόλα ἰσότιμες μὲ τὶς παράγωγες προτάσεις, τὰ θεωρήματα, εἶναι ὡστόσο προτάσεις ἱκανὲς γιὰ τὴν παραγωγὴ τῶν θεωρημάτων αὐτῶν.

Μὲ τὴ σημερινὴ ἐξέλιξη τῆς Ἀξιωματικῆς, θὰ μποροῦσε νὰ περιγρά-

16. P. J. Cohen, *The independence of the continuum hypothesis*, Parts I, II, Proc. Nat. Acad. Sc. U.S.A. 50 (1963) 1143-1148, 51 (1964) 105-110.

17. Βλ. Σημείωση 1.

18. D. Hilbert, *Die Grundlagen der Geometrie*, Leipzig-Berlin, B. G. Teubner, 1930[7].

ψει κανεὶς τὸν καθαρὸν αὐτὸ τρόπο ἀξιωματικοποίησης, γιὰ μιὰν ἐκ τῶν προτέρων ἐνορατικὰ διδόμενη θεωρία, ὡς ἑξῆς: Ἀναχωρεῖ κανεὶς ἀπὸ ὁρισμένα σύμβολα χρησιμοποιούμενα στὴ θέση τῶν σημείων, εὐθειῶν, ἐπιπέδων ὡς καὶ στὴ θέση τῶν ἀνάμεσά τους σχέσεων, δηλαδὴ τῶν σχέσεων ἐπίπτωσης, μεταξὺ καὶ σύμπτωσης. Ἐπίσης ἀναχωρεῖ ἀπὸ συμβολικὲς προτάσεις, ποὺ ἀποτελοῦν κατὰ κάποιο τρόπο μετάφραση τῶν θεμελιωδῶν ἰδιοτήτων τῶν ἀρχικῶν ἐννοιῶν τῆς ἐνορατικὰ διδόμενης θεωρίας στὴ γλώσσα ποὺ μορφώνεται ἀπὸ τὰ ἄνω σύμβολα μαζὶ μὲ τὴ Λογικὴ καὶ μὲ ὁρισμένες γενικὲς ἔννοιες τῆς Συνολοθεωρίας. Οἱ συμβολικὲς αὐτὲς προτάσεις εἶναι τὰ ἀξιώματα τῆς ἀξιωματικοποιημένης θεωρίας.

Ὡς ἀπόδειξη ὁρίζουμε μιὰ πεπερασμένη διαδοχὴ ἀπὸ προτάσεις, ὅταν κάθε πρόταση τῆς διαδοχῆς ἢ εἶναι ἀξίωμα ἢ συμπεραίνεται λογικὰ ἀπὸ μιὰ ἢ περισσότερες προηγούμενες προτάσεις. Θεώρημα εἶναι ἡ τελευταία πρόταση μιᾶς ἀπόδειξης.

Μιὰ μὲ τὸν τρόπον αὐτὸν ἀξιωματικοποιημένη θεωρία, ὡς στερημένη σημασίας, λέγεται καθαρὴ θεωρία. Τόσο τ' ἀξιώματά της, ὅσο καὶ οἱ παράγωγές της προτάσεις, δὲν εἶναι οὔτε ἀληθεῖς, οὔτε ψευδεῖς.

Ἑρμηνεία μιᾶς καθαρῆς θεωρίας (ἀλλιῶς, ἑνὸς καθαροῦ συστήματος ἀξιωμάτων), λέμε τὸ ἀποτέλεσμα τῆς ἀντικατάστασης τῶν ἀρχικῶν ὅρων τῆς θεωρίας τοῦ συστήματος, δηλαδὴ τῶν συμβόλων, μὲ μὴ ἐμπειρικὰ ἀντικείμενα, ὅταν μὲ τὴν ἀντικατάσταση αὐτὴ ἐπαληθεύονται οἱ σχέσεις ποὺ διατυπώνουν τ' ἀξιώματα. Γιὰ ἐφαρμογὴ μιλᾶμε στὴν περίπτωση ὅπου στὸν ἄνω ὁρισμὸ ἑρμηνείας στὴ θέση τοῦ «μὴ ἐμπειρικὰ» θέτουμε τὴ λέξη ἐμπειρικά.

Μὲ τὴν ἐφαρμογή, μιὰ καθαρὴ θεωρία γίνεται ἐφαρμοσμένη. Ἡ ἀντίστοιχη καθαρὴ μιᾶς ἐφαρμοσμένης λέγεται ἐφαρμόσιμη θεωρία. Ὥστε, ἐφαρμόσιμη καθαρὴ Γεωμετρία εἶναι ἐκείνη ποὺ ἰσχύει στὴν ἐμπειρικὴ πραγματικότητα.

Ἐξάλλου, σχετικὰ μὲ τὸ πεδίο ἐφαρμογῆς καθαρῆς Γεωμετρίας, τοῦτο δὲν περιορίζεται στὸν ἐποπτικὸ χῶρο, ἀλλὰ περιέχει καὶ ὅ,τι ἀπὸ τὴν ἐμπειρία μπορεῖ ν' ἀντικαταστήσει τοὺς ἀρχικοὺς ὅρους τῆς καθαρῆς Γεωμετρίας. Ἔτσι, κατὰ τὴν ἐφαρμογὴ καθαρῆς Γεωμετρίας στὸ σύστημα χώρου-χρόνου, σὲ σημεῖο τῆς καθαρῆς Γεωμετρίας ἀντιστοιχεῖ ὁ στιγμιαῖος προσδιορισμὸς ἐμπειρικοῦ συμβάντος, καὶ σὲ γραμμὴ ἀντιστοιχεῖ ἡ κοσμικὴ γραμμή, ἀποτελούμενη ἀπὸ τὶς συνεχεῖς μεταβολὲς τῆς θέσης τοῦ συμβάντος.

Ὡς γνωστό, ὁ H. Minkowski (1864-1909) πρότεινε ὅπως τὴν ὁλότητα τῶν συμβάντων, ποὺ προσδιορίζουν μαζὶ μὲ τὴ χρονικὴ συντεταγμένη καὶ οἱ τρεῖς χωρικὲς συντεταγμένες αὐτῶν, τὴ θεωρήσει κανεὶς ὡς μιὰ τετραδιάστατη πολλαπλότητα, τὴ Γεωμετρία τῆς ὁποίας δίνει ἡ Εἰδικὴ Θεωρία τῆς Σχετικότητας τοῦ A. Einstein (1879-1955). Ἡ Γεωμετρία αὐτὴ εἶναι μερικὴ περίπτωση Γεωμετριῶν Riemann γιὰ τὶς ὁποῖες θὰ μιλήσουμε στὴν § 7.

6

Βασικὸ πρόβλημα ποὺ ἀντιμετωπίζει κανεὶς κατὰ τὴν ἔρευνα ἑνὸς καθαροῦ ἀξιωματικοῦ συστήματος ἢ μιᾶς καθαρῆς θεωρίας, εἶναι τὸ ἀναφερόμενο στὴ συμβιβαστότητα τῶν ἀξιωμάτων τοῦ συστήματος ἢ τῆς θεωρίας, πρόβλημα ποὺ στενὰ συνδέεται μ᾽ ἐκεῖνο τοῦ ἀνεξάρτητου τῶν ἀξιωμάτων (§ 3). Ὡς τώρα, εἶναι πολὺ λίγες οἱ θεωρίες γιὰ τὶς ὁποῖες ἀποδείχθηκε τὸ συμβιβαστὸ τῶν ἀξιωμάτων τους.

Σχετικὰ μὲ τὶς ἔννοιες τοῦ συμβιβαστοῦ καὶ τοῦ ἀνεξάρτητου τῶν ἀξιωμάτων μιᾶς καθαρῆς θεωρίας, προσθέτουμε τὰ ἑξῆς: Ἀσυμβίβαστη λέγεται μιὰ καθαρὴ θεωρία, ὅταν ὑπάρχει σ᾽ αὐτὴν κάποια παράγωγη πρόταση μαζὶ μὲ τὴν ἄρνησή της. Σ᾽ ἐναντία περίπτωση ἡ θεωρία λέγεται συμβιβαστή. Ἀνεξάρτητο λέγεται τὸ σύστημα ἀξιωμάτων μιᾶς καθαρῆς θεωρίας, ὅταν ἡ παράλειψη ὁποιουδήποτε ἀπὸ τ᾽ ἀξιώματα τῆς θεωρίας ἐπιφέρει τὴν ἀπώλεια κάποιου θεωρήματος αὐτῆς. Ὁμοίως, ἕνα ὁποιοδήποτε ἀπὸ τ᾽ ἀξιώματα τῆς θεωρίας λέγεται ἀνεξάρτητο, ὅταν ἡ παράλειψή του ἐπιφέρει τὴν ἀπώλεια θεωρήματος. Εἶναι φανερό, ὅτι ἕνα ἀνεξάρτητο ἀξίωμα δὲν εἶναι δυνατὸ ν᾽ ἀποδειχθεῖ ἀπὸ τὰ λοιπὰ ἀξιώματα τοῦ συστήματος καὶ ὅτι ἕνα σύστημα ἀξιωμάτων εἶναι ἀνεξάρτητο, ὅταν καὶ μόνο κάθε ἀξίωμα τοῦ συστήματος εἶναι ἀνεξάρτητο.

Δύο τώρα καθαρὲς ἀξιωματικὲς θεωρίες λέμε ὅτι εἶναι ἀσύμφωνες, ὅταν εἶναι δυνατὴ ἡ ἀμφιμονοσήμαντη ἀντιστοίχιση τῶν ἀρχικῶν καὶ τῶν παραγώγων ὅρων τους, σὲ τρόπο ὥστε ἀξίωμα ἢ θεώρημα τῆς μιᾶς θεωρίας νὰ εἶναι λογικὰ ἀντιφατικὸ μὲ ἀξίωμα ἢ θεώρημα τῆς ἄλλης. Σ᾽ ἐναντία περίπτωση, λέμε ὅτι οἱ θεωρίες εἶναι σύμφωνες. Ἀνὰ δύο ἀσύμφωνες εἶναι, γιὰ παράδειγμα, οἱ θεωρηθεῖσες στὴν § 3 διακλαδώσεις τῆς Εὐκλείδειας Γεωμετρίας καθὼς καὶ οἱ διακλαδώσεις τῆς ἀφηρημένης καντοριανῆς Συνολοθεωρίας (§ 4).

Εἶναι πρόδηλο ὅτι, ἂν δοθεῖ μιὰ καὶ ἡ αὐτὴ ἑρμηνεία στοὺς ἀντίστοιχους ἀρχικοὺς ὅρους σὲ δύο ἀσύμφωνες καθαρὲς θεωρίες, τότε καὶ οἱ προκύπτουσες θεωρίες εἶναι κατ᾽ ἀνάγκην ἀσύμφωνες.

Ὅμως, καὶ αὐτὸ εἶναι σημαντικό, εἶναι δυνατὸ γιὰ δύο ἀσύμφωνες καθαρὲς ἀξιωματικὲς θεωρίες νὰ δοθεῖ ὁρισμένη ἑρμηνεία σὲ ἀρχικοὺς ὅρους τῆς μιᾶς θεωρίας καὶ ἡ ἴδια ἑρμηνεία σὲ παράγωγους ὅρους τῆς ἄλλης, σὲ τρόπο ὥστε οἱ προκύπτουσες ἑρμηνευμένες θεωρίες νὰ εἶναι σύμφωνες[19]. Αὐτὸ συμβαίνει γιὰ τὶς ἀνὰ δύο ὡς ἄνω Γεωμετρίες, δηλαδὴ γιὰ τὴν Εὐκλείδεια (ἢ Παραβολική), τὴν Ὑπερβολικὴ καὶ τὴ Σφαιρική.

Ὁ πυρήνας γιὰ τὴν ἀπόδειξη τοῦ ὡς ἄνω ἰσχυρισμοῦ βρίσκεται ἀκριβῶς στὸν τρόπο μὲ τὸν ὁποῖον εἶχε διαπιστωθεῖ ἡ σχετικὴ συμβιβαστότητα τῶν μὴ Εὐκλειδείων Γεωμετριῶν, ὅτι δηλαδὴ οἱ μὴ Εὐκλείδειες Γεωμετρίες εἶναι συμβιβαστὲς ὑπὸ τὴν προϋπόθεση τῆς συμβιβαστότητας τῆς Εὐκλείδειας Γεωμετρίας (§ 3).

Συμπέρασμα τῶν πιὸ πάνω εἶναι ὅτι, ἂν κάποια ἀπὸ τὶς τρεῖς αὐτὲς Γεωμετρίες εἶναι ἐφαρμόσιμη, ἰσχύει δηλαδὴ στὴν ἐμπειρικὴ πραγματικότητα, τότε τὸ ἴδιο πρέπει νὰ συμβαίνει καὶ γιὰ κάθε μιὰ ἀπὸ τὶς δύο ἄλλες Γεωμετρίες. Ὑπὸ τὸ νόημα αὐτὸ ἡ διάκριση μεταξύ τους δὲν εἶναι δυνατὴ καὶ ἡ ἐκλογὴ κάποιας ὡς ἐφαρμόσιμης εἶναι ζήτημα ἁπλῆς σύμβασης. Ἂν, ὅμως, θεωρήσουμε ὅτι οἱ ἀντίστοιχοι ἀρχικοὶ ὅροι τῶν ὡς ἄνω Γεωμετριῶν ἀντικαθίστανται μὲ τὰ ἴδια ἐμπειρικὰ ἀντικείμενα, τότε δὲν εἶναι δυνατὸ ἀπὸ τὶς ἀσύμφωνες αὐτὲς Γεωμετρίες νὰ εἶναι ἐφαρμόσιμη παρὰ μία τὸ πολύ.

7

Μὲ τὴν ἀνάπτυξη τῆς Διαφορικῆς Γεωμετρίας, ποὺ εἶναι ἐφαρμογὴ τοῦ Διαφορικοῦ (καὶ τοῦ Ὁλοκληρωτικοῦ) Λογισμοῦ στὴ Γεωμετρία, καὶ μὲ γενίκευση ἰδεῶν τοῦ Gauss πάνω στὴν ἐσωτερικὴ Γεωμετρία τῶν Ἐπιφανειῶν, ποὺ γένηκε ἀπὸ τὸν B. Riemann (1826-1866), δημιουργήθηκε ἕνας πολὺ γενικὸς τρόπος ἀναλυτικῆς προσπέλασης τῆς ἔννοιας τῆς Γεωμετρίας. Ὁ τρόπος αὐτὸς ἀφορᾶ στὴν ἔρευνα τῶν (συνεχῶν) πολλαπλοτήτων μὲ ν τὸ πλῆθος διαστάσεις, ὅπου ν εἶναι ὁποιοσδήποτε φυσικὸς ἀριθμός, δηλαδὴ ἀφορᾶ στὴν ἔρευνα γεωμετρικῶν χώρων τῶν ὁποίων σημεῖα εἶναι οἱ ν-άδες πραγματικῶν ἀριθμῶν. Οἱ ἀριθμοὶ αὐτοὶ εἶναι οἱ συντεταγμένες τῶν σημείων. Ἕνας ἀμφιμονοσήμαντος μετασχηματισμὸς τῶν συντεταγμένων λέγεται ἀλλαγὴ συντεταγμένων. Ὡς Γεωμετρία θεωρεῖται ἕνα σύστημα ἀπὸ σχέσεις μεταξὺ τῶν σημείων αὐτῶν μέσα στὶς ὁποῖες βρίσκεται ὁρισμένη βασικὴ σχέση, ἡ μετρικὴ σχέση. Πρόκειται γιὰ τὸ λεγόμενο γραμμικὸ στοιχεῖο, δηλαδὴ μιὰ τετραγωνικὴ μορφὴ (ἕνα πολυώνυμο ὁμογενὲς δευτέρου βαθμοῦ) τῶν διαφορικῶν τῶν συντεταγμένων, μορφὴ ποὺ παρέχει τὸ τετράγωνο τοῦ μέτρου, ἢ τῆς ἀπόστασης, δύο ἀπείρως γειτονικῶν σημείων. Ἡ

19. E. Nagel, *The Structure of Science*, London, Routledge and Kegan Paul, 1974[4], 250-252.

ἀναφορὰ σὲ ἀπείρως γειτονικὰ σημεῖα ἔχει τὴν ἔννοια, ὅτι ἡ Γεωμετρία θεωρεῖται τώρα *ἐν σμικρῷ*· γιατί, μόνο μὲ τὴν *ἐν σμικρῷ* θεώρηση αὐτὴ μπορεῖ κανεὶς ν' ἀναμένει τὴν εὕρεση τῶν *ἐν μεγάλῳ* θεμελιωδῶν σχέσεων τῆς Γεωμετρίας.

Οἱ συντελεστὲς τοῦ γραμμικοῦ στοιχείου, ὅπως καὶ οἱ μετασχηματισμοὶ (ἀλλαγὲς) τῶν συντεταγμένων, θεωροῦνται ὡς διαφορίσιμες συναρτήσεις τῶν συντεταγμένων τῶν σημείων, δηλαδὴ τῆς θέσης τῶν σημείων. Ἀπὸ τὴν ἀναλλοίωτη σημασία τοῦ γραμμικοῦ στοιχείου (ὡς ἀπόστασης) συνάγεται καὶ ὁ τρόπος μετασχηματισμοῦ τῶν συντελεστῶν αὐτοῦ μὲ τὴν ἀλλαγὴ συντεταγμένων. Εἶναι πάντοτε δυνατό, μὲ κατάλληλη ἀλλαγὴ συντεταγμένων, νὰ ἐπιτύχει κανείς, ὥστε τὸ γραμμικὸ στοιχεῖο, γιὰ δεδομένο σημεῖο, νὰ πάρει τὴ μορφὴ ἀλγεβρικοῦ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν διαφορικῶν τῶν συντεταγμένων, δηλαδὴ τὰ τετράγωνα τῶν διαφορικῶν νὰ παίρνονται στὸ ἄθροισμα μὲ τὸ θετικὸ ἢ μὲ τὸ ἀρνητικὸ πρόσημο. Μάλιστα, τὸ πλῆθος τῶν ὅρων μὲ θετικὸ πρόσημο, ὅπως κι ἐκεῖνο μὲ ἀρνητικὸ πρόσημο, μένουν ἀναλλοίωτα. Ὅμως, δὲν εἶναι γενικὰ δυνατὸ νὰ ἰσχύει ὁ ὡς ἄνω μετασχηματισμὸς τοῦ γραμμικοῦ στοιχείου γιὰ ὅλα τὰ σημεῖα ὁποιασδήποτε περιοχῆς τοῦ χώρου.

Ἀπὸ τὰ πιὸ πάνω βλέπουμε, ὅτι ἐκεῖνο ποὺ ἀπαιτεῖται γιὰ τὴ δόμηση Γεωμετρίας Riemann στὴν ἀρχὴ εἶναι ἕνα σύνολο ἀπὸ στοιχεῖα, τὰ σημεῖα τῆς Γεωμετρίας, ποὺ χαρακτηρίζονται ἀπὸ τὶς συντεταγμένες τους, καὶ ἔπειτα μιὰ κατάλληλη τετραγωνικὴ μορφή, ποὺ ὁρίζει τὴ μέτρηση τῶν ἀποστάσεων δύο ἀπείρως γειτονικῶν στοιχείων. Σὲ ἀντίθεση μὲ ὅ,τι ἴσχυε γιὰ τὶς ὡς τώρα ἐξετασθεῖσες Γεωμετρίες, ἡ μετρικὴ τῶν νέων Γεωμετριῶν δὲν εἶναι κάτι τὸ σταθερό, ἀλλὰ μεταβάλλεται μὲ τὴ μεταβολὴ θέσης. Ἐξάλλου, ἡ αὐθαιρεσία ὡς πρὸς τὴν ἐκλογὴ τῶν ὡς ἄνω στοιχείων (ποὺ μποροῦν λόγου χάρη νὰ εἶναι περιφέρειες σ' ἕνα διδιάστατο ἢ σφαῖρες σ' ἕνα τριδιάστατο Εὐκλείδειο χῶρο), ἔχει ὡς ἀποτέλεσμα τὴ γενικότητα τῶν Γεωμετριῶν ποὺ παίρνει κανεὶς ξεκινώντας ἀπὸ τὰ πιὸ πάνω δεδομένα.

Ἀπὸ τὴ μεταβολὴ τώρα τῶν συντελεστῶν τοῦ γραμμικοῦ στοιχείου προκύπτουν γενικὰ διάφορες διακλαδώσεις (διακλαδομένες Γεωμετρίες), τὶς ὁποῖες χαρακτηρίζει ἡ λεγόμενη καμπυλότητα Riemann, καμπυλότητα ποὺ ὁρίζεται μὲ τρόπο ἀνάλογο ἐκείνου τῆς καμπυλότητας Gauss στὴ Θεωρία τῶν Ἐπιφανειῶν.

Στὶς Γεωμετρίες Riemann ἐντάσσονται τόσο ἡ Εὐκλείδεια ὅσο καὶ οἱ μὴ Εὐκλείδειες Γεωμετρίες ποὺ ἤδη ἐξετάσαμε, ὡς μερικὲς περιπτώσεις, μὲ κατάλληλη ἐκλογὴ τῶν συντελεστῶν τοῦ γραμμικοῦ στοιχείου. Ἡ Εὐκλείδεια καὶ οἱ μὴ Εὐκλείδειες αὐτὲς Γεωμετρίες ἔχουν σταθερὴ καμπυλότητα καὶ μάλιστα εἶναι αὐτὴ μηδενικὴ γιὰ τὴν Εὐκλείδεια, ἀρνητικὴ γιὰ τὴν Ὑπερβολικὴ καὶ θετικὴ γιὰ τὴ Σφαιρικὴ Γεωμετρία. Πρόκειται, ὥστε, γιὰ πολὺ μερικὲς περιπτώσεις Γεωμετριῶν Riemann. Ἄς σημειωθεῖ ἐδῶ, ὅτι τὶς Γεωμετρίες μὲ σταθερὴ καμπυλότητα τὶς λέμε καὶ ὁ μ ο ι ο γ ε ν ε ῖ ς, ἕνεκα τοῦ ὅτι αὐτὲς εἶναι οἱ ἴ δ ι ε ς σὲ κάθε σημεῖο τους, ὅπως καὶ σὲ κάθε κατεύθυνση στὸ ἐν λόγω σημεῖο.

Ἀναφορικὰ μὲ τὴν ἐ φ α ρ μ ο γ ὴ τῶν ὡς ἄνω καθαρῶν Γεωμετριῶν Riemann, σὲ ἀναλογία τῶν ὅσων εἴπαμε στὴν § 5, ἔχουμε τὰ ἑξῆς: Στὴ λεγόμενη ἐ φ α ρ μ ο σ μ έ ν η Γεωμετρία Riemann ὁδηγοῦν, ἡ ἀντικατάσταση (ἀντιστοίχιση) τῶν ἀρχικῶν (καὶ παραγώγων) ὅρων (στοιχείων) μὲ ἀντικείμενα τοῦ ἐμπειρικοῦ κόσμου, ἡ ταυτοποίηση τῶν ἀναλυτικῶν γεωμετρικῶν ποσοτήτων (τῶν συντελεστῶν τοῦ γραμμικοῦ στοιχείου) μὲ ἐμπειρικὲς ποσότητες καὶ τέλος ἡ ἐμπειρικὴ ἐπαλήθευση τῶν σχέσεων ποὺ συνδέουν τοὺς ὡς ἄνω ὅρους, σὲ τρόπο ὥστε ἡ καθαρὴ Γεωμετρία νὰ μετατρέπεται σὲ ἐμπειρικὴ (φυσική) θεωρία. Φυσικὴ ἐφαρμογὴ Γεωμετριῶν Riemann γένηκε στὴν Ε ἰ δ ι κ ὴ καὶ τὴ Γ ε ν ι κ ὴ Θ ε ω ρ ί α τ ῆ ς Σ χ ε τ ι κ ό τ η τ α ς.

Σημειώνουμε τέλος, ὅτι πλὴν τῶν Γεωμετριῶν Riemann ὑπάρχουν καὶ ἄλλοι ἀκόμη τρόποι προσπέλασης ποὺ γένηκαν στὴ σύγχρονη ἐποχὴ ἀπὸ τοὺς H. Weyl (1885-1955) καὶ E. Cartan (1869-1961) ὅπως καὶ ἀπὸ τὸν μαθητὴ τοῦ Κ. Καραθεοδωρῆ (1873-1950), τὸν P. Finsler (1894-1973;)[20].

8

Σύμφωνα τώρα μὲ τὴ λεγόμενη ἀ ρ χ ὴ ἰ σ ο δ υ ν α μ ί α ς τοῦ Einstein, σὲ ἀρκετὰ μικρὲς περιοχὲς τοῦ τετραδιάστατου κόσμου (χωρόχρονου) στὶς ὁποῖες μπορεῖ κανεὶς νὰ παραβλέπει τὴ χωρικὴ καὶ τὴ χρονικὴ μεταβολὴ τῆς βαρύτητας, ὑ π ά ρ χ ε ι σύστημα συντεταγμένων (σύστημα ἀδρανείας) ὅπου ἐξαλείφεται ἡ βαρύτητα. Τοῦτο ὀφείλεται στὸ γεγονὸς ὅτι τὸ π ε δ ί ο β α ρ ύ τ η τ α ς προσδίνει στὰ σώματα τὴν ἴδια ἐπιτάχυνση, πράγμα ποὺ σημαίνει ὅτι μ ά ζ α β α ρ ύ τ η τ α ς καὶ μ ά ζ α ἀ δ ρ ά ν ε ι α ς εἶναι ἴσες ποσότητες. Τὸ γραμμικὸ στοιχεῖο παίρνει τότε τὴ μορφὴ ἀθροίσματος τῶν τετραγώνων τῶν τριῶν διαφορικῶν γιὰ τὶς χωρικὲς συντεταγμένες πλὴν τὸ τετράγωνο τοῦ διαφορικοῦ γιὰ τὴ χρονικὴ συντεταγμένη.

Στὴ Γενικὴ Θεωρία τῆς Σχετικότητας τὸ πεδίο βαρύτητας καθορίζεται,

20. Ἡ γενίκευση τοῦ H. Weyl δὲν βασίζεται στὴν εἰσαγωγὴ γραμμικοῦ στοιχείου, ἀλλὰ στὴν παροχὴ κανόνα γιὰ τὴν «παράλληλη μεταφορὰ» διανυσμάτων. Ὁ E. Cartan ἔδειξε, ὅτι σὲ κάθε Γεωμετρία Riemann ποὺ κατασκευάζεται μὲ βάση ὁποιαδήποτε ὁμάδα μετασχηματισμῶν, ὑπάρχει γενικότερη Γεωμετρία. Ἡ Γεωμετρία αὐτὴ προκύπτει βάσει τοῦ λεγόμενου νόμου τ ῆ ς Σ υ ν ά φ ε ι α ς τ ο ῦ χ ώ ρ ο υ. Τέλος, ὁ P. Finsler γενίκευσε τὶς Γεωμετρίες Riemann ἀναχωρώντας ἀπὸ γενικότερες συναρτήσεις τῶν διαφορικῶν, καὶ ὄχι ἀπὸ τὶς τετραγωνικὲς μορφὲς τῶν διαφορικῶν αὐτῶν.

ὡς γνωστό, ἀπὸ τοὺς συντελεστὲς τοῦ γραμμικοῦ στοιχείου μέσω τῶν λεγομένων συμβόλων τοῦ E. Christoffel (1829-1900). Εἶναι λοιπόν, γιὰ τὴν περίπτωση ὕπαρξης πεδίου βαρύτητας, «εὔλογη» ἡ παραδοχὴ ὅτι οἱ συντελεστὲς αὐτοὶ εἶναι τὰ δυναμικὰ ποὺ καθορίζουν τὶς ἐπιταχύνσεις τῶν ἐλευθέρων σωμάτων ἤ, ἀλλιῶς, οἱ ἐν λόγω συντελεστὲς εἶναι τὰ δυναμικὰ τοῦ πεδίου βαρύτητας.

Οἱ συντελεστὲς τοῦ γραμμικοῦ στοιχείου καθορίζουν, κατὰ ταῦτα, ὄχι μόνο τὴ μετρικὴ δομὴ (καὶ τὴν καμπυλότητα) ἀλλὰ καὶ τὸ πεδίο βαρύτητας στὴ θεωρούμενη περιοχή. Ἡ ἀντίστοιχη ἄρα Γεωμετρία Riemann συνδέεται ἄμεσα μὲ τὴ βαρύτητα καὶ γιὰ τὸ λόγον αὐτὸ μὲ τὴν κατανομὴ τῆς μάζας. Ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος, ἡ ἐξίσωση τῆς κίνησης σώματος σὲ πεδίο βαρύτητας ἔχει τὴν ἴδια μορφὴ μὲ τὴν ἐξίσωση γεωδαισιακῆς γραμμῆς —δηλαδὴ τοῦ δρόμου ἐλάχιστης ἀπόστασης μεταξὺ δύο ὁποιωνδήποτε σημείων τοῦ δρόμου— στὴ Γεωμετρία Riemann. Σὲ περιοχὴ ποὺ δὲν ὑπάρχει πεδίο βαρύτητας, ἡ γεωδαισιακὴ αὐτὴ γραμμὴ εἶναι «συνήθης» εὐθεία.

Συμπέρασμα εἶναι, ὅτι ἡ μετρικὴ δομὴ τοῦ τετραδιάστατου κόσμου τῆς Γενικῆς Θεωρίας τῆς Σχετικότητας καὶ ἡ ἐφαρμόσιμη στὸν κόσμο αὐτὸ Γεωμετρία Riemann ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὴν κατανομὴ τῆς μάζας. Ἐπειδή, ἐξάλλου, ἡ κατανομὴ αὐτὴ καθορίζεται ἀπὸ τὴ φυσικὴ ἐμπειρία ἕπεται, ὅτι καὶ ἡ ἐν λόγω ἐφαρμόσιμη Γεωμετρία Riemann προσδιορίζεται μονοσήμαντα ἀπὸ τὴν ἐμπειρία.

9

Συνοψίζοντες τὰ εἰπωθέντα στίς §§ 5, 7 ἔχουμε, ὅτι τὸ ἐφαρμόσιμο μιᾶς καθαρῆς καὶ ὁμοιογενοῦς Γεωμετρίας προσδιορίζεται ἀπὸ ἀντικαταστάσεις (ἀντιστοιχίσεις) τῶν ἀρχικῶν ὅρων τῆς Γεωμετρίας μὲ ἐμπειρικὰ ἀντικείμενα καὶ ἀπὸ ἐμπειρικὲς ἐπαληθεύσεις ἰσχύος τῶν σχέσεων ποὺ διατυπώνονται μὲ τ' ἀξιώματα, ἐπαληθεύσεις ποὺ ἐπιτυχαίνονται μὲ τὶς σχετικὲς μετρήσεις. Ἀπὸ τὸ ἄλλο μέρος, § 8, τὸ ἐφαρμόσιμο μιᾶς καθαρῆς, ὄχι γενικὰ ὁμοιογενοῦς, Γεωμετρίας Riemann ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν κατανομὴ τῆς μάζας στὸν κόσμο καί, ὅπως ἡ κατανομὴ αὐτή, ἔτσι καὶ ἡ ἐφαρμόσιμη Γεωμετρία καθορίζεται ἀπὸ τὴν ἐμπειρία.

Συνήθως, γιὰ μικρὲς περιοχές, ὡς εὐθεῖες παίρνουμε πολὺ λεπτὰ τεντωμένα νήματα ἢ τὶς ἀκμὲς μετρικοῦ κανόνα· γιὰ μεγαλύτερες περιοχὲς παίρνουμε κατὰ κανόνα τὶς τροχιὲς ὀπτικῶν ἢ φωτεινῶν ἀκτίνων σὲ ὁμοιογενὲς μέσον. Μὲ τὶς τομὲς τῶν εὐθειῶν αὐτῶν ἔχουμε τὰ σημεῖα καὶ μὲ τὰ ἐμπειρικὰ δεδομένα τῶν εὐθειῶν καὶ τῶν σημείων κατασκευάζουμε τὰ ἐμπειρικὰ ἐπίπεδα.

Ἀπὸ τὸ πρῶτο κιόλας βῆμα αὐτὸ ἀντιμετωπίζουμε τὶς δυσκολίες τῆς ἐμπειρικῆς αὐτῆς «ταυτοποίησης». Ἕνα τεντωμένο νῆμα, ἢ ἡ ἀκμὴ ἑνὸς ὑλικοῦ κανόνα, ἀποκλίνουν ἀπὸ τὴ γεωμετρικὴ εὐθεία, λόγω τῶν ὑπαρκτῶν διαστάσεών τους. Πρώτη δυσκολία εἶναι λοιπόν, ὅτι τόσο οἱ διαστάσεις τῶν ἐμπειρικῶν εὐθειῶν, ὅσο ἐκεῖνες τῶν τομῶν τους, πρέπει νὰ μὴν ὑπερβαίνουν, σὲ σύγκριση πρὸς τὴν ἀπαιτούμενη κάθε φορὰ ἀκρίβεια, τὸ θεωρούμενο «ὅριο ἀκριβείας».

Ἐξάλλου, μιὰ ὀπτικὴ ἢ φωτεινὴ ἀκτίνα εἶναι φυσικὰ φαινόμενα καὶ ὡς τέτοια δὲν ὑπακούουν παρὰ στοὺς παραδεγμένους φυσικοὺς νόμους. Τὴν ἐξάρτηση αὐτὴ ἀπὸ τοὺς φυσικοὺς νόμους τὴ συναντᾶμε καὶ κατὰ τὴν ἐπαλήθευση τῆς ἰσχύος τῶν μετρικῶν σχέσεων ποὺ διατυπώνουνται ἀπὸ τ' ἀξιώματα. Γιὰ τὴν Εὐκλείδεια, λόγου χάρη, Γεωμετρία ἡ μέτρηση μήκους γίνεται μὲ τὴν ἐπανειλημμένη ἐπίθεση, στὸ μετρούμενο μέγεθος, δεδομένης μονάδας μήκους. Ἐνῶ, ὅμως, γιὰ τὴν καθαρὴ Εὐκλείδεια Γεωμετρία ἡ μονὰς μήκους εἶναι σταθερή, δὲν μεταβάλλεται δηλαδὴ μὲ τὴ θέση της στὸ χῶρο, γιὰ τὴν ἐφαρμοσμένη ἡ μεταβολή της ἐξαρτᾶται ἀπὸ πολλοὺς παράγοντες, ὅπως ἀπὸ τὴ θερμοκρασία ἢ ἀπὸ ἄλλες παραμορφωτικὲς δυνάμεις. Ἔτσι, οἱ φυσικοὶ νόμοι ἐπεμβαίνουν κατὰ τὴ διαπίστωση ἢ μὴ τῆς ἰσχύος (τὴν ἐπαλήθευση ἢ μή) δεδομένης καθαρῆς Γεωμετρίας στὸν ἐμπειρικὸ κόσμο· μὲ ἄλλες λέξεις, ἡ ἀπαιτούμενη κάθε φορὰ διόρθωση τοῦ μήκους μονάδας μέτρησης ἀπαιτεῖ τὴ γνώση τῶν φυσικῶν νόμων ποὺ διέπουν τὰ σχετικὰ φαινόμενα ἀλλοίωσης τοῦ ἐν λόγω μήκους.

Γενικά, μὲ τὴ σταθερότητα ἑνὸς μεγέθους παρατηροῦμε τὰ ἑξῆς: Ἀπόλυτη σταθερότητα εἶναι κάτι ποὺ ξεφεύγει ἀπὸ τὶς δυνατότητες πραγματοποίησής της. Εἶναι ἀνάγκη, γι' αὐτό, νὰ περιορισθοῦμε στὴ σχετικὴ σταθερότητα, ποὺ σημαίνει τὴν κατὰ προσέγγιση, μὲ βαθμὸ προσέγγισης καθοριζόμενο κάθε φορὰ «σχετικὰ» μὲ τὴν ἀπαιτούμενη ἀκρίβεια. Ἡ σχετικὴ αὐτὴ σταθερότητα ἀποτελεῖ ἀκριβῶς μιὰ ἐμπειρικὴ παραδοχή, παραδοχὴ ποὺ πρέπει νὰ καθορίζει τὶς ἀρχὲς τῆς μέτρησης.

Ἀνάλογα μὲ ὅ,τι εἰπώθηκε γιὰ τὶς μετρικὲς ἰσχύει καὶ γιὰ τὶς σχέσεις θέσης. Ἐξαρτῶνται δηλαδὴ καὶ αὐτὲς ἀπὸ τοὺς φυσικοὺς νόμους, σὲ τρόπο ὥστε ἀλλαγὴ τῶν νόμων αὐτῶν νὰ συνεπάγεται, ἐνδεχομένως, ἀλλαγὴ ἀπάντησης ἀναφορικὰ μὲ τὸ ἐφαρμόσιμο ἢ μὴ καθαρῆς Γεωμετρίας.

Ἄλλη δυσκολία βρίσκεται στὰ κατὰ προσέγγιση ἐξαγόμενα τῶν μετρήσεων ποὺ ἐξαρτῶνται ἀπὸ τὸ ὅριο εὐαισθησίας τῶν ὀργάνων μέτρησης (τηλεσκόπιο, θεοδόλιχος κ.ἄ.). Ἔτσι, ἂν πρόκειται νὰ μετρήσει κανεὶς τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν (εὐθύγραμμου) τριγώνου ποὺ οἱ κορυφές του εἶναι ἐκεῖνες τριῶν ἀπομακρυσμένων βουνῶν, ὅταν ὡς πλευρὲς τοῦ τριγώνου χρησιμοποιοῦνται οἱ ὀπτικὲς ἀκτίνες ποὺ τὶς συνδέουν, καὶ ἂν συμβεῖ κατὰ τὴ μέτρηση ἡ ἀπόκλιση τοῦ ἐξαγομένου ἀπὸ δύο ὀρθὲς νὰ βρίσκεται κάτω ἀπὸ τὸ σφάλμα ἀκριβείας τῶν χρησιμοποιουμένων ὀργάνων, τότε εἶναι ἀδύνατο ν' ἀποκριθεῖ κανεὶς κατὰ πόσο τὸ ζητούμενο ἄθροισμα εἶναι ἴσο, μικρότερο ἢ μεγαλύτερο ἀπὸ δύο ὀρθές, ἂν δηλαδὴ ἡ Γεωμετρία ποὺ ἰσχύει εἶναι Εὐκλείδεια, Ὑπερβολικὴ ἢ Σφαιρική. Ἀναφερόμαστε ἐδῶ στὸ πείραμα μὲ τὸ ὁποῖον ὁ Gauss ἐπεχείρησε νὰ βρεῖ, χωρὶς θετικὸ ἀποτέλεσμα, τὴν Εὐκλείδεια ἢ μὴ δομὴ τοῦ φυσικοῦ χώρου.

Τρίτη τέλος δυσκολία ὀφείλεται στὸν τρόπο ποὺ εἶναι κατασκευασμένα αὐτὰ ταῦτα τὰ ὄργανα μέτρησης (κανόνας, μετροταινία, τηλεσκόπιο, θεοδόλιχος κ.ἄ.). Ἡ κατασκευὴ τῶν ὀργάνων αὐτῶν προϋποθέτει τὴν ἰσχὺ τῆς Εὐκλείδειας Γεωμετρίας. Αὐτὴ ἡ Γεωμετρικὴ Ὀπτική, στὴν ὁποία στηρίζεται ἡ κατασκευὴ μερικῶν ἀπὸ τὰ ὄργανα μέτρησης, ξεκινᾶ ἀπὸ ὑποθέσεις (εὐθύγραμμη διάδοση φωτὸς κ.ἄ.) ποὺ συμφωνοῦν μ' ἐκεῖνες τῆς Εὐκλείδειας Γεωμετρίας. Ὥστε, ὁ κίνδυνος νὰ περιπέσει κανεὶς σὲ φαῦλο κύκλο φαίνεται, ἀπὸ πρώτη ἀντιμετώπιση, πολὺ πιθανός.

Φαῦλος κύκλος ἐμφανίζεται, ἐξάλλου, καὶ γι' αὐτὸ τοῦτο τὸ γεγονός, ὅτι ἐνῶ ἡ μέτρηση βασίζεται στὴ σταθερότητα (κατάλληλου μήκους), ἀντίστροφα ἡ σταθερότητα βασίζεται στὴ μέτρηση.

10

Ἐρχόμαστε τώρα στὴ μέτρηση τοῦ χρόνου, ὅπου οἱ παρουσιαζόμενες δυσκολίες εἶναι ἀνάλογες. Τὰ συνήθη ὄργανα γιὰ τὴ μέτρηση χρόνου (ἐκκρεμές, χρονόμετρο, ταχύτητα φωτός) στηρίζονται στὴν ὁμοιόμορφη «ροὴ» κάποιου φαινομένου (ταλάντωσης, περιστροφῆς, διάδοσης), ὑπὸ ὁρισμένες συνθῆκες. Ὅπως ἡ μέτρηση μήκους, ἔτσι καὶ ἐκείνη τοῦ χρόνου ἔχει ὡς βάση τὴ σύμπτωση ἀρχῆς καὶ τέλους γιὰ δύο συμβάντα καὶ στὴ σταθερότητα «διάρκειας» τῆς μονάδας χρόνου. Καὶ ἐδῶ ἡ χρονικὴ διάρκεια, ποὺ παίρνεται ὡς μονάδα, ἐξαρτᾶται ἀπὸ τὴν ἐπίδραση τοῦ περιβάλλοντος. Ἂν πάρουμε ὡς μονάδα χρόνου τὴ διάρκεια μιᾶς ταλάντωσης ἐκκρεμοῦς (ὁρισμένου μήκους), τότε ξεύρουμε ὅτι ἡ διάρκεια αὐτὴ ἀλλάσσει μὲ τὴν ἀλλαγὴ τοῦ τόπου. Ἄλλος εἶναι, γιὰ παράδειγμα, ὁ ἀριθμὸς ταλαντώσεων τοῦ ἐκκρεμοῦς αὐτοῦ γιὰ μιὰ ἡλιακὴ μέρα σὲ θέση τοῦ ἰσημερινοῦ καὶ ἄλλος (μεγαλύτερος) στὸ βόρειο πόλο. Ἡ ἐξάρτηση τῆς ὑπόψη διάρκειας ἀπὸ τοὺς κάθε φορὰ παραδεγμένους φυσικοὺς νόμους εἶναι καὶ τώρα πρόδηλη (ἐπιτάχυνση βαρύτητας, κεντρόφυγη δύναμη λόγω περιστροφῆς τῆς γῆς κ.λ.). Ὅ,τι εἰπώθηκε γιὰ τὸ ἐκκρεμὲς ἰσχύει καὶ γιὰ ὁποιοδήποτε ἄλλο τρόπο μέτρησης τοῦ χρόνου, δηλαδὴ ὑπάρχει ἡ οὐσιαστικὴ ἐξάρτησή της ἀπὸ τοὺς φυσικοὺς νόμους.

Ὅμως, ὅπως οἱ μετρήσεις χώρου καὶ χρόνου στηρίζονται στοὺς φυσικοὺς νόμους, ἔτσι καὶ ἀντίστροφα οἱ φυσικοὶ νόμοι βασίζονται σὲ μετρήσεις. «Ἔτσι, οἱ νόμοι τῆς βαρύτητας-ἐπιτάχυνσης καὶ ἐκεῖνοι τῆς κεντρόφυγης-ἐπιτάχυνσης, μὲ τοὺς ὁποίους ἐξακριβώνεται ἡ σταθερότητα τῆς ταλάντωσης ἐκκρεμοῦς, προϋποθέτουν καὶ αὐτοὶ μέτρηση χρόνου· καὶ ἀντίστροφα, ἡ μέτρηση αὐτὴ ἔχει ὡς βάση σώματα σταθερὰ στὸ μῆκος καὶ σταθερὰ στὴ διάρκεια συμβάντα. Γιὰ νὰ μπορέσει κανεὶς νὰ χρησιμοποιήσει τὴν ταχύτητα τοῦ φωτός, ὡς μέτρο χρόνου γιὰ τὸ συγχρονισμὸ σὲ ἀπομακρυσμένους τόπους, πρέπει προηγουμένως ἡ ταχύτητα αὐτὴ νὰ ἔχει μετρηθεῖ, πράγμα ποὺ προϋποθέτει πάλι μέτρηση χρόνου. Κινεῖται λοιπὸν κανεὶς ὅπως φαίνεται σὲ φαῦλο κύκλο, ποὺ εἶναι ἀδύνατο νὰ ἀρθεῖ. Μέτρηση ἀπαιτεῖ σύμπτωση· ἐμπειρικὸς καθορισμὸς σύμπτωσης ἀπαιτεῖ σταθερότητα σωμάτων καὶ συμβάντων, ἀναφορικὰ μὲ τὴν πρὸς μέτρηση κατάσταση· σταθερότητα μπορεῖ νὰ ἐπιτευχθεῖ μόνο μὲ διορθώσεις τῶν ἐμπειρικῶν ἐξακριβώσεων· οἱ διορθώσεις αὐτὲς βασίζονται σὲ ποσοτικοὺς φυσικοὺς νόμους ποὺ καὶ αὐτοὶ ἔχουν ὡς βάση πάλι μετρήσεις»[21].

11

Ἡ ἰσχὺς τῆς ἀρχῆς τῆς συμβατικότητας γιὰ τὶς καθαρὲς Γεωμετρίες μὲ σταθερὴ καμπυλότητα βασίσθηκε, ὅπως εἴπαμε στὴν § 5, στὸ γεγονός, ὅτι οἱ μεταξύ τους ἀσύμφωνες αὐτὲς Γεωμετρίες γίνονται σύμφωνες ὅταν δοθεῖ κατάλληλη ἑρμηνεία στοὺς ἀρχικοὺς ὅρους ὁποιασδήποτε ἀπ᾽ αὐτὲς βάσει παραγώγων ὅρων μιᾶς ἀπὸ τὶς ἄλλες. Ἐπειδὴ τώρα, σύμφωνα μὲ τὶς §§ 9, 10, ὁ ἔλεγχος γιὰ τὴν ἐμπειρικὴ ἰσχὺ καθαρῆς Γεωμετρίας ἐξαρτᾶται ἀπὸ τοὺς ἰσχύοντες φυσικοὺς νόμους, θὰ ἦταν καὶ πάλι δυνατὸ νὰ θεωρήσει κανείς, ὅτι ἀλλαγὴ τῶν νόμων αὐτῶν θὰ μποροῦσε νὰ ὁδηγήσει στὸ ἐφαρμόσιμο ὁποιασδήποτε ἐκ τῶν προτέρων δεδομένης καθαρῆς Γεωμετρίας. Γιὰ παράδειγμα, κατάλληλη ἀλλαγὴ τοῦ νόμου διάδοσης τοῦ φωτός, ἀπὸ εὐθύγραμμη σὲ καμπυλόγραμμη, θὰ μποροῦσε ἴσως νὰ ἐπιτύχει τοῦτο. Συμπέρασμα θὰ ἦταν, ὅτι καὶ ἡ ἀπάντηση στὸ ἐρώτημα «ποιά ἀπὸ τὶς καθαρὲς Γεωμετρίες ἰσχύει στὴν ἐμπειρικὴ πραγματικότητα;», δὲν θὰ μποροῦσε νὰ δοθεῖ μονοσήμαντα ἀπὸ τὴν ἐμπειρία, ἀλλ᾽ ὅτι ἡ ἀπάντηση εἶναι ἁπλῶς ζήτημα σύμβασης ἢ συμφωνίας. Βέβαια, ἡ δυνατότητα αὐτὴ ὑπονοεῖ πὼς καὶ οἱ φυσικοὶ νόμοι δὲν καθορίζονται ἀπὸ τὴν ἐμπειρία, ἀλλ᾽ ὅτι μποροῦν νὰ διαμορφώνονται ἀνάλογα μὲ τὸ ποιὰ καθαρὴ Γεωμετρία θέλουμε ν᾽ ἀνταποκρίνεται (νὰ ἰσχύει) στὴ φυσικὴ πραγματικότητα. Αὐτὸ ἔρχεται σὲ ἀντίφαση μὲ τὴν παρατήρηση, ποὺ κάναμε στὴν ἀρχὴ τῆς § 9, ὅτι δηλαδὴ ἡ ἐφαρμόσιμη Γεωμετρία ὁρίζεται μονοσήμαντα ἀπὸ τὴν ἐμπειρία. Γι᾽ αὐτὸ καὶ ἡ ἄποψη τῆς αὐθαίρετης ἐκλογῆς ἐφαρμόσιμης Γεωμετρίας ἀποκρούεται ἀπὸ νεότερους ἐρευνητές[22].

Ἀντίθετα, ὑποστηρικτὴς τῆς ἄποψης τῆς συμβατικότητας ὑπῆρξεν ὁ H. Poincaré. Στὸ περίφημο βιβλίο του *La Science et Hypothèse* (1902) ἀνα-

21. V. Kraft, *Mathematik, Logik und Erfahrung*, Wien-New York, Springer, 1970, 77.
22. M. Schlick, *Gesammelte Aufsätze*, Wien 1938, 314.

φέρεται κατὰ λέξη[23]. «Δὲν ὑπάρχει πείραμα μὲ τὸ ὁποῖο μποροῦμε ν' ἀποκριθοῦμε ποιὰ ἀπὸ τὶς Γεωμετρίες, ἡ Εὐκλείδεια ἢ ἡ Ὑπερβολική, ἰσχύει στὸν ἐμπειρικὸ χῶρο. Γιατί, δὲν μποροῦμε νὰ ἰσχυρισθοῦμε ὅτι μερικὰ πράγματα ποὺ εἶναι δυνατὰ στὸν Εὐκλείδειο, εἶναι ἀδύνατα στὸν Ὑπερβολικὸ χῶρο. Ἡ ἀντίθετη ἀπόκριση θὰ ἦταν ὡς νὰ θέλαμε μὲ τὸ πείραμα ν' ἀποφασίσουμε κατὰ πόσον ὑπάρχουν μεγέθη ποὺ μποροῦν νὰ μετρηθοῦν σὲ μέτρα καὶ ἑκατοστόμετρα, ὄχι ὅμως σὲ πόδια καὶ ἴντσες. Ἀπόκειται, ἄρα, στὴν ἐκλογή μας τὸ νὰ ὁρίσουμε ποιὰ Γεωμετρία θὰ ἰσχύει ἐμπειρικά».

Σημειώνουμε ἐδῶ, ὅτι ὁ Poincaré δὲν ἔκανε πουθενὰ διάκριση μεταξὺ καθαρῆς καὶ ἐφαρμοσμένης Γεωμετρίας.

12

Ἀπ' ὅσα εἴπαμε στὴν § 9 συνάγεται, πὼς γιὰ πολὺ μικρὲς περιοχὲς ὁ καθορισμὸς Γεωμετριῶν ποὺ εἶναι ἐφαρμόσιμες σ' αὐτὲς δὲν εἶναι δυνατός, λόγω τοῦ ὅτι τὰ διαπραττόμενα σφάλματα κατὰ τὶς ἀναγκαῖες γιὰ τὸν καθορισμὸν αὐτὸ μετρήσεις βρίσκονται κάτω ἀπὸ τὰ ὅρια ἀκριβείας τόσο τῶν ὀργάνων μέτρησης ὅσο κι αὐτῶν τῶν ἴδιων τῶν μετρήσεων. Γιὰ ὄχι πολὺ μικρὲς περιοχές, ἡ ἐκλογὴ ἐφαρμόσιμης Γεωμετρίας, ποὺ ἐξαρτᾶται ἄμεσα ἀπὸ τοὺς ἰσχύοντες φυσικοὺς νόμους, δὲν θὰ πρέπει νὰ εἶναι ἐκ τῶν προτέρων συμφωνημένη (§ 11). Στὸν τελευταῖο αὐτὸν ἰσχυρισμὸ καταλήγουμε ἀναχωροῦντες καὶ ἀπὸ τὴν ἑξῆς παρατήρηση: Ἂν οἱ αὐθαίρετες συμφωνίες, τόσο γιὰ τὶς ἀπαιτούμενες μετρήσεις ὅσο καὶ ὡς πρὸς τοὺς φυσικοὺς νόμους ποὺ πρέπει νὰ ἰσχύουν, μᾶς ὁδηγοῦν σὲ νόμους κατασκευασμένους ad hoc, καὶ ἄν, ἐξάλλου, συμβεῖ οἱ ad hoc αὐτοὶ φυσικοὶ νόμοι νὰ μὴ προσαρμόζονται (ἐντάσσονται) στοὺς λοιποὺς ἰσχύοντες νόμους τῆς φυσικῆς ἢ ἡ ἰσχύς τους νὰ μὴ διαπιστώνεται πειραματικά, τότε εἶναι φυσικὸ ν' ἀρνούμαστε τὸ βάσιμο τῆς ὕπαρξης τῶν ad hoc ἐκείνων νόμων. Ἂς φαντασθοῦμε, τώρα, τὸ ἀκόλουθο «νοητικὸ πείραμα»[24]: Ξεκινοῦμε ἀπὸ τὴν ὑπόθεση ἰσχύος τῆς Εὐκλείδειας Γεωμετρίας καὶ θεωροῦμε πὼς οἱ πλευρὲς ἑνὸς ἀρκετὰ μεγάλου τριγώνου εἶναι ὀπτικὲς ἀκτίνες, ὡς Εὐκλείδειες εὐθεῖες· ἀκόμη δεχόμαστε, ὅτι ὅλα τὰ ἐξαγόμενα μετρήσεων σχετικὰ μὲ τὸ ἄθροισμα τῶν γωνιῶν τοῦ ὑπόψη τριγώνου διαφέρουν ἀπὸ δύο ὀρθὲς (συνυπολογιζομένου τοῦ σφάλματος μέτρησης). Γιὰ τὴν ἐξήγηση τῆς ἀπόκλισης τοῦ ἀθροίσματος ἀπὸ τὶς δύο ὀρθές, ἂς ὑποθέσουμε ὅτι καταφεύγουμε στὴν ὕπαρξη κάποιου δυναμικοῦ πεδίου, ποὺ ἀποκλίνει τὶς ὀπτικὲς ἀκτίνες ἀπὸ τὴν εὐθυγραμμία. Ἀπὸ τὴ στιγμὴ ποὺ ἕνα τέτοιο δυναμικὸ πεδίο

23. H. Poincaré, *La Science et l'Hypothèse*, Paris, Flammarion, 1970. Βλ. καὶ τὴ γερμανικὴ μετάφραση ποὺ ἔγινε ἀπὸ τοὺς F. κ. L. Lindemann, Leipzig, Teubner, 1906, 75-76.

24. Nagel, ὅ.π. 264.

δὲν μπορεῖ νὰ ἐνταχθεῖ στὸ πλαίσιο τῶν λοιπῶν ὑποθέσεών μας τῆς Φυσικῆς ἤ, τουλάχιστον, ἀπὸ τὴ στιγμὴ ποὺ ἕνα τέτοιο δυναμικὸ πεδίο δὲν κατορθώνεται νὰ ἐντοπισθεῖ πειραματικά, ἀπὸ τὴ στιγμὴ αὐτή, σύμφωνα μὲ τὴν ἄνω παρατήρηση, ἡ λύση τοῦ προβλήματος πρέπει νὰ βρεθεῖ στὴν ἐγκατάλειψη τῆς ἀρχικῆς μας παραδοχῆς, ὅτι δηλαδὴ ἡ Γεωμετρία ποὺ ξεκινήσαμε ἦταν Εὐκλείδεια. Παρατηροῦμε ἀκόμη ὅτι ἡ παραδοχὴ ad hoc νόμων πρέπει ν' ἀποφεύγεται, ἂν θέλει κανεὶς νὰ ἔχει κάποια ἀντικειμενικὴ γνώση τῶν φυσικῶν φαινομένων, πράγμα ποὺ δὲν μπορεῖ νὰ γίνει μὲ ὑποθέσεις ἐκ τῶν προτέρων συμφωνημένες.

Ἡ κατ' ἀρχὴν τώρα ἐφαρμοσιμότητα μιᾶς καθαρῆς Γεωμετρίας στὴν ἐμπειρικὴ (φυσικὴ) πραγματικότητα ὀφείλεται στὸ γεγονὸς ὅτι «ἡ μεταβολὴ τῶν δύο παραμέτρων, τῆς διάστασης καὶ τῆς καμπυλότητας, ἐξασφαλίζει τὴν πληρότητα τῶν δυνατῶν καθαρῶν Γεωμετριῶν, σὲ τρόπο ὥστε κάποια ἀπ' αὐτὲς ν' ἀνταποκρίνεται (νὰ ἰσχύει) στὴν ἐμπειρικὴ πραγματικότητα»[25].

13

Λίγες λέξεις, τέλος, καὶ γιὰ τὶς διακλαδώσεις τῆς Συνολοθεωρίας πού, ὅπως εἴπαμε, χρωστοῦν τὴν ἐμφάνισή τους στὴν περίφημη ἐπινόηση τοῦ P. J. Cohen ποὺ ἦταν ὅμως τελείως ἄγνωστες στὸν ἴδιο τὸ δημιουργὸ τῆς Συνολοθεωρίας.

Ἕνα μεγάλο πλῆθος ἐρευνητῶν συμφωνεῖ στὸ ὅτι οἱ διακλαδώσεις τῆς Συνολοθεωρίας παρουσιάζουν πλήρη ἀναλογία μὲ τὶς ἤδη ἐξετασθεῖσες διακλαδώσεις τῆς Εὐκλείδειας Γεωμετρίας. Τὸ πρόβλημα τῆς συμβατικότητας ἢ μὴ κατὰ τὴν ἐκλογὴ μεταξὺ τῶν νέων διακλαδώσεων σὲ σχέση μὲ τὴν ἐμπειρία, πρόβλημα ποὺ περιέχεται στὴν ἀναφερόμενη ἀναλογία, δὲν πρόκειται νὰ μᾶς ἀπασχολήσει στὴν παροῦσα ἐργασία. Ἐδῶ θὰ περιορισθοῦμε μόνο στὶς ἀκόλουθες παρατηρήσεις:

Ὡς γνωστό, ἐκτεταμένοι τομεῖς τῆς μαθηματικῆς γνώσης εἶναι δυνατὸ ν' ἀναχθοῦν στὴ Συνολοθεωρία. Μεταξὺ αὐτῶν καταλέγεται καὶ ἡ Θεωρία τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν. Γιατί, ἡ δυνάμει ἀκολουθία τῶν ἀριθμῶν αὐτῶν παριστάνει τὸ πλῆρες σύστημα γιὰ ὅλα τὰ εἴδη πεπερασμένων συνόλων. Ἀλλὰ μὲ τὴν ἀναγωγὴ αὐτὴ διασαφηνίζεται καὶ ἡ δυνατότητα τῆς ἐμπειρικῆς ἐφαρμογῆς τοῦ διακεκριμένου συνόλου τῶν φυσικῶν ἀριθμῶν.

Στοὺς φυσικοὺς ἀριθμοὺς βασίζεται καὶ ἡ ἀνάπτυξη ὁλόκληρης τῆς Ἀριθμητικῆς, μέσω τῶν ρητῶν (συμμέτρων) καὶ τῶν ἀρρήτων (ἀσυμμέτρων) ἀριθμῶν. Ἔτσι, μαζὶ μὲ τὸ διακεκριμένο, ἡ Ἀριθμητικὴ πραγματεύεται καὶ τὸ συνεχές. Βέβαια, στοὺς ἄρρητους ἀριθμούς, ποὺ

25. Kraft, ὅ.π. 55.

εἰσάγονται μὲ ἀκολουθίες ρητῶν, λείπει τὸ ἀντίστοιχό τους στὸν ἐμπειρικὸ κόσμο, ὅπου τὸ ἄπειρο δὲν πραγματοποιεῖται πουθενά. Αὐτό, ὡστόσο, δὲν ἐμποδίζει τὴν ἐμπειρικὴ ἐφαρμογὴ τῆς Ἀριθμητικῆς, ἐφαρμογὴ ποὺ κατορθώνεται μὲ τὴν ἀντικατάσταση προσεγγιζουσῶν τιμῶν στὴ θέση τῶν ὁριακῶν τους δεδομένων.

14

Καταλήγοντες παρατηροῦμε, ὅτι καὶ σ' αὐτὴ τὴ Λογική, ποὺ βασίζονται οἱ μαθηματικὲς ἀποδείξεις, δυνατὸ νὰ ἔχουμε διακλαδώσεις σχετικὰ μὲ τὴν ἀλλαγὴ τῆς λογικῆς ἀρχῆς τοῦ ἀποκλειομένου τρίτου. Σὲ ἀντίθεση πρὸς τὶς λογικὲς ἀρχὲς τῆς ταυτότητας καὶ τῆς ἀντίφασης—ποὺ χωρὶς αὐτὲς θὰ ἦταν ἀδιανόητη ἡ ὕπαρξη τάξης στὴ σκέψη— ἡ ἰσχὺς τῆς ἀρχῆς τοῦ ἀποκλειομένου τρίτου δὲν εἶναι ἀπόλυτη. Πραγματικά, μιὰ μὴ ἀληθὴς ἀπόφανση δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκη (στὰ Μαθηματικά) ψευδής, ὅπως δὲν εἶναι κατ' ἀνάγκην ἀληθὴς μιὰ μὴ ψευδὴς ἀπόφανση. Ἡ μὴ ἀληθὴς ἀπόφανση μπορεῖ νὰ εἶναι ἁπλῶς πιθανή. Ὑπάρχουν, φυσικά, πολλοὶ βαθμοὶ πιθανότητας, ὅπως ὑπάρχουν καὶ πολλοὶ βαθμοὶ ἀπροσδιοριστίας, κατὰ τὴν ἐπίλυση ἑνὸς μαθηματικοῦ προβλήματος στὸ ὁποῖον ἡ λύση δὲν δίνεται οὔτε μ' ἕνα ναί, οὔτε μ' ἕνα ὄχι.

Εἶναι ἤδη γνωστό, ἀπὸ τὴν ἐποχὴ τοῦ L. E. J. Brouwer (1881-1966), ὅτι ἡ ἀπόκριση σὲ προβλήματα τῶν ὁποίων ἀγνοοῦμε τὴ λύση ἐνδέχεται νὰ εἶναι ἀπροσδιόριστη. Ἐπίσης εἶναι γνωστὸ ἀπὸ τὸν K. Goedel (1906-1978;), ὅτι ὑπάρχουν ἀποφάνσεις ποὺ μέσα σὲ κατάλληλο σύστημα δὲν εἶναι οὔτε ἀληθεῖς, οὔτε ψευδεῖς. Αὐτὴ ἡ ἴδια ἡ ἔλλειψη τῆς δυνατότητας τοῦ ν' ἀποκρινόμαστε μ' ἕνα ναὶ ἢ μ' ἕνα ὄχι σὲ κάθε μαθηματικὸ πρόβλημα δὲν ἰσοδυναμεῖ μὲ τίποτε ἄλλο παρὰ μὲ τὴν ἔλλειψη ἰσχύος, σ' ὅλες τὶς περιπτώσεις, τῆς ἀρχῆς τοῦ ἀποκλειομένου τρίτου.

Ἡ ὕπαρξη διακλαδώσεων γιὰ τὴ Λογική, δημιουργεῖ καὶ γι' αὐτὴ προβλήματα ἀνάλογα μ' ἐκεῖνα ποὺ ἐξετάσαμε πιὸ πάνω. Ὡστόσο, καὶ ἡ ἐξέταση τῶν προβλημάτων αὐτῶν ξεπερνᾶ τὰ ὅρια τῆς παρούσας ἐργασίας.

ON THE PROBLEMATIC OF UNIQUENESS IN MATHEMATICS

Summary.

The ramifications of Euclidean geometry initiated by the invention of its non Euclidean alternatives, as well as the ramifications of Cantor's Set Theory derived by a recent proof of independency of the continuum hypothesis, gave rise to following question: Which of these ramifications is

applicable to empirical (physical) reality? We say that a pure mathematical theory is applicable to empirical reality, if there is an isomorphy between its relations and the corresponding empirical data. This isomorphy is to be established by mesure of space and time, i.e. by experiment. In the case there is only one of the ramifications applicable to empirical reality, we speak about the uniqueness of this theory.

To give a critical report on this issue is the aim of the present paper.

On the past, prominent scholars maintained that concerning geometry the answer to the above question was a matter of convention or definition. So, according to H. Poincaré, there is not an experiment permitting to answer for the empirical status between Euclidean and non Euclidean geometries; because, we cannot maintain that certain phenomena which are possible in the Euclidean are no possible e.g. in the hyperbolic geometry. Therefore, it depends on convention to determine which of these geometries holds in the empirical world.

This conventionalistic thesis is correct in case we restrict ourselves to geometries of constant curvature, i.e. to parabolic- (Euclidean), hyperbolic- and spherical geometry. As is well known, if we have two of these pure (postulational) geometries then no true interpretation can be given to both theories which interprets corresponding terms in the same manner: The two geometries are incompatible. But, if different interpretations are given to no corresponding terms, then the two theories are not always incompatible. So, any two of the three geometries of constant curvature are compatible if suitable different interpretations are given to their corresponding terms. The three geometries are formally intertranslatable.

The situation is an other one in respect to Riemannian geometries of no constant curvature. According to General Theory of Relativity, the empirical applicability of Riemannian geometries depends on the distribution of mass. Because this distribution is determined on the experience, it follows that the question, which Riemannian geometry is empirically true, is uniquelly determined by the empirical (physical) reality. On the other hand, in the variation of the two factors, the curvature and the number of dimensions, there is a «formationlaw» for all possible manifolds, i.e. for all possible spaces.

The uniqueness problem of geometry does not entails the behavior of the same problem for other mathematical fields. Special attention must be given, concerning uniqueness, as well for Arithmetic as even for Set Theory.

Athens Philon Vassiliou