C. PIRON - A. MALASPINAS, Genève

Η ΠΕΡΙΓΡΑΦΗ ΕΝΟΣ ΦΥΣΙΚΟΥ ΣΥΣΤΗΜΑΤΟΣ ΚΑΙ Η ΚΛΑΣΙΚΗ ΠΡΟΫΠΟΘΕΣΗ

Ἕνα φυσικὸ σύστημα εἶναι ἕνα μέρος τῆς πραγματικότητας, ποὺ ἔχουμε ἀπομονώσει, μέσα στὸ χωροχρόνο, ἀπὸ τὸ ὑπόλοιπο σύμπαν καὶ τοῦ ὁποίου ὁ φυσικὸς δὲν ἀποτελεῖ μέρος.

Ὁ σκοπὸς τῆς φυσικῆς εἶναι διπλός: ἀπὸ τὴ μιὰ νὰ περιγράψει τὸ σύστημα μέσα στὴν πραγματικότητά του, ποὺ νοεῖται ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὸ τί πιστεύει ἢ γνωρίζει ὁ παρατηρητής· ἀπὸ τὴν ἄλλη νὰ προβλέψει τὶς δυνατὲς κινήσεις, εἴτε ἴδιες εἴτε αὐτὲς ποὺ ὀφείλονται σὲ ἐξωτερικὲς ἐπιδράσεις[1]. Γιὰ νὰ πετύχουμε αὐτὸ τὸ σκοπὸ ἐπεξεργαζόμαστε μιὰ θεωρία, ποὺ πρέπει νὰ ἔχει ἀρκετὴ ἀκρίβεια ὥστε νὰ μᾶς ἐπιτρέπει νὰ περιγράψουμε ὅ,τι ἐπιθυμοῦμε. Πρέπει ὅμως νὰ εἶναι καὶ ἀρκετὰ ἁπλὴ ὥστε νὰ περιλαμβάνει σὲ μιὰ γενικὴ εἰκόνα τὶς δυνατότητες τοῦ συστήματος καὶ νὰ ἐπιτρέπει σαφεῖς ὑπολογισμούς. Γι' αὐτὸ κάθε θεωρία εἶναι ἕνα πρότυπο, δηλαδὴ μιὰ ἐξιδανίκευση, ποὺ εἶναι ἀκριβὴς καὶ σύμμορφη πρὸς τὴν πραγματικότητα ὡς πρὸς ὁρισμένα σημεῖα ἀλλὰ καὶ μερικὲς φορὲς κάπως «χοντροκομμένη» ὡς πρὸς ἄλλα.

Κάθε πρότυπο βασίζεται σὲ μιὰ περιγραφὴ τοῦ φυσικοῦ συστήματος ποὺ θεωροῦμε. Γιὰ νὰ περιγράψουμε ἕνα δεδομένο σύστημα ἀναφέρουμε τὶς ἰδιότητές του, ποὺ εἶναι δύο εἰδῶν: αὐτὲς ποὺ τὸ σύστημα ἔχει στὸ παρόν, δηλαδὴ στὴν πράξη, καὶ αὐτὲς ποὺ θὰ μποροῦσε νὰ ἀποκτήσει εἴτε ἀπὸ μόνο του εἴτε ἐξαναγκασμένο ἀπὸ ἐξωτερικὲς ἐπιδράσεις. Τὶς πρῶτες τὶς ὀνομάζουμε π ρ α γ μ α τ ι κ έ ς, τὶς δεύτερες δ υ ν η τ ι κ έ ς. Τὸ σύνολο, ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ ὅλες τὶς πραγματικὲς ἰδιότητες τοῦ φυσικοῦ συστήματος, τὸ ὀνομάζουμε κ α τ ά σ τ α σ η (τοῦ συστήματος). Κατὰ τὴ διάρκεια τῆς ἐξέλιξης ἡ κατάσταση ἀλλάζει. Μερικὲς δυνητικὲς ἰδιότητες πραγματοποιοῦνται, ἐνῶ ἄλλες, πραγματικές, χάνονται γιὰ νὰ εἶναι πιὰ μόνο δυνητικές[2].

1. Ὁ φυσικὸς λοιπὸν ἐξηγώντας τὴν φύση δὲν μπορεῖ νὰ ἀρκεστεῖ στὸ «πῶς», ἀλλὰ ὀφείλει νὰ ἀντιμετωπίσει τὸ «γιατί».

2. Υἱοθετήσαμε ἐδῶ ὄχι μόνο τὴν ὁρολογία ἀλλὰ καὶ τὴν πραγματιστικὴ ἄποψη τοῦ Ἀριστοτέλη. Ἡ ἰδιότητα τοῦ ἠλεκτρονίου νὰ εἶναι ἐντοπισμένο σὲ μιά περιοχὴ τοῦ χώρου πρέπει νὰ συγκριθεῖ μὲ τὴν ἰδιότητα τοῦ ἀνθρώπου νὰ εἶναι «μουσικός», ὅπως τὸ ὁρίζει ὁ Ἀριστοτέλης στὰ *Φυσικὰ* Ι, κεφάλαιο 7, 189b 30 ἐπ.

Ἀφοῦ διευκρινίσουμε καὶ ἐξετάσουμε διεξοδικὰ τὴν ἔννοια τῆς ἰδιότητας, θὰ ἐπεξεργαστοῦμε μιὰ μαθηματικὴ δομὴ γιὰ νὰ περιγράψουμε τὸ σύνολο τῶν ἰδιοτήτων ἑνὸς φυσικοῦ συστήματος μὲ κάθε γενικότητα. Μ' αὐτὸν τὸν τρόπο θὰ ὑπογραμμίσουμε τὴν προϋπόθεση τοῦ κλασικοῦ φυσικοῦ, ποὺ περιορίζοντας τὴ γενικὴ περίπτωση ἐξαλείφει αὐθαίρετα τὰ ἰδιαίτερα χαρακτηριστικὰ τῶν κβαντικῶν φυσικῶν συστημάτων.

Ὅταν ὁ φυσικὸς ἰσχυρίζεται ὅτι τὸ σύστημα ποὺ θεωρεῖ ἔχει κατὰ τὸ παρὸν μιὰ ὁρισμένη ἰδιότητα, μπορεῖ γιὰ νὰ στηρίξει τὸν ἰσχυρισμό του νὰ προτείνει μιὰ δοκιμασία, δηλαδὴ ἕνα πείραμα μὲ προκαθορισμένο ἀποτέλεσμα. Ἂν αὐτὸ τοῦ ζητηθεῖ, ὀφείλει νὰ τὸ ἐκτελέσει. Στὴν περίπτωση ποὺ τὸ ἀποτέλεσμα εἶναι τὸ ἀναμενόμενο, τὰ λεγόμενα τοῦ φυσικοῦ εἶναι ἐπιβεβαιωμένα· ἀλλιῶς ὀφείλει νὰ ἀναθεωρήσει τὴ θεωρία του[3]. Κατὰ κανόνα τὸ πείραμα αὐτὸ ἀνατρέπει σοβαρότατα τὴν κατάσταση τοῦ συστήματος. Ἔτσι ἀκόμα κι ἂν εἶχε τὴν ἰδιότητα στὴν ὁποία δοκιμάστηκε, δὲν θὰ τὴν ἔχει πιὰ μετὰ τὴ δοκιμασία. Μὲ ἄλλα λόγια, ὅταν βεβαιώνουμε ὅτι ἕνα φυσικὸ σύστημα ἔχει κάποια ἰδιότητα, ἐννοοῦμε ὅτι τὸ τάδε πείραμα, ποὺ θὰ μπορούσαμε νὰ ἐκτελέσουμε, θὰ εἶχε ἕνα ὁρισμένο ἀποτέλεσμα, ἂν πραγματικὰ τὸ ἐκτελούσαμε.

Ὁρισμός: Ὀνομάζουμε ἐρώτημα κάθε πείραμα, ποὺ ὁδηγεῖ σὲ μιὰ ἐναλλακτικὴ δυνατότητα, τῆς ὁποίας οἱ ὅροι εἶναι «ναὶ» καὶ «ὄχι». Πιὸ σχηματικὰ γιὰ νὰ ὁρίσουμε ἕνα ἐρώτημα χρειαζόμαστε:

1. Τὸ ἢ τὰ ὄργανα.
2. Τὶς ὁδηγίες χρήσης.
3. Ἕνα μονοσήμαντο κανόνα, ποὺ νὰ ἐπιτρέπει τὴν ἑρμηνεία τοῦ ἀποτελέσματος, ὅποιο κι ἂν εἶναι — τὸ «ναί» ἀντιστοιχεῖ τότε στὸ ἀναμενόμενο ἀποτέλεσμα, τὸ «ὄχι» σὲ ὅλα τὰ ἄλλα.

Μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε πολλὰ ἐρωτήματα, ποὺ νὰ ἀναφέρονται σὲ ἕνα δεδομένο φυσικὸ σύστημα. Ἔστω α ἕνα ἐρώτημα, ποὺ ἀνήκει σὲ ἕνα σύνολο ἀπὸ ἐρωτήματα. Ὁρίζουμε τὸ ἀντίθετο ἐρώτημα $a^{\sim}$, ἐναλλάσσοντας τοὺς ρόλους τοῦ «ναὶ» καὶ τοῦ «ὄχι». Ἐπίσης ἐὰν a_j $j \in J$ εἶναι ἕνα γένος ἀπὸ ἐρωτήματα, ὁρίζουμε τὸ ἐρώτημα γινόμενο, $\Pi_J\, a_j$, ὡς ἑξῆς:

1. Παίρνουμε ὅλα τὰ ὄργανα καὶ τὶς ὁδηγίες χρήσης, ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὰ a_j.
2. Γιὰ νὰ ἐκτελέσουμε τὸ πείραμα ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ $\Pi_J\, a_j$ πρέπει, ἐξ ὁρισμοῦ, νὰ διαλέξουμε ἐλεύθερα (ἢ τυχαῖα) ἕνα ἀπὸ τὰ ἐρωτήματα a_j καὶ νὰ ἐκτελέσουμε τὸ ἀντίστοιχο πείραμα.

---

3. Εἶναι ἡ ὑποταγὴ στὸ πείραμα, ποὺ χαρακτηρίζει τὴν ἐπιστημονικὴ μέθοδο καὶ ὄχι τὸ εἶδος τοῦ πειράματος. Παρατηροῦμε ἀκόμα ὅτι ἡ θεωρία πάντα προηγεῖται καὶ ὅτι τὸ πείραμα λογικὰ δὲν μπορεῖ νὰ ἀποδείξει τὴ θεωρία παρὰ μόνο νὰ τὴ διαψεύσει.

3. Ἀποδίδουμε στὸ $\Pi_J\, a_j$ τὴν ἀπάντηση «ναί» ἢ «ὄχι» ποὺ βρήκαμε.

Μποροῦμε νὰ κλείσουμε ἕνα σύνολο ἀπὸ ἐρωτήματα ὡς πρὸς τὶς (μαθηματικὲς) πράξεις «ἀντίθετο» καὶ «γινόμενο». Ἀρκεῖ νὰ τοῦ προσθέσουμε ὅλα τὰ ἀντίθετα ἐρωτήματα καὶ κατόπιν ὅλα τὰ δυνατὰ ἐρωτήματα «γινόμενο». Πρέπει νὰ παρατηρήσουμε ὅτι τὸ $(\Pi_J\, a_j\,)^\sim$, τὸ «ἀντίθετο» ἀπὸ τὸ ἐρώτημα «γινόμενο», δὲν εἶναι παρὰ τὸ $\Pi_J\,(\alpha_i\,{\sim})$, τὸ ἐρώτημα «γινόμενο» τῶν ἀντιθέτων.

Ἔστω Q τὸ σύνολο ἀπὸ ὅλα τὰ ἐρωτήματα, ποὺ μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε γιὰ ἕνα φυσικὸ σύστημα.

Ὁρισμός: Λέμε ὅτι τὸ ἐρώτημα α εἶναι ἰσχυρότερο ἀπὸ τὸ β, ἐὰν ἡ ἀπάντηση «ναὶ» εἶναι σίγουρη γιὰ τὸ β, κάθε φορὰ ποὺ εἶναι σίγουρη γιὰ τὸ α. Συμβολικὰ σημειώνουμε $\alpha<\beta$. Πρόκειται γιὰ τὴν ἔκφραση ἑνὸς φυσικοῦ νόμου σχετικοῦ μὲ τὸ θεωρούμενο σύστημα. Ἡ σχέση $\alpha<\beta$ εἶναι μεταβατική,

$$\alpha<\beta \ \text{καὶ} \ \beta<\gamma \ \rightarrow \ \alpha<\gamma$$

καὶ δίνει τὴ δυνατότητα νὰ ὁρίσουμε μιὰ σχέση ἰσοδυναμίας στὸ Q.

Ὁρισμός: Τὸ α εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ β, ἐὰν — καὶ μόνο ἐὰν — τὸ α εἶναι ἰσχυρότερο ἀπὸ τὸ β καὶ τὸ β εἶναι ἰσχυρότερο ἀπὸ τὸ α.

Συμβολικά:

$$\alpha\sim\beta \ \longleftrightarrow \ \alpha<\beta \ \text{καὶ} \ \beta<\alpha.$$

Ὁρισμός: Ὀνομάζουμε πρόταση μιὰ τάξη ἰσοδυναμίας ἀπὸ ἐρωτήματα. Σημειώνουμε a τὴν τάξη ἰσοδυναμίας, ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ ἐρώτημα α. Ἂν τὸ α εἶναι ἀληθινό, τότε ὅλα τὰ ἐρωτήματα ἰσοδύναμα μὲ τὸ α εἶναι ἀληθινά, καὶ λέμε ὅτι ἡ πρόταση a εἶναι ἀληθινή[4].

Σὲ κάθε πρόταση, ποὺ εἶναι ὁρισμένη γιὰ τὸ θεωρούμενο φυσικὸ σύστημα, ἀντιστοιχεῖ μιὰ ἰδιότητα τοῦ συστήματος. Ἡ ἰδιότητα αὐτὴ εἶναι πραγματική, ἂν ἡ πρόταση εἶναι ἀληθινή· ἂν ὄχι, ἡ ἰδιότητα εἶναι δυνητική.

Ἔστω L τὸ σύνολο ἀπὸ προτάσεις, ὁρισμένες γιὰ ἕνα δεδομένο σύστημα. Αὐτὸ τὸ σύνολο κατέχει μιὰ σχέση (μερικῆς) διάταξης:

$a<b$ σημαίνει $\alpha<\beta\ \forall\alpha\in a$ καὶ $\forall\beta\in b$, ὅπου α καὶ β εἶναι ἐρωτήματα, ποὺ ἀνήκουν ἀντίστοιχα στὶς προτάσεις $a\in L$ καὶ $b\in L$. Αὐτὴ ἡ σχέση εἶ-

4. Ὁ ὅρος πρόταση χρησιμοποιεῖται ἐδῶ μὲ μιὰ ἀκριβῆ σημασία. Εἶναι ὁ καθιερωμένος ὅρος, παρόλο ποὺ συχνὰ ὁδηγεῖ σὲ συγχύσεις ἀκόμα καὶ στὸν τομέα τῆς ἀξιωματικῆς φυσικῆς.

ναι μεταβατική, καὶ ἀπὸ τὸν ὁρισμὸ τῆς πρότασης ὡς τάξης ἰσοδυναμίας συνάγουμε:

$$a < b \text{ καὶ } b < a \longleftrightarrow a = b$$

Θεώρημα: Τὸ σύνολο τῶν προτάσεων L, ἐφοδιασμένο μὲ τὴν παραπάνω σχέση διάταξης, εἶναι ἕνα πλῆρες πλέγμα (treillis complet).

Ἀπόδειξη: Πρέπει νὰ δείξουμε ὅτι κάθε ὑποσύνολο δέχεται ἕνα μέγιστο κατώτερο καὶ ἕνα ἐλάχιστο ἀνώτερο πέρας. Ἔστω a_j, $j \in J$ προτάσεις τοῦ L. Ἄς διαλέξουμε ἀπὸ κάθε a_j ἕνα ἐρώτημα α_j κι ἄς ἐξετάσουμε τὸ ἐρώτημα γινόμενο $\Pi_J\, a_j$. Αὐτὸ τὸ ἐρώτημα ἀνήκει ἐπίσης στὸ σύνολο Q, ποὺ εἶναι κλειστὸ ὡς πρὸς τὴν πράξη γινόμενο. Ἡ ἀντίστοιχη πρόταση, ποὺ τὴ σημειώνουμε $\Lambda_J\, \alpha_j$, εἶναι τὸ μέγιστο κατώτερο πέρας τῶν a_j:

1. Εἶναι ἕνα κατώτερο πέρας:

$$\bigwedge \alpha_j < \alpha_j \ \forall\, j \in J$$

ἀφοῦ, ἐξ ὁρισμοῦ:

$$\Pi_J\, \alpha_j < \alpha_j \ \forall\, j \in J$$

2. Εἶναι τὸ μεγαλύτερο ἀπὸ τὰ κατώτερα πέρατα:

$$b < a_j \ \forall_j \in J \ \rightarrow \ b < \bigwedge J\, a_j$$

ἀφοῦ, ἐξ ὁρισμοῦ:

$$\beta < \alpha_j \ \forall_j\, \varepsilon\, J \ \rightarrow \ \beta < \Pi J\, \alpha_j$$

Ἀφοῦ ἀποδείξαμε ὅτι ἕνα μέγιστο κατώτερο πέρας ὑπάρχει, εἶναι εὔκολο νὰ ἀποδείξουμε ὅτι καὶ ἕνα ἐλάχιστο ἀνώτερο πέρας ὑπάρχει ἐπίσης. Ἔστω M τὸ σύνολο τῶν x ποὺ εἶναι ἰσχυρότερες ἀπὸ τὶς a_j. Τότε τὸ ἐλάχιστο ἀνώτερο πέρας $V_J\, a_J$, εἶναι τὸ μέγιστο κατώτερο πέρας τοῦ συνόλου M:

$$\bigvee J\, \alpha_j = \bigwedge_M x$$

Αὐτὴ ἡ κατασκευὴ ἔχει νόημα μιὰ καὶ ὑπάρχει πάντα ἕνα τουλάχιστον στοιχεῖο ἰσχυρότερο ἀπὸ ὅλες τὶς a_j, τὸ I, δηλαδὴ ἡ πρόταση ποὺ ἐξ ὁρισμοῦ εἶναι πάντα ἀληθινή, ἀνεξάρτητα ἀπὸ τὴν κατάσταση τοῦ συστήματος (μποροῦμε νὰ τὴν ὁρίσουμε μὲ τὸ ἀκόλουθο ἐρώτημα: κάνουμε ὁτιδήποτε στὸ σύστημα καὶ κάθε φορὰ δηλώνουμε ὅτι ἡ ἀπάντηση εἶναι «ναί»).

ὅ.ἔ.δ.

Εἶναι σημαντικὸ νὰ παρατηρήσουμε ὅτι, ὅπως εἴδαμε στὴν ἀπόδειξη,

$$«a_j \text{ ἀληθινή}» \ \forall_j \in J \ \longleftrightarrow \ «\bigwedge J\, a_j \text{ ἀληθινή}»$$

Μὲ ἄλλα λόγια, τὸ μέγιστο κατώτερο πέρας παίζει τὸν ἴδιο ρόλο μὲ τὸ λογικὸ «καί». Ἡ ἰδιότητα ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν $a \wedge b$ δὲν εἶναι τίποτα ἄλλο παρὰ «ἡ ἰδιότητα ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν a καὶ ἡ ἰδιότητα ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν b». Ἀντίθετα τὸ ἐλάχιστο ἀνώτερο πέρας δὲν παίζει τὸ ρόλο τοῦ λογικοῦ «ἤ»· μποροῦμε μονάχα νὰ ποῦμε ὅτι:

«a ἀληθινὴ» ἢ «b ἀληθινὴ» $\rightarrow$ «$a \vee b$ ἀληθινή»

Ἐὰν αὐτὴ ἡ συνεπαγωγὴ ἴσχυε καὶ πρὸς τὴν ἄλλη κατεύθυνση, τότε τὸ πλέγμα τῶν προτάσεων L θὰ ἦταν ἐπιμεριστικό, ὅπως εἶναι ἄλλωστε τὸ πλέγμα τῶν λογικῶν προτάσεων. Θὰ ἴσχυε δηλαδή:

$$a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c) \qquad \forall a, b, c \in L$$

Συνοπτικά, τὸ σύνολο τῶν ἰδιοτήτων ἑνὸς φυσικοῦ συστήματος συμπεριλαμβάνοντας τὶς πραγματικὲς ἀλλὰ καὶ τὶς δυνητικές, ἀποτελεῖ ἕνα πλῆρες πλέγμα[5].

Ἂς διευκρινίσουμε βαθύτερα τώρα τὴ δομὴ ἑνὸς τέτοιου πλέγματος. Θὰ προχωρήσουμε μὲ τρόπο ἀξιωματικό, γιατὶ αὐτὸς εἶναι ὁ μόνος αὐστηρὸς τρόπος γιὰ νὰ χρησιμοποιήσουμε τὴ μαθηματικὴ τεχνική. Φυσικὰ δὲν εἶναι δυνατὸν νὰ δικαιολογήσουμε λογικὰ τὰ ἀξιώματα. Θὰ δώσουμε ὅμως στὸ καθένα μιὰ φυσικὴ ἑρμηνεία, ποὺ μπορεῖ, μέχρις ἑνὸς σημείου, νὰ χρησιμεύσει ὡς δικαιολογία.

Ὁρίσαμε τὴν κατάσταση ἑνὸς συστήματος ὡς τὸ σύνολο τῶν πραγματικῶν του ἰδιοτήτων. Ἔτσι ἡ κατάσταση ἀντιστοιχεῖ στὸ ὑποσύνολο E τῶν προτάσεων, ποὺ εἶναι ἀληθινὲς γιὰ τὸ σύστημα ὅπως εἶναι στὸ παρόν. Μιὰ τέτοια κατάσταση χαρακτηρίζεται ἐντελῶς ἀπὸ μιὰ πρόταση, τὸ μέγιστο κατώτερο πέρας τῶν προτάσεων τοῦ E:

$$p = \bigwedge_E x$$

Ἀπὸ τὴ λογικὴ ἑρμηνεία τοῦ μέγιστου κατώτερου πέρατος ἕπεται ὅτι ἡ πρόταση p εἶναι ἀληθινή· δηλαδὴ $p \in E$ καὶ ἐπίσης, ἐὰν $p < y$ γιὰ κάποια $y \in L$, τότε ἡ y εἶναι ἀληθινὴ καὶ ἄρα $y \in E$. Ὥστε τὸ ὑποσύνολο E χαρακτηρίζεται ἀπὸ τὴν p, ἀφοῦ:

$$E = \{ x \mid p < x, x \varepsilon L \}.$$

5. Ἄρα τὸ σύνολο τῶν προτάσεων εἶναι ἕνα πλέγμα καὶ ὄχι ἕνα μερικὰ διατεταγμένο σύνολο, στὸ ὁποῖο τὰ μέγιστα κατώτερα καὶ ἐλάχιστα ἀνώτερα πέρατα ὑπάρχουν μονάχα γιὰ τὰ συμβιβαστὰ ζευγάρια στοιχείων. Ἕνα τέτοιο αἴτημα θέτουν ὁρισμένοι μὲ βάση μιὰ ἐξιδανίκευση τῆς ἔννοιας τοῦ φίλτρου, ποὺ εἶναι πολὺ πιὸ περιορισμένη ἀπὸ τὴν ἔννοια τοῦ ἐρωτήματος, ποὺ χρησιμοποιοῦμε ἐδῶ γιὰ τὴν κατασκευὴ τοῦ συνόλου τῶν προτάσεων. Βλ. π.χ. V. S. Varadarajan, *Geometry of Quantum Theory*, Vol. I, Princeton, D. van Nostrand Co. 1968.

Μία ὁποιαδήποτε πρόταση p δὲν ὁρίζει ὑποχρεωτικὰ μιὰ κατάσταση. Ἔτσι ἔχουμε τὸ ἀκόλουθο ἀξίωμα:

Ἀξίωμα τῆς μεγιστότητας: Ἐὰν ἡ p ὁρίζει μιὰ κατάσταση, τότε ἡ p εἶναι ἕνα ἄτομο τοῦ L, δηλαδὴ

$$a < p \quad \text{καὶ} \quad a \in L \rightarrow a = o \text{ ἢ } a = p,$$

ὅπου o εἶναι ἡ ἄτοπη πρόταση, πού, ἐξ ὁρισμοῦ, δὲν εἶναι ποτὲ ἀληθινή. Ἐὰν ἡ p, ποὺ ἀντιπροσωπεύει μιὰ κατάσταση, δὲν ἦταν ἕνα ἄτομο, τότε θὰ ὑπῆρχε μιὰ πρόταση a, διαφορετικὴ ἀπὸ τὴν o καὶ τὴν p, τέτοια ὥστε $a<p$. Θὰ ὑπῆρχε τότε μιὰ ἄλλη κατάσταση, γιὰ τὴν ὁποία ἡ a θὰ ἦταν ἀληθινή, πράγμα ποὺ θὰ ἦταν δυνατὸν ἀφοῦ $a \neq o$. Τὸ νέο σύνολο τῶν πραγματικῶν ἰδιοτήτων θὰ ἦταν μεγαλύτερο ἀπὸ τὸ ὑποσύνολο E. Τὸ σύστημα θὰ μποροῦσε ἔτσι νὰ περάσει στὴ νέα κατάσταση, ἀποκτώντας νέες ἰδιότητες χωρὶς νὰ ἐξαφανιστεῖ καμμιὰ ἀπὸ τὶς πραγματικές του ἰδιότητες, δηλαδὴ χωρὶς ἀντιστάθμισμα. Αὐτὸ μᾶς φαίνεται ἀπαράδεκτο. Γι αυτὸ καὶ θέτουμε αὐτὸ τὸ ἀξίωμα, ποὺ ἐκφράζει τὸν μεγιστοτικὸ χαρακτήρα τοῦ κάθε ὑποσύνολου E ποὺ ἀντιπροσωπεύει μιὰ κατάσταση. Ὑπάρχει λοιπὸν μιὰ ἀμφίρροπα μονοσήμαντη ἀντιστοιχία ἀνάμεσα στὰ ἄτομα τοῦ L καὶ τὶς δυνατὲς καταστάσεις τοῦ συστήματος. Κάθε ἄτομο ἀντιστοιχεῖ σὲ μία κατάσταση ἀφοῦ κάθε πρόταση, διαφορετικὴ ἀπὸ τὴν o, εἶναι, ἐξ ὁρισμοῦ, ἀληθινὴ σὲ ὁρισμένες περιπτώσεις. Αὐτὸ τὸ ἀξίωμα συνεπάγεται μιὰ σημαντικὴ ἰδιότητα γιὰ τὴ δομὴ τοῦ πλέγματος τῶν προτάσεων.

Ὁρισμός. Ἕνα πλέγμα L ποὺ ἔχει ἕνα ἐλάχιστο στοιχεῖο ὀνομάζεται ἀτομικό, ἐὰν γιὰ κάθε στοιχεῖο $x \in L, x \neq o$ ὑπάρχει ἕνα ἄτομο $p \in L$ τέτοιο ὥστε $p<x$.

Θεώρημα. Τὸ πλέγμα τῶν προτάσεων ἑνὸς φυσικοῦ συστήματος ποὺ ἱκανοποιεῖ τὸ ἀξίωμα τῆς μεγιστότητας εἶναι πάντα ἀτομικό.

Ἀπόδειξη. Ἐὰν ἡ x εἶναι μιὰ πρόταση ἑνὸς φυσικοῦ συστήματος, ποὺ ἱκανοποιεῖ τὸ ἀξίωμα τῆς μεγιστότητας, τότε ἐὰν ἡ x εἶναι διαφορετικὴ ἀπὸ τὴν ἄτοπη πρόταση, ἡ x εἶναι ἀληθινὴ γιὰ ὁρισμένες καταστάσεις. Ἄρα ὑπάρχει τουλάχιστον μιὰ ἀτομικὴ πρόταση $p<x$. ὅ.ε.δ.

Ὁρισμός: Δύο προτάσεις a καὶ b ὀνομάζονται συμβιβαστὰ συμπληρώματα (compléments compatibles), ἐάν:

1. ἡ a καὶ ἡ b εἶναι συμπληρώματα δηλ. $a \wedge b = o$ καὶ $a \vee b = I$
2. Ὑπάρχει ἕνα ἐρώτημα α τέτοιοι ὥστε $\alpha \in a$ καὶ $\alpha^{\sim} \in b$

Ὀνομάζουμε τὴν b συμβιβαστὸ συμπλήρωμα τῆς a καὶ συμβολικὰ γράφουμε $b = a'$.

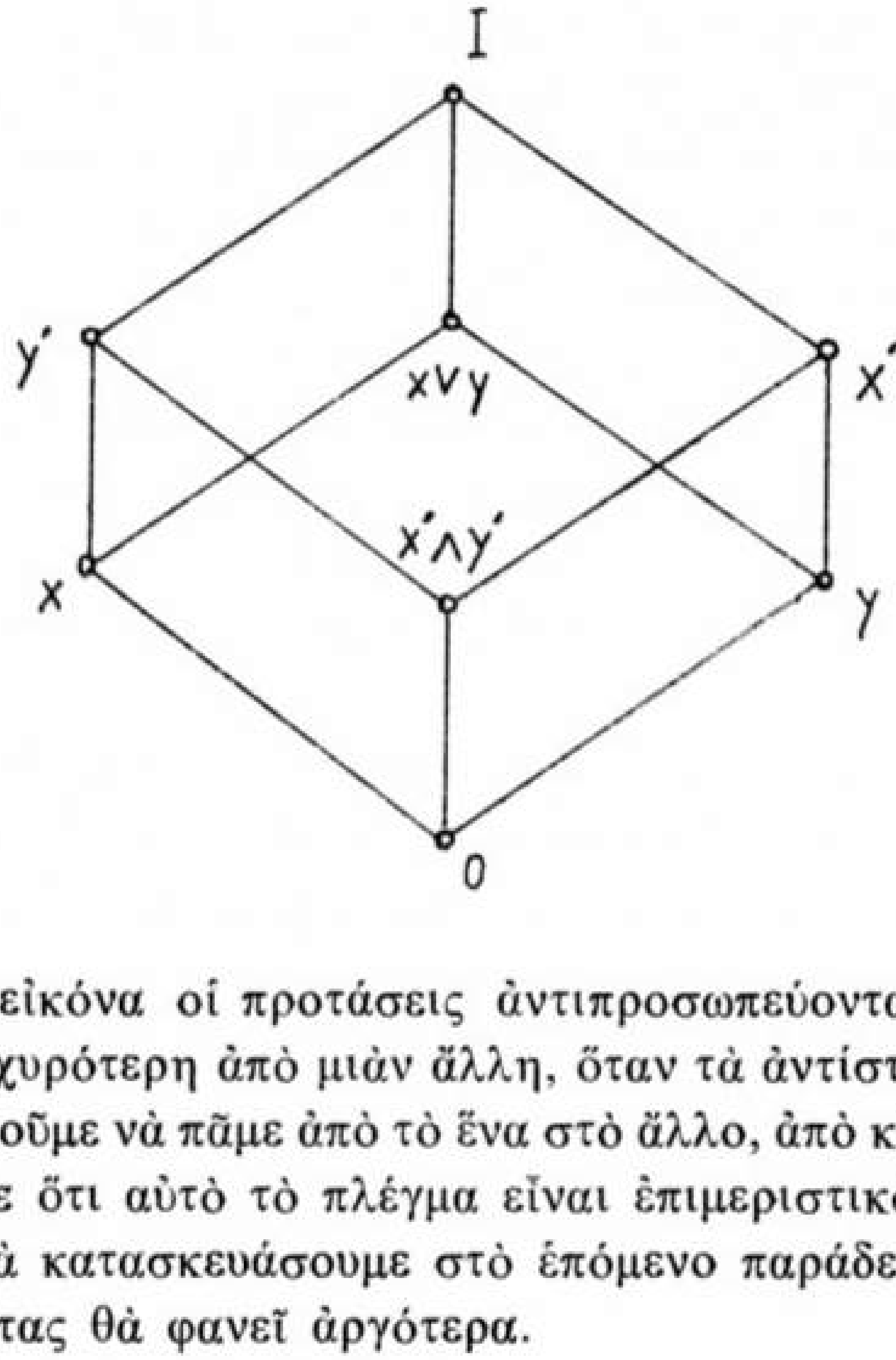
Ἀξίωμα C. Μποροῦμε νὰ βροῦμε τουλάχιστον ἕνα συμβιβαστὸ συμπλήρωμα σὲ κάθε πρόταση ἑνὸς φυσικοῦ συστήματος. Αὐτὸ τὸ ἀξίωμα στηρίζεται σ' ἕνα πλῆθος ἀπὸ εἰδικὲς περιπτώσεις. Θὰ ἀρκεστοῦμε ἐδῶ σὲ δύο παραδείγματα.

Παράδειγμα 1ο: Τὸ θεωρούμενο φυσικὸ σύστημα εἶναι ἕνα μπιζέλι. Ὁρίζουμε ἕνα ἐρώτημα ὡς ἑξῆς:

1. Ὄργανα: μιὰ «ψιλὴ» καὶ μιὰ «μέτρια» σίτα.
2. Ὁδηγίες χρήσης: κοσκινίζουμε τὸ μπιζέλι.
3. Ἐὰν τὸ μπιζέλι περάσει ἀπὸ τὴν ψιλὴ σίτα, ἡ ἀπάντηση εἶναι «ναὶ» καὶ τὸ ὀνομάζουμε «ψιλό». Αὐτὸ τὸ ἐρώτημα τὸ σημειώνουμε ψ.

Μποροῦμε νὰ ὁρίσουμε ἕνα ἄλλο ἐρώτημα: ἐὰν τὸ μπιζέλι δὲν περάσει ἀπὸ τὴ μέτρια σίτα, ἡ ἀπάντηση εἶναι «ναὶ» καὶ τὸ ὀνομάζουμε «χοντρό». Αὐτὸ τὸ ἐρώτημα τὸ σημειώνουμε χ. Ἔστω $y = \{\psi\}$ ἡ πρόταση ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ ψ, καὶ $x = \{\chi\}$ ἡ πρόταση ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ χ.

Βρίσκουμε τὸ ἀκόλουθο πλέγμα:



Σ' αὐτὴ τὴν εἰκόνα οἱ προτάσεις ἀντιπροσωπεύονται μὲ σημεῖα. Μιὰ πρόταση εἶναι ἰσχυρότερη ἀπὸ μιὰν ἄλλη, ὅταν τὰ ἀντίστοιχα σημεῖα εἶναι ἑνωμένα καὶ μποροῦμε νὰ πᾶμε ἀπὸ τὸ ἕνα στὸ ἄλλο, ἀπὸ κάτω πρὸς τὰ πάνω.

Παρατηροῦμε ὅτι αὐτὸ τὸ πλέγμα εἶναι ἐπιμεριστικό, σὲ ἀντίθεση μὲ τὸ πλέγμα ποὺ θὰ κατασκευάσουμε στὸ ἑπόμενο παράδειγμα. Ἡ σημασία αὐτῆς τῆς ἰδιότητας θὰ φανεῖ ἀργότερα.

Παράδειγμα 2ο. Τὸ θεωρούμενο φυσικὸ σύστημα εἶναι ἕνα γραμμικὰ πολωμένο φωτόνιο, ποὺ κινεῖται εὐθύγραμμα.

Ὁρίζουμε ἕνα ἐρώτημα α_φ ὡς ἑξῆς:

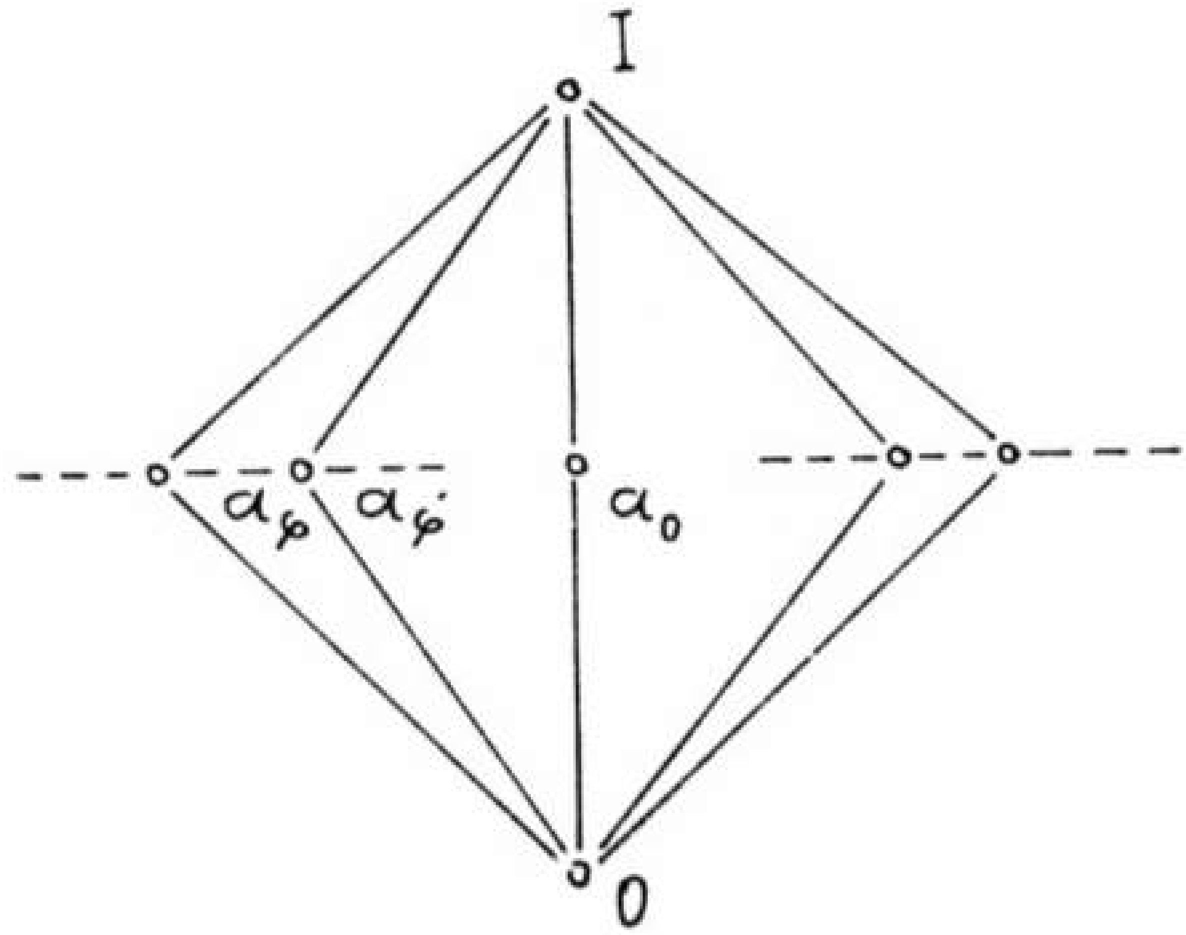
1. Ὄργανο: ἕνας πολωτὴς μὲ γωνία πόλωσης φ καὶ ἕνας μετρητὴς τοποθετημένος ἀπὸ πίσω.

2. Ὁδηγία χρήσης: τοποθετοῦμε τὸν πολωτὴ καὶ τὸν μετρητὴ στὸ πέρασμα τοῦ φωτόνιου.

3. Ἐὰν καταγράψουμε τὸ πέρασμα τοῦ φωτόνιου μέσα ἀπὸ τὸν πολωτή, ἡ ἀπάντηση εἶναι «ναί». Ἀλλιῶς εἶναι «ὄχι».

Τὸ πείραμα δείχνει ὅτι ἐὰν ἕνα φωτόνιο ἔχει ἤδη περάσει ἀπὸ ἕναν πολωτὴ μὲ γωνία πόλωσης φ, τότε ἔχει τὴν πραγματικὴ ἰδιότητα ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν «Τὸ α_φ εἶναι ἀληθινό» x. Ἐπὶ πλέον δὲν μποροῦμε ποτὲ νὰ βεβαιώσουμε μὲ σιγουριὰ ὅτι τὸ ἴδιο φωτόνιο θὰ πέρναγε ἀπὸ ἕναν πολωτὴ γωνίας φ καὶ ἕναν ἄλλο γωνίας φ′ ἐὰν $|\varphi\text{-}\varphi'| \neq o$ καὶ $|\varphi\text{-}\varphi'| \neq \pi$.

Ἔχουμε δηλαδὴ τὸ ἀκόλουθο πλέγμα:



Στὴν πραγματικότητα τὸ πλέγμα αὐτὸ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἄπειρα σημεῖα. Ἔστω a_φ ἡ πρόταση ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ ἐρώτημα α_φ. Τότε $a_\varphi \wedge a_{\varphi'} = o$ καὶ $a_\varphi \vee a_{\varphi'} = I$, ἐκτὸς ἂν $|\varphi\text{-}\varphi'| = o$ ἢ $|\varphi\text{-}\varphi'| = \pi$, ὁπότε $a_\varphi = a_{\varphi'}$. Ἀλλὰ ἡ a_φ καὶ ἡ $a_{\varphi'}$ δὲν εἶναι συμβιβαστὰ συμπληρώματα, παρὰ μόνο ἐὰν $\varphi' = \varphi + \pi/2$, γιατὶ τότε τὸ πείραμα δείχνει ὅτι $(\alpha_\varphi)^\sim = \alpha_{\varphi'}$.

Εἴμαστε τώρα σὲ θέση νὰ ἐξηγήσουμε τὴν κλασικὴ προϋπόθεση. Θὰ τὴ διατυπώσουμε ὡς ὑπόθεση:

Κλασικὴ ὑπόθεση: Ἐὰν οἱ προτάσεις a καὶ b εἶναι συμβιβαστὰ συμπληρώματα, τότε, ὅποια καὶ νὰ εἶναι ἡ κατάσταση τοῦ συστήματος, εἴτε «ἡ a εἶναι ἀληθινὴ» εἴτε «ἡ b εἶναι ἀληθινή». Γιὰ νὰ δικαιολογήσουμε αὐτὴ τὴν ὑπόθεση θὰ μπορούσαμε νὰ ἀκολουθήσουμε τὴν ἐπιχειρηματολογία τοῦ κλασικοῦ φυσικοῦ: Ἔστω ἕνα ἐρώτημα α τέτοιο ὥστε $\alpha^\sim \in a$ καὶ $\alpha \in b$. Ἐὰν ἐκτελούσαμε τὸ πείραμα ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ α, τότε μία ἀπὸ τὶς δύο ἀπαντήσεις, «ναὶ» ἢ «ὄχι», εἶναι σίγουρη, γιατὶ σύμφωνα μὲ τὴν ἀρχὴ τῆς αἰτιότητας ἡ ὁλομερὴς ἐξέλιξη τοῦ συστήματος καὶ τῶν ὀργάνων εἶναι ἐντελῶς καθορισμένη. Θὰ συμπεραίναμε λοιπὸν ὅτι εἴτε «ἡ a εἶναι ἀληθινὴ» εἴτε «ἡ b εἶναι ἀληθινή». Αὐτὸς ὁ συλλογισμὸς εἶναι λανθασμένος. Δὲν μποροῦμε νὰ συμπεράνουμε μ' αὐτὸ τὸν τρόπο ὅτι μιὰ ἀπὸ τὶς δύο ἀπαντήσεις εἶναι σίγουρη, γιατὶ τὸ πείραμα εἶναι καθαρὰ ὑποθετικὸ καὶ ἡ ἀρχὴ τῆς αἰτιότητας ἰσχύει μόνο ὅταν ἔχουμε ἤδη ξεκινήσει τὸ πείραμα. Ἄλλωστε τὸ δεύτερο παράδειγμα, τοῦ γραμμικὰ πολωμένου φωτόνιου, μᾶς δείχνει ὅτι ἡ κλασικὴ ὑπόθεση δὲν ἐπαληθεύεται πάντοτε.

Θεώρημα. Ἔστω L ἕνα πλέγμα προτάσεων ποὺ ἱκανοποιεῖ τὸ ἀξίωμα τῆς μεγιστότητας, τὸ ἀξίωμα C καθὼς καὶ τὴν κλασικὴ ὑπόθεση. Τότε τὸ L ταυτίζεται, ὡς πλέγμα, μὲ τὸ σύνολο τῶν ὑποσυνόλων τοῦ συνόλου τῶν δυνατῶν καταστάσεων, Ω, τοῦ συστήματος ποὺ θεωροῦμε. Ἀντίστροφα, ἐὰν τὸ L ταυτίζεται μὲ τὸ πλέγμα τῶν ὑποσυνόλων ἑνὸς συνόλου Ω καὶ ἐὰν ἱκανοποιεῖ τὸ ἀξίωμα τῆς μεγιστότητας καὶ τὸ ἀξίωμα C, τότε τὸ L ἱκανοποιεῖ καὶ τὴν κλασικὴ ὑπόθεση.

Ἀπόδειξη. Ἔστω ὅτι τὸ L ἱκανοποιεῖ τὸ ἀξίωμα τῆς μεγιστότητας. Τότε σὲ κάθε πρόταση $b \in L$ ἀντιστοιχεῖ ἕνα ὑποσύνολο μ (b), ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ τὰ ἄτομα $p < b$. Τὸ μ (b) περιέχεται στὸ Ω τὸ σύνολο τῶν δυνατῶν καταστάσεων καὶ ὁρίζει ἔτσι μιὰ ἀπεικόνιση, μ, τοῦ L στὸ P (Ω), τὸ σύνολο τῶν ὑποσυνόλων τοῦ Ω.

Αὐτὴ ἡ ἀπεικόνιση εἶναι ἀμφίρροπα μονοσήμαντη καὶ διατηρεῖ τὸ μέγιστο κατώτερο πέρας:

$$\mu\,(\alpha) \neq \mu\,(b) \;\longleftrightarrow\; a \neq b$$

$$\mu\,(\textstyle\bigwedge_J a_j\,) = \bigcap_J \mu\,(a_j\,)$$

Ἐὰν τώρα ἰσχύει καὶ τὸ ἀξίωμα C, τότε σὲ κάθε πρόταση ἀντιστοιχεῖ τουλάχιστον ἕνα συμβιβαστὸ συμπλήρωμα a΄, καὶ τὸ μ (a΄) περιέχεται στὸ συμπληρωματικὸ ὑποσύνολο τοῦ μ (a). Τέλος ἐὰν ἰσχύει ἡ κλασικὴ ὑπόθεση, τότε τὸ μ (a΄) ταυτίζεται μὲ τὸ συμπληρωματικὸ ὑποσύνολο τοῦ μ (a). Ἀλλὰ τότε ἕπεται ὅτι τὸ συμβιβαστὸ συμπλήρωμα εἶναι μοναδικὸ καὶ ὅτι κάθε ὑποσύνολο $\chi C \Omega$ εἶναι ἡ εἰκόνα μιᾶς πρότασης: τοῦ μέγιστου κατώτερου πέρατος τῶν συμβιβαστῶν συμπληρωμάτων, ποὺ ἀντιστοιχοῦν στὰ ἄτομα p ποὺ ἀνήκουν στὸ $C\chi$, τὸ συμπληρωματικὸ ὑποσύνολο τοῦ χ.

$$\mu\,(\textstyle\bigwedge p') = \bigcap \mu\,(p') = \bigcap Cp = C \bigcup p = CC\chi = \chi$$

Ἀντίστροφα: Ἔστω P (Ω) τὸ σύνολο τῶν ὑποσυνόλων τοῦ Ω. Ἐὰν τὸ L ταυτίζεται μὲ τὸ P (Ω) καὶ ἱκανοποιεῖ τὸ ἀξίωμα τῆς μεγιστότητας, τότε τὸ σύνολο τῶν δυνατῶν καταστάσεων εἶναι τὸ σύνολο τῶν ἀτόμων τοῦ P (Ω), δηλαδὴ τὸ Ω. Ἐὰν τὸ L ἱκανοποιεῖ καὶ τὸ ἀξίωμα C, τότε τὸ συμπληρωματικό του a, τὸ Ca, ποὺ εἶναι ἕνα ὑποσύνολο τοῦ Ω, ταυτίζεται μὲ τὸ συμβιβαστὸ συμπλήρωμα ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὸ a. Τέλος τὸ P (Ω) ἱκανοποιεῖ τὴν κλασικὴ ὑπόθεση, ἀφοῦ ὅποια κι ἂν εἶναι ἡ κατάσταση τοῦ συστήματος ἰσχύει, εἴτε «ἡ a εἶναι ἀληθινὴ» εἴτε ἡ «a′ εἶναι ἀληθινή».

ὅ. ἔ. δ.

Ἡ κλασικὴ ὑπόθεση χαρακτηρίζει τὸ πλέγμα τῶν προτάσεων τῶν κλασικῶν φυσικῶν συστημάτων. Στὴ μηχανικὴ π.χ. ἡ κατάσταση ἑνὸς συστήματος ἀντιπροσωπεύεται μὲ ἕνα σημεῖο μέσα σὲ ἕνα ὁρισμένο χῶρο, τὸν φασικὸ χῶρο. Οἱ ἰδιότητες τοῦ συστήματος ἀντιπροσωπεύονται μὲ ὑποσύνολα τοῦ φασικοῦ χώρου. Ὁ ρόλος τοῦ σύνολου Ω στὸ παραπάνω θεώρημα παίζεται λοιπὸν στὴ μηχανικὴ ἀπὸ τὸ φασικὸ χῶρο. Τὸ ἴδιο συμβαίνει καὶ μὲ ὅλα τ' ἄλλα κλασικὰ συστήματα. Τὸ σύνολο τῶν ὑποσυνόλων τοῦ Ω, P (Ω), εἶναι ἕνα ἐπιμεριστικὸ πλέγμα:

$$\alpha \cap (b' \cup c) = (\alpha \cap b)' \cup (\alpha \cap c) \quad \forall a, b, c \in P(\Omega),$$

ὅπως εἶναι γνωστὸ ἀπὸ τὴν θεωρία τῶν συνόλων.

Ἀλλὰ ἰσχύει καὶ τὸ ἀντίστροφο θεώρημα:

Θεώρημα: Ἐὰν τὸ πλέγμα τῶν προτάσεων, ἑνὸς φυσικοῦ συστήματος ποὺ ἱκανοποιεῖ τὸ ἀξίωμα τῆς μεγιστότητας καὶ τὸ ἀξίωμα C εἶναι ἐπιμεριστικό, τότε ἱκανοποιεῖ καὶ τὴν κλασικὴ ὑπόθεση.

Ἀπόδειξη: Πρέπει νὰ δείξουμε ὅτι ἐὰν οἱ προτάσεις a καὶ b εἶναι συμβιβαστὰ συμπληρώματα, τότε, ὅποια κι ἂν εἶναι ἡ κατάσταση τοῦ συστήματος, εἴτε «ἡ a εἶναι ἀληθινὴ» εἴτε «ἡ b εἶναι ἀληθινή». Ἀφοῦ τὸ πλέγμα εἶναι ἐπιμεριστικό, ἰσχύει γιὰ τὸ ἄτομο p ποὺ ἀντιστοιχεῖ στὴν δεδομένη κατάσταση:

$$p = p \wedge I = p \wedge (a \vee b) = (p \wedge a) \vee (p \wedge b)$$

Ἀλλὰ τὸ p εἶναι ἕνα ἄτομο. Ἄρα εἴτε $p \wedge a = p$ εἴτε $p \wedge a = o$. Ἐὰν λοιπὸν ἡ a δὲν εἶναι ἀληθινὴ γιὰ τὴν κατάσταση p, τότε $p \wedge a = o$ ἄρα $p = p \wedge b$), δηλαδὴ «ἡ b εἶναι ἀληθινή».

ὅ. ἔ. δ.

Ὅπως ἔχουμε ἀναφέρει, ἡ κλασικὴ ὑπόθεση δὲν ἐπαληθεύεται πάντοτε. Ἡ ὕπαρξη κβαντικῶν συστημάτων μᾶς ὑποχρεώνει νὰ τὴν ἀντικαταστήσουμε μὲ δύο ἀξιώματα.

Ἀξίωμα P. Στὸ πλέγμα τῶν προτάσεων ἑνὸς φυσικοῦ συστήματος ἰσχύει

$$a < b \rightarrow b' \vee (a' \wedge b) = a',$$

ὅπου οἱ a′ καὶ b′ εἶναι, ἀντίστοιχα, τὰ συμβιβαστὰ συμπληρώματα τῶν a καὶ b.

Ἀ ξ ί ω μ α A: Ἐὰν a καὶ a′ εἶναι δύο συμβιβαστὰ συμπληρώματα σὲ ἕνα προτασιακὸ πλέγμα ἑνὸς φυσικοῦ συστήματος καὶ p εἶναι ἕνα ἄτομο τέτοιο ὥστε νὰ ἰσχύει $p \wedge a' = o$, τότε ἡ $(p \vee a') \wedge a$ εἶναι ἐπίσης ἕνα ἄτομο.

Τὸ πλέγμα τῶν προτάσεων τοῦ φωτόνιου στὸ παράδειγμα δύο, ἱκανοποιεῖ αὐτὰ τὰ δύο ἀξιώματα. Ἄρα τὰ δύο ἀξιώματα ἔχουν περιεχόμενο διαφορετικὸ ἀπὸ τὴν κλασικὴ ὑπόθεση. Εἶναι μάλιστα λιγότερο ἰσχυρά, ὅπως δείχνει τὸ ἑπόμενο θεώρημα.

Θ ε ώ ρ η μ α: Ἐὰν πλέγμα τῶν προτάσεων ἑνὸς φυσικοῦ συστήματος ἱκανοποιεῖ τὸ ἀξίωμα τῆς μεγιστότητας, τὸ ἀξίωμα C καὶ τὴν κλασικὴ ὑπόθεση, τότε ἱκανοποιεῖ καὶ τὰ ἀξιώματα P καὶ A.

Ἀ π ό δ ε ι ξ η: Ἔστω a′ καὶ b′ συμβιβαστὰ συμπληρώματα τῶν a καὶ b ποὺ ἀνήκουν στὸ L. Ἐὰν τὸ L ἱκανοποιεῖ τὶς παραπάνω ὑποθέσεις, τότε

$$a < b \rightarrow b' < a'$$

ἢ καὶ $b' = a' \wedge b'$. Εἴδαμε ὅμως ὅτι ἕνα τέτοιο πλέγμα εἶναι ἐπιμεριστικὸ καὶ ἄρα:

$$b' \vee (a' \wedge b) = (a' \vee b') \wedge (b' \vee b') = a' \wedge (b' \vee b) = a',$$

ποὺ ἀποδείχνει ὅτι τὸ ἀξίωμα P ἰσχύει. Ἐὰν a καὶ b εἶναι συμβιβαστὰ συμπληρώματα, τότε

$$(p \vee b) \wedge a = (p \wedge a) \vee (b \wedge a) = p \wedge a.$$

Ἀλλὰ κατὰ τὴν κλασικὴ ὑπόθεση, ἐὰν $p \wedge b = o$, τότε $p \wedge a = p$, καὶ ἔτσι ἀποδείξαμε ὅτι καὶ τὸ ἀξίωμα A ἰσχύει.

ὅ.ἔ.δ.

Ὁ ρ ι σ μ ό ς: Ἕνα πλέγμα L λέγεται ὀ ρ θ ο κ α ν ο ν ι κ ὸ (orthomodulaire), ἐὰν εἶναι ἐφοδιασμένο μὲ μία ὀρθοσυμπλήρωση, δηλαδὴ μιὰ ἀπεικόνιση

$a \rightarrow a'$ (ὅπου a′ εἶναι τὸ συμπλήρωμα τοῦ a),

ἡ ὁποία:

1. ἀντιστρέφει τὴν διάταξη: $a < b \rightarrow b' < a'$
2. εἶναι μιὰ ἐνέλιξη: $(a')' = a$,

καὶ ἐὰν τὸ L εἶναι ἀσθενῶς κανονικὸ (faiblement modulaire), δηλαδὴ

$$a < b \rightarrow a \vee (b \wedge a') = b$$

Ἀπὸ τὸ ἀξίωμα P συνάγουμε ὅτι τὸ πλέγμα τῶν προτάσεων εἶναι ὀρθοκανονικό. Ἀρκεῖ νὰ παρατηρήσουμε πῶς αὐτὸ τὸ ἀξίωμα συνεπάγεται, ὅτι τὸ συμβιβαστὸ συμπλήρωμα μιᾶς πρότασης εἶναι μοναδικό. Ἡ ἀπεικόνιση μιᾶς πρότασης στὸ συμβιβαστὸ συμπλήρωμά της εἶναι λοιπὸν μιὰ ὀρθοσυμπλήρωση. Ἀντίστροφα, ἐὰν σὲ ἕνα ὀρθοκανονικὸ πλέγμα L ἑρμηνεύσουμε τὸ ὀρθοσυμπλήρωμα ὡς συμβιβαστὸ συμπλήρωμα, τότε τὸ L ἱκανοποιεῖ τὰ ἀξιώματα P καὶ C.

Τέλος μποροῦμε νὰ δείξουμε ὅτι τὸ ἀξίωμα P εἶναι ἰσοδύναμο μὲ τὸ ἀκόλουθο, φαινομενικὰ ἰσχυρότερο: Κάθε ὑποπλέγμα ποὺ ἀποτελεῖται ἀπὸ ἕνα ζευγάρι προτάσεων a καὶ b καθὼς ἀπὸ τὰ συμβιβαστὰ συμπληρώματα τους a′ καὶ b′ εἶναι ἐπιμεριστικὸ ὡς πλέγμα προτάσεων ἑνὸς φυσικοῦ συστήματος[6]. Μ' αὐτὴ τὴν τελευταία ἑρμηνεία ἕνα ἀξίωμα αὐτοῦ τοῦ εἴδους γίνεται εὔλογο.

Εἶναι πολὺ πιὸ δύσκολο νὰ ἑρμηνεύσουμε τὸ ἀξίωμα A. Ἂς ὑποθέσουμε ὅτι ἕνα σύστημα βρίσκεται στὴν κατάσταση p καὶ ὅτι μετρᾶμε τὴν ἰδιότητα a παρέλκοντάς το «ὅσο γίνεται λιγότερο». Μπορεῖ ν' ἀποδειχτεῖ ὅτι, στὴν περίπτωση ποὺ ἡ ἀπάντηση εἶναι καταφατική, τότε ἡ τελική του κατάσταση εἶναι ἀκριβῶς τὸ ἄτομο $(p \vee a') \wedge a$[7].

Ἕνα πλῆρες ἀτομικὸ καὶ ὀρθοκανονικὸ πλέγμα, ὅπου ἑρμηνεύουμε τὰ ἄτομα ὡς καταστάσεις, τὰ ὀρθοσυμπληρώματα ὡς συμβιβαστὰ συμπληρώματα καὶ ποὺ ἱκανοποιεῖ τὸ ἀξίωμα A, λέγεται προτασιακὸ σύστημα. Τὸ πλέγμα τῶν προτάσεων ἑνὸς φυσικοῦ κλασικοῦ ἢ κβαντικοῦ συστήματος εἶναι πάντα στὴν πράξη ἕνα προτασιακὸ σύστημα. Ἰδιαίτερα τὸ πλέγμα τῶν κλειστῶν ὑποχώρων ἑνὸς χιλβερτιανοῦ χώρου εἶναι ἕνα προτασιακὸ σύστημα[8]. Ἔτσι δικαιολογεῖται ἡ χρησιμοποίηση αὐτῶν τῶν χώρων στὴν κβαντομηχανικὴ καὶ ἐξηγεῖται ὁ ρόλος ποὺ παίζουν στὴ μικροφυσική.

LA DESCRIPTION D'UN SYSTÈME PHYSIQUE ET LE PRÉSUPPOSÉ CLASSIQUE

Résumé.

Un système physique est une partie de la réalité isolée dans l'espace temps et conçue extérieure au physicien.

Pour le décrire, nous énumérons ses propriétés qui peuvent être *actuelles* ou *potentielles*. L'ensemble des propriétés actuelles est *l'état* du système.

---

6. C. Piron, *Foundations of Quantum Physics*, Reading, Mass., W.A. Benjamin Inc. 1978, § 22, σελ. 25. Γιὰ μιὰ διεξοδικὴ συζήτηση τοῦ ἀξιώματος αὐτοῦ βλ. ἐπίσης B. Mulnik, *Theory of Filters*, «Comm. Math. Phys.» 15 (1969), 1-46.

7. Βλ. Piron, ὅ.π., σελ. 68: Θεώρημα 43.

8. Ἀντίστροφα, κάθε προτασιακὸ σύστημα (ἐκτὸς ἀπὸ μιὰ ἐξαίρεση στὶς τρεῖς διαστάσεις) μπορεῖ νὰ πραγματοποιηθεῖ μὲ τὴ βοήθεια κλειστῶν ἀνυσματικῶν ὑποχώρων αὐτοῦ τοῦ τύπου. Βλ. Piron, ὅ.π., σελ. 57.

Une *question* est une expérience qui conduit à une alternative dont les termes sont «oui» et «non». L'*opposé* d'une question α, $\alpha^{\sim}$ s'obtient en interchangeant les rôles du «oui» et du «non». Pour une famille de questions α_j, jEJ, nous définissons $\pi_j\, \alpha_j$, la question produit en lui attribuant a réponse obtenue pour un α_j choisi librement (ou au hasard). Une question α est plus *forte* que β, $\alpha < \beta$, si le «oui» est sûr pour β chaque fois qu'il l'est pour α. Cette relation définit une relation d'équivalence par $\alpha \sim \beta \Leftrightarrow \alpha < \beta$ et $\beta < \alpha$.

Une *proposition* est une classe d'équivalence de questions. L'ensemble de propositions L est doté d'une relation d'ordre partiel $a < b$ qui signifie que $\alpha < \beta\ \forall\ \alpha \in a \bigwedge$ et $\forall$ $p\beta \in b$.

On montre que l'ensemple L est un treillis complet. On note $a \bigwedge b$ la plus grande borne inférieure et $a \bigvee b$ la plus petite borne superieure de a et b. L'opération $\bigvee$ s'identifie avec le «ou» logique. Par contre, $\bigwedge$ ne s'identifie pas avec le «et» logique. En fait,

«a vraie» et «b vraie» $\rightarrow$ «a $\bigwedge$ b vraie».

Si l'implication inverse est aussi vraie, alors L est distributif.

Un étatí $E \subset L$ est complètement caractérisé par $p = \bigvee_E x$

Axiome de maximalité. Si p définit un état, alors p est un *atome* de L c'est-à-dire $a < p \rightarrow a = 0$ ou $a = p$. Un treillis L qui satisfait cet axiome est atomique c'est-à-dire que tout $x \in L$, $x \neq 0$ il existe un atome $p \in L$ tel que $p < x$.

b est le *complèment compatible* de a si $a \bigwedge b = I$, $a \bigwedge b = 0$ et si il existe $\alpha \in a$ tel que $a \in b$. On note $b = a'$. 0 est la proposition toujours fausse et It la proposition toujours vraie.

Axiome C. Pour chaque proposition il existe au moins un complément compatible. Cet axiome est basé sur une foule de cas particuliers.

Présupposé classique. Si a et b sont des compléments compatibles alors, ou bien «a est vraie» ou bien «b est vraie». Cette hypothèse n'est pas vérifiée pour les systèmes quantiques. Les treillis qui satisfont l'axiome de maximalité, l'axiome C et l'hypothèse classique sont distributifs et s'identifient avec le treillis des sous-ensembles de l'ensemble Ω des états possibles du système. En mécanique classique, le rôle de Ω est joué par l'espace de phase. L'hypothèse classique est remplacée par deux axiomes.

Axiome P. Dans le treillis de propositions d'un système physique.

$a < b \rightarrow b' \bigvee (a' \bigwedge b) = a'$.

Axiome A. Dans le treillis de propositions d'un système physique $(p \vee a') \bigwedge a$ est un atome si p est un atome tel que $p \bigwedge a' = 0$.

Les axiomes P et A sont plus faibles que l'hypothèse classique. L'axiome P entraîne que le complément compatible d'une proposition est unique et donc, que le treillis de propositions d'un système physique est orthomodulaire.

Un *système de propositions* est un treillis complet, atomique et orthomodulaire qui satisfait l'axiome A. Le treillis des propositions d'un système physique est toujours un système de propositions. C'est, en particulier, le cas des sous-espaces fermés d'un espace de Hilbert dont le rôle joué en microphysique est ainsi expliqué.

Genève C. Piron - A. Malaspinas